

مدار الکتریکی او ۲

فهرست مطالب

فصل اول.....	۲
فصل دوم.....	۳۲
فصل سوم.....	۶۱
فصل چهارم.....	۹۶
فصل پنجم.....	۱۴۲
فصل ششم.....	۱۷۸
فصل هفتم.....	۱۹۷
فصل هشتم.....	۲۵۶
فصل نهم.....	۲۹۰
فصل دهم.....	۳۱۲
فصل یازدهم.....	۳۳۳
فصل دوازدهم.....	۳۸۵
فصل سیزدهم.....	۴۱۸
فصل چهاردهم.....	۴۵۴
فصل پانزدهم.....	۴۷۱
فصل شانزدهم.....	۴۸۰

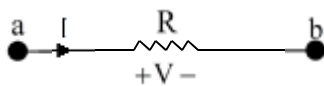
فصل اول: مبانی مدارهای الکتریکی

در این فصل سعی بر این است که مفاهیم اولیه و اجزای تشکیل دهنده مدارهای الکتریکی و ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار گیرد.

عناصر مداری

۱-۱-۱ مقاومت

مقاومت یک المان دو سر می‌باشد که رابطه ولتاژ و جریان آن توسط منحنی مشخصه ولتاژ - جریان قابل بیان است.

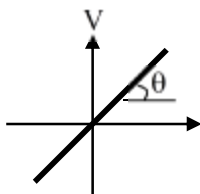


جهت قراردادی به این صورت است که آن سر المان که جریان به آن وارد می‌شود، دارای ولتاژ مثبت می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$V = V_a - V_b, \quad I = \frac{V}{R} = \frac{V_a - V_b}{R}$$

معمولاً مقاومت‌ها به سه صورت وجود دارند:

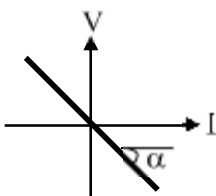
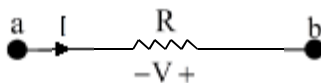
۱- مقاومت خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه ولتاژ - جریان به صورت $V = RI$ می‌باشد که R مقدار مقاومت و ثابت می‌باشد.



در این حالت مشخصه ولتاژ - جریان به صورت زیر است:

$$\text{شیب} = \tan \theta = R$$

اگر جهت‌های ولتاژ و جریان را به صورت زیر در نظر بگیریم:



در این صورت مشخصه ولتاژ - جریان آن به صورت زیر می‌باشد:

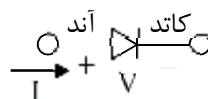
$$\text{شیب} = \tan \alpha = R$$

۲- مقاومت خطی و تغییرپذیر با زمان: رابطه ولتاژ - جریان به صورت $V(t) = R(t)I(t)$ می باشد که $R(t)$ مقدار مقاومت و متغیر با زمان می باشد.

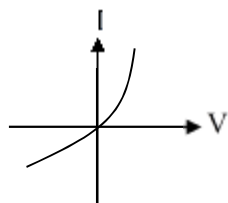
۳- مقاومت غیرخطی: رابطه ولتاژ - جریان در این نوع مقاومت به صورت $V = f(I)$ می باشد. (ولتاژ تابع جریان است) در این صورت مقدار مقاومت در نقطه کار را می توان از رابطه $\left. \frac{dV}{dI} \right|_{I_0}$ به دست آورد.

۱-۱-۲- دیود

دیود یک المان دو سر می باشد که جریان را فقط در یک جهت عبور می دهد.



مشخصه جریان - ولتاژ یک دیود واقعی به صورت زیر است:



اگر دیود را به صورت ایده آل در نظر بگیریم:

هرگاه ولتاژ آند از کاتد بیش تر باشد، دیود اتصال کوتاه است یعنی: $V = 0$

هرگاه ولتاژ کاتد از آند بیش تر شود، دیود اتصال باز است یعنی: $I = 0$

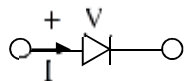
به عبارت ساده تر می توان گفت:

دیود وصل $\rightarrow$ (S.C) دیود اتصال کوتاه $\rightarrow$ ولتاژ کاتد $>$ ولتاژ آند

دیود قطع $\rightarrow$ (O.C) دیود اتصال باز $\rightarrow$ ولتاژ کاتد $<$ ولتاژ آند

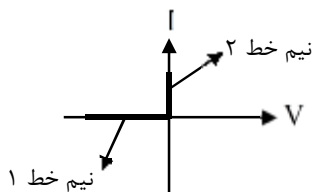
بر این اساس و با توجه به جهت های ولتاژ و جریان هر دیود، می توان مشخصه جریان - ولتاژ را رسم کرد.

مثلاً برای دیود شکل زیر با جهت ولتاژ و جریان نشان داده شده خواهیم داشت:



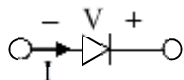
(نیم خط ۱) $I = 0 \rightarrow$ دیود قطع $\rightarrow V < 0$

(نیم خط ۲) $V = 0 \rightarrow$ دیود وصل $\rightarrow I > 0$



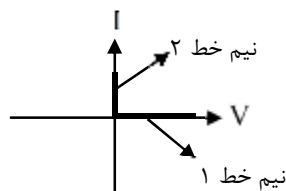
همان‌طور که دیده می‌شود این شکل، یک تقریب ایده‌آل برای مشخصه دیود واقعی است. در حالت کلی برای رسم مشخصه جریان - ولتاژ دیود، ابتدا حالت قطع را بررسی می‌کنیم، حالتی که $V_K > V_A$ در این حالت $I = 0$ است و نیم‌خط مربوطه را مشخص می‌کنیم و سپس حالت وصل که در آن $V = 0$ است را رسم می‌نماییم. برای این نیم‌خط، توجه به جهت جریان لازم است.

برای دیود شکل زیر می‌توان گفت:

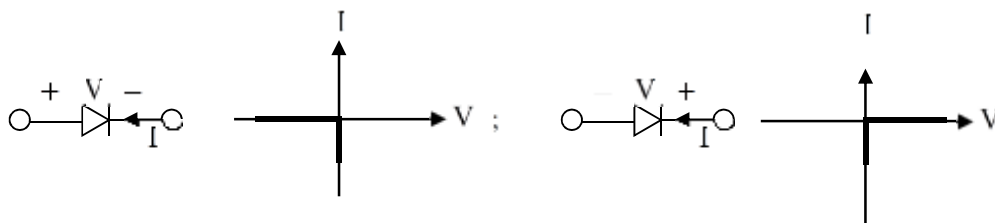


(نیم خط ۱) $I = 0 \rightarrow$ دیود قطع $\rightarrow V > 0$

(نیم خط ۲) $V = 0 \rightarrow$ دیود وصل $\rightarrow I > 0$



همچنین می‌توان نشان داد:



باید نمودار را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه نمود. در

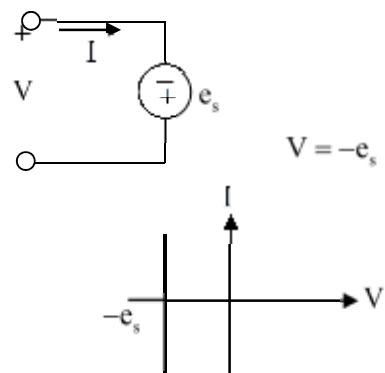
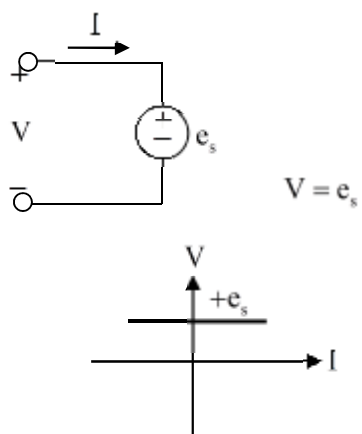
نکته: برای تبدیل مشخصه V به I

این حالت، شیب‌ها معکوس می‌شوند.

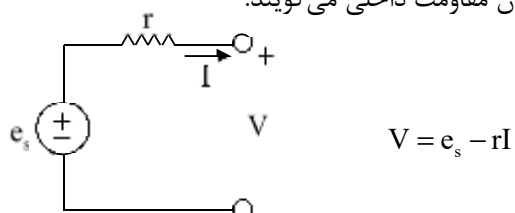
۱-۳- منابع مستقل

الف- منبع ولتاژ $\leftarrow$ عنصری که ولتاژ دو سر آن مستقل از جریان گذرنده از آن باشد. منبع ولتاژ در اصل همان باتری است.

در حالت ایده‌آل داریم:



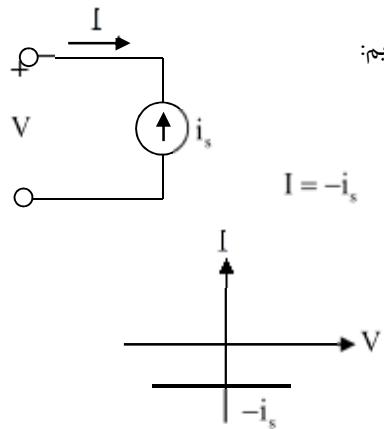
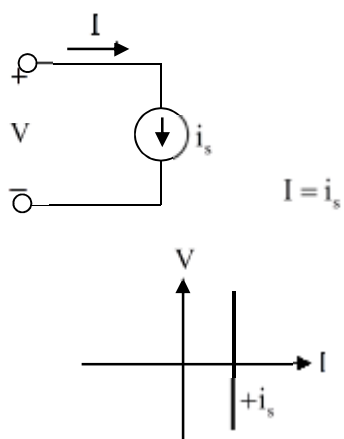
و در حالت واقعی یک مقاومت r با آن سری می‌شود که به آن مقاومت داخلی می‌گویند.



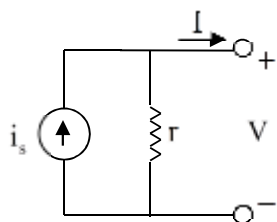
در این رابطه rI را افت ولتاژ مقاومت داخلی منبع می‌گویند.

ب- منبع جریان ← المانی که جریان گذرنده از آن مستقل از ولتاژ دو سرش باشد.

در حالت ایده‌آل داریم:



و در حالت واقعی یک مقاومت r با آن موازی می‌شود که به آن مقاومت داخلی می‌گویند.



$$I = i_s - \frac{V}{r}$$

در این رابطه $\frac{V}{r}$ را افت جریان منبع می‌گویند.

نکته: به‌طور کلی هر المانی (به جز اتصال کوتاه) موازی با منبع ولتاژ قابل حذف می‌باشد (یعنی تأثیری در سایر قسمت‌های مدار ندارد) و هر المانی (به جز اتصال باز) سری با منبع جریان قابل حذف است.

نکته: اگر اتصال کوتاه با منبع ولتاژ موازی شود، خود منبع ولتاژ حذف می‌شود و در صورتی که اتصال باز با منبع جریان سری گردد، منبع جریان حذف خواهد شد.

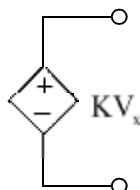
۴-۱-۱- منابع وابسته (کنترل شده)

منابعی که ولتاژ دو سر آن یا جریان خروجی از آن به ولتاژ یا جریان شاخه‌ای دیگر از مدار وابسته باشد را منابع وابسته می‌گویند.

منابع وابسته به یکی از چهار شکل زیر می‌باشند:

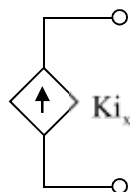
۱- منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ

در این حالت واحد ضریب K ، یک است.



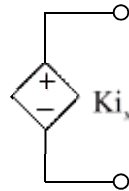
۲- منبع جریان وابسته به جریان

در این حالت واحد ضریب K ، یک است.



۳- منبع ولتاژ وابسته به جریان

در این حالت واحد ضریب K ، اهم (Ω) و از جنس مقاومت می‌باشد.



۴- منبع جریان وابسته به ولتاژ

در این حالت واحد ضریب K ، مهو (J) و از جنس رسانایی است.

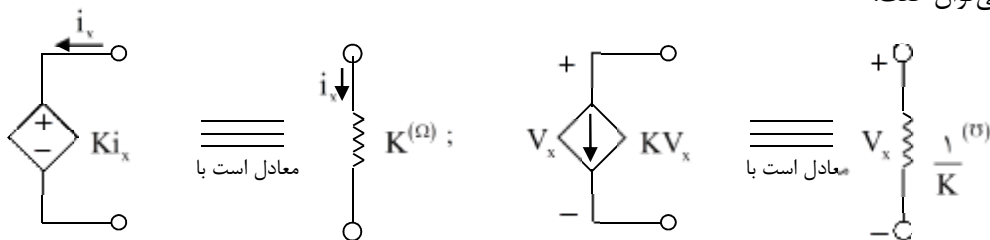
که در کلیه این منابع، i_x و V_x به ترتیب جریان و ولتاژ هر شاخه از مدار می‌توانند باشند.

نکته: حالت خاص: منابع وابسته به خود (قضیه جذب منبع)

اگر در منابع ولتاژ وابسته به جریان، i_x جریان خود منبع ولتاژ و یا در منابع جریان وابسته به ولتاژ، V_x ولتاژ خود منبع

جریان باشد، در این صورت منابع وابسته در حکم یک مقاومت می‌باشد.

به عبارت دیگر می‌توان گفت:



در این حالت‌های خاص به جهت جریان و پلاریته ولتاژ دقت کنید.

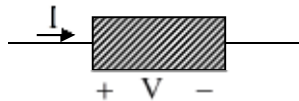
نکته: صفر کردن (خنثی کردن) منبع ولتاژ مستقل به معنای اتصال کوتاه کردن آن می‌باشد.



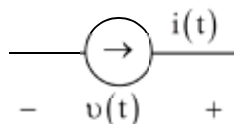
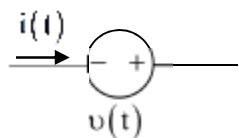
و صفر کردن (خنثی کردن) منبع جریان مستقل به معنای اتصال باز کردن آن است.



نکته: جهت قراردادی متناظر با المان‌های مداری (به جز منابع مستقل) به صورت زیر می‌باشد:



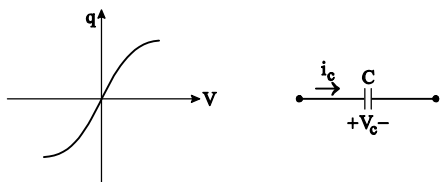
جهت‌های قراردادی متناظر در خصوص منابع مستقل به صورت زیر می‌باشد:



۱-۱-۵- خازن

خازن یک المان دو سر است که رابطه بین بار الکتریکی (q) و ولتاژ دو سر آن (V) توسط یک منحنی به صورت زیر

بیان می‌گردد:



خازن‌ها معمولاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱- خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه بار الکتریکی و ولتاژ آن به صورت $q = C.V$ بیان می‌شود که در آن q بار

الکتریکی برحسب کولن، C ظرفیت خازن برحسب فاراد و V ولتاژ دو سر آن برحسب ولتاژ می‌باشد.

روابط ولتاژ و جریان در این حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$i = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv}{dt}$$

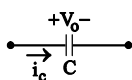
$$V = V_0 + \frac{1}{c} \int_0^t i_c \cdot dt \quad V_0 \text{ (ولتاژ اولیه خازن)}$$

و در مورد انرژی آن داریم:

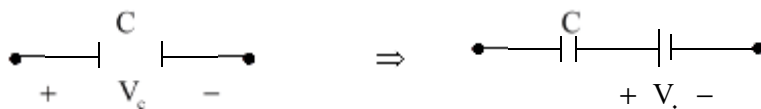
$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} cV^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{c}$$

بنابراین هر خازن با دو مشخصه معرفی می‌گردد، یکی ظرفیت خازن که مربوط به ساختمان آن می‌باشد و مقداری ثابت

است و دیگری ولتاژ اولیه آن که مربوط به مداری است که خازن در آن شارژ شده است.



نکته: هر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه V_0 را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی نمود:



در صورتی که $V_0 = V_c(t=0) = 0$ باشد، $V_c(t)$ تابعی خطی از $i_c(t)$ خواهد بود و تا زمانی که جریان خازن کراندارا باشد، ولتاژ خازن نمی‌تواند به صورت ناگهانی تغییر کند.

۲- خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه بار الکتریکی و ولتاژ خازن به صورت $q(t) = C(t) \cdot V(t)$ می‌باشد و $c(t)$ ظرفیت خازن است که با زمان تغییر می‌کند.

می‌توان گفت:

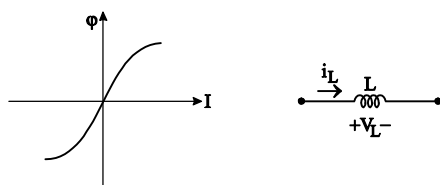
$$i = \frac{dq(t)}{dt} = C(t) \cdot \frac{dV(t)}{dt} + V(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$$

۳- خازن غیر خطی: رابطه ولتاژ با بار الکتریکی آن به صورت $q = f(V)$ می‌باشد که در این صورت می‌توان ظرفیت خازن را در نقطه کار V_0 به صورت $C = \left. \frac{q}{V} \right|_{V_0}$ به دست آورد.

۱-۱-۶- سلف

سلف یک المان دو سر است که رابطه بین شار الکتریکی (Φ) و جریان آن (I) توسط یک منحنی به صورت زیر بیان

می‌گردد:



سلف‌ها معمولاً به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱- سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان: رابطه شار الکتریکی و جریان آن به صورت $\Phi = L \cdot I$ بیان می‌شود که در آن Φ شار برحسب وبر، L اندوکتانس برحسب هانری و I جریان برحسب آمپر می‌باشد.

روابط ولتاژ و جریان در این حالت به صورت زیر می‌باشند:

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

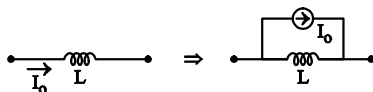
$$i = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t V \cdot dt \quad (I_0 \text{ جریان اولیه سلف})$$

و در مورد انرژی آن داریم:

$$W = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi^2}{L}$$

پس هر سلف دو عامل مشخص کننده دارد، یکی اندوکتانس سلف که مربوط به ساختمان آن می باشد و مقداری ثابت است و دیگری جریان اولیه آن که مربوط به مداری است که سلف در آن شارژ شده است.

نکته: هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه I را می توان به صورت زیر مدل سازی نمود:



در صورتی که $I_L(t=0) = I_0$ باشد، $i_L(t)$ تابعی خطی از $V_L(t)$ خواهد بود و تا زمانی که ولتاژ سلف کراندار باشد، جریان سلف نمی تواند به طور ناگهانی تغییر کند.

۲- سلف خطی و تغییرپذیر با زمان: رابطه شار الکتریکی و جریان در آن به صورت $\phi(t) = L(t) \cdot I(t)$ می باشد و $L(t)$ مقدار سلف است که با زمان تغییر می کند.

می توان گفت:

$$V = \frac{d\phi(t)}{dt} = L(t) \cdot \frac{dI(t)}{dt} + I(t) \cdot \frac{dL(t)}{dt}$$

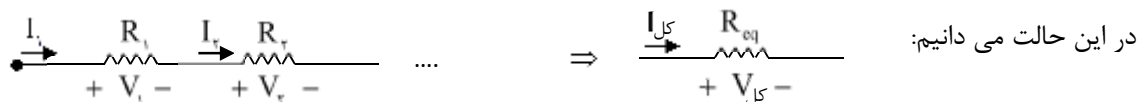
۳- سلف غیرخطی: رابطه شار الکتریکی و جریان به صورت $\phi = f(I)$ می باشد که مقدار سلف در نقطه کار I_0 به صورت

$$\left. \frac{d\phi}{dI} \right|_{I_0} \text{ به دست می آید.}$$

به هم بستن عناصر

۱-۲-۱ اتصال سری عناصر

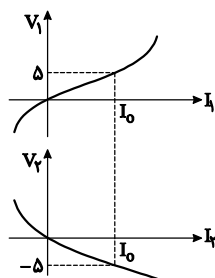
۱- مقاومت



$$\begin{cases} V_{kl} = V_1 + V_2 + \dots \\ I_{kl} = I_1 = I_2 = \dots \end{cases} \rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots = \sum_{i=1} R_i$$

بنابراین در این حالت برای رسم مشخصه $V-I$ نهایی، به ازای جریان‌های یکسان، ولتاژهای متناظر را جمع می‌کنیم.

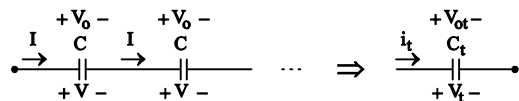
مثلاً برای دو عنصر سری در شکل زیر به ازای جریان I_o داریم:



$$I_1 = I_2 = I_o \rightarrow V_{\text{کل}} = V_1 + V_2 = \Delta + (-\Delta) = 0$$

۲- خازن

در این حالت داریم:



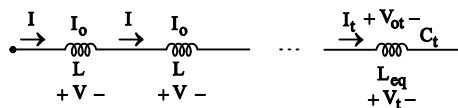
$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 + K \\ I = I_1 = I_2 = K \end{cases} \rightarrow C_t = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + K \right)^{-1}$$

و برای ولتاژ اولیه کل، به دلیل این که خازن‌ها سری هستند خواهیم داشت:

$$V_{ot} = V_{o1} + V_{o2} + K$$

۳- سلف

در این حالت می‌توان گفت:



$$\begin{cases} V_t = V_1 + V_2 + \dots \\ I_t = I_1 = I_2 = \dots \end{cases} \rightarrow L_t = L_1 + L_2 + \dots = \sum_i L_i$$

و با توجه به اصل بقای شار برای جریان اولیه I_{ot} داریم:

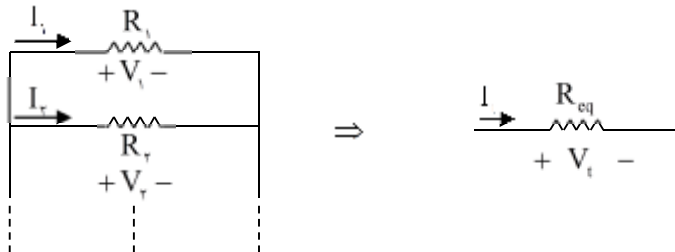
$$I_{ot} = \frac{\Phi_{ot}}{L_t} = \frac{L_1 I_{o1} + L_2 I_{o2} + K}{L_1 + L_2 + K}$$

در این رابطه علامت + به معنای جمع جبری می‌باشد. (باید به جهت جریان‌ها توجه داشت).

۱-۲-۲- اتصال موازی عناصر

۱- مقاومت

در این حالت می‌دانیم:



$$\begin{cases} V_t = V_1 = V_r = \dots \\ I_t = I_1 + I_r + \dots \end{cases} \rightarrow R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_r} + \dots \right)^{-1}$$

بنابراین در این حالت برای رسم مشخصه $V-I$ ، به ازای ولتاژهای یکسان، جریان‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم.

نکته: برای جمع کردن دو خط، شیب‌ها و عرض از مبدأ آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. همچنین در جمع کردن خطوط:

- هر خط با شیب m وقتی با یک خط افقی جمع می‌شود، شیب آن تغییر نمی‌کند، بلکه تنها مقدار dc آن تغییر می‌کند و به بالا یا پایین شیف‌ت می‌یابد. به عبارت دیگر:

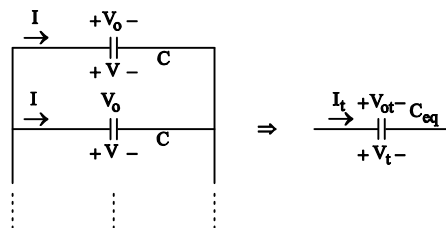
$$/m + \bar{0} = /m$$

- هر خط با شیب m هنگام جمع شدن با یک خط قائم، همان خط قائم با شیب بی‌نهایت می‌شود. به عبارت دیگر:

$$/m + |\infty| = |\infty|$$

۲- خازن

در این حالت داریم:



$$\begin{cases} V_t = V_1 = V_r = \dots \\ I_t = I_1 + I_r + \dots \end{cases} \rightarrow c_{eq} = c_1 + c_r + \dots = \sum_i c_i$$

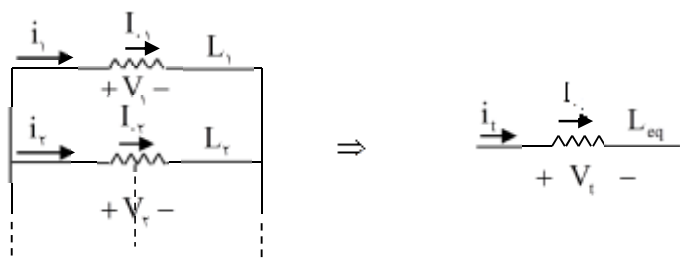
و با توجه به اصل بقای بار برای ولتاژ اولیه خازن معادل داریم:

$$V_{.t} = \frac{q_{.t}}{c_t} = \frac{c_1 V_{.1} + c_r V_{.r} + \dots}{c_1 + c_r + \dots}$$

علامت + در رابطه فوق به معنای جمع جبری است. (باید به پلاریته ولتاژها دقت نمود).

۳- سلف

در این حالت می‌توان گفت:



$$\begin{cases} V_t = V_1 = V_r = \dots \\ I_t = I_1 + I_r + \dots \end{cases} \rightarrow L_{eq} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_r} + \dots \right)^{-1}$$

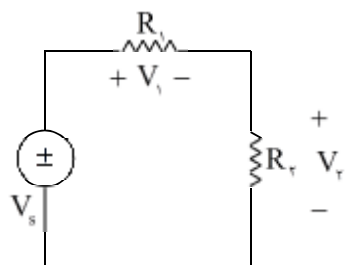
و برای جریان اولیه کل، با توجه به موازی بودن سلف‌ها داریم:

$$I_{.t} = I_{.1} + I_{.r} + \dots$$

روابط تقسیم (ولتاژ، جریان، شار و بار)

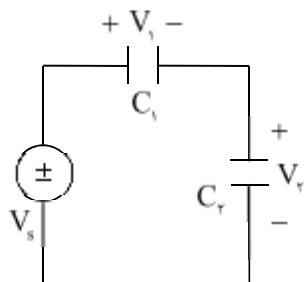
3-1- روابط تقسیم (جریان و شار) در حالت سری

۱- مقاومت



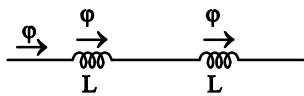
$$\begin{cases} V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_r} V_s \\ V_r = \frac{R_r}{R_1 + R_r} V_s \end{cases}$$

۲- خازن



$$\begin{cases} V_1 = \frac{C_r}{C_1 + C_r} V_s \\ V_r = \frac{C_1}{C_1 + C_r} V_s \end{cases}$$

۳- سلف

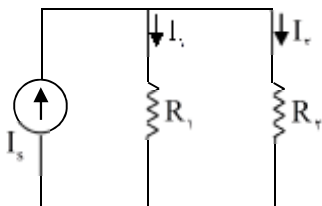


$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_r$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_r} \Phi \\ \Phi_r = \frac{L_r}{L_1 + L_r} \Phi \end{cases}$$

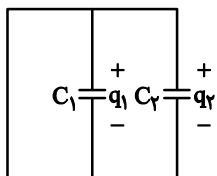
۱-۳-۲- روابط تقسیم (جریان و بار) در حالت موازی

۱- مقاومت



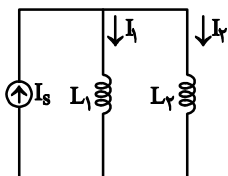
$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_r}{R_1 + R_r} I_s \\ I_r = \frac{R_1}{R_1 + R_r} I_s \end{cases}$$

۲- خازن



$$\begin{cases} q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_r} q \\ q_r = \frac{C_r}{C_1 + C_r} q \end{cases}$$

۳- سلف



$$\begin{cases} I_1 = \frac{L_r}{L_1 + L_r} I_s \\ I_r = \frac{L_1}{L_1 + L_r} I_s \end{cases}$$

توان الکتریکی

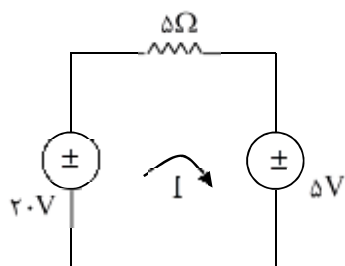
توان لحظه‌ای تحویل داده شده به هر المان برابر است با حاصل ضرب ولتاژ در جریان در آن لحظه خاص و به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$P(t) = V(t) \cdot I(t)$$

طبق جهت‌های قراردادی، اگر $P(t) > 0$ باشد، المان مربوطه توان جذب می‌کند که در این صورت المان را پسیو یا غیرفعال می‌گویند و اگر $P(t) < 0$ باشد، المان توان تولید می‌کند که المان را اکتیو یا فعال می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر جریان از سر مثبت وارد شود، توان مصرفی و اگر جریان از سر منفی ولتاژ وارد شود (و یا از سر مثبت خارج شود)، توان تولیدی است.

بنابراین همه مقاومت‌ها مصرف کننده توان هستند و منابع مستقل (ولتاژ و جریان) بسته به شرایط می‌توانند مصرف کننده یا تولید کننده توان باشند.

مثلاً در مدار شکل زیر:



$$I = \frac{20 - 5}{5} = 3A$$

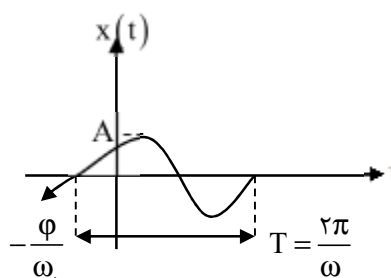
جریان I با جهت نشان داده شده برابر $3A$ است.

در این صورت مقاومت 5Ω به میزان $45W$ توان مصرف کرده است و منبع $20V$ به میزان $60W$ توان تولید می‌کند و $15W$ دیگر توسط منبع $5V$ مصرف شده است.

5-1- توابع تحریک مداری

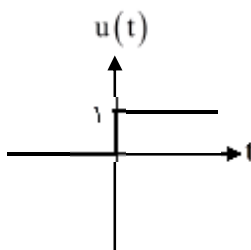
۱- تابع سینوسوئید

$$X(t) = A \cos(\omega_{ot} + \varphi)$$



۲- تابع پله واحد

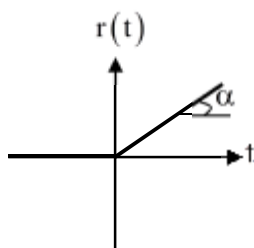
$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$



۳- تابع شیب واحد

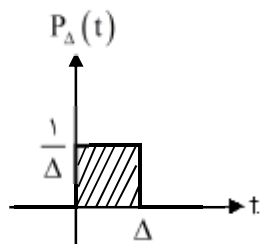
$$r(t) = \begin{cases} t & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} = tu(t)$$

$$\tan \alpha = m = 1$$



۴- تابع پالس واحد

$$P_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & ; 0 < t < \Delta \\ 0 & ; t > \Delta \end{cases}$$



سطح زیر این نمودار همیشه برابر یک است.

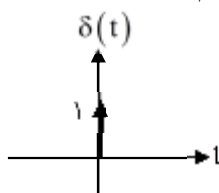
۵- تابع ضربه واحد

اگر در تابع پالس واحد، عرض پالس به سمت صفر میل کند $(\Delta \rightarrow 0)$ ، ارتفاع پالس در $t = 0$ به سمت بی‌نهایت می‌رود

و در سایر نقاط $(t \neq 0)$ ، تابع برابر صفر می‌شود ولی مساحت زیر نمودار در هر صورت ثابت و برابر یک

است.

شکل حاصل را تابع ضربه واحد $\delta(t)$ می‌نامیم.



$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t)$$

این طرز نمایش یعنی سطح زیر این منحنی در لحظه وقوع تابع ضربه واحد، برابر یک است و ارتفاع آن برابر یک نمی باشد (چرا که ارتفاع به سمت بی نهایت میل می کند).

* خواص تابع ضربه

۱- انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = 1$$

اگر تابع ضربه در محدوده انتگرال گیری قرار نداشته باشد، حاصل انتگرال صفر می شود.

۲- نمونه برداری

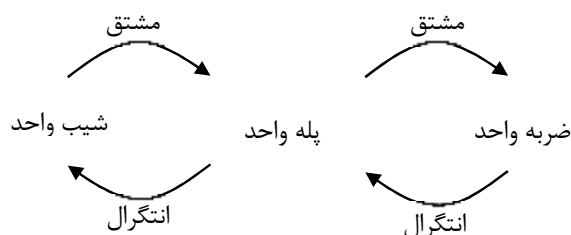
$$\begin{cases} f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t-t_0) \\ f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t) \end{cases}$$

۳- غربالی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

* روابط توابع تحریک با یکدیگر

به روابط زیر دقت کنید:



پس می توان گفت:

ضربه، مشتق پله است. یعنی در مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان، پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله است.

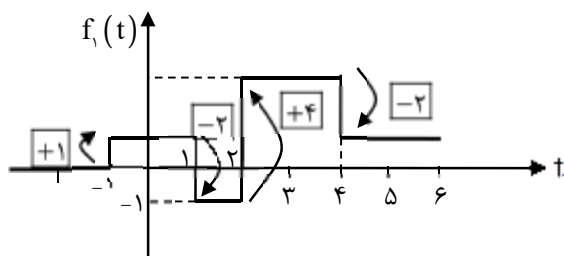
* بیان توابع پالسی و شیبی براساس توابع پله و شیب

برای تعیین ضابطه چنین نمودارهایی، در هر یک از نقاط پرش و نقاط زاویه دار، از فرمول های زیر استفاده می کنیم:

(پرش t_1) مقدار علامت دار پرش $\rightarrow$ در نقاط پرش $u(t-t_1)$

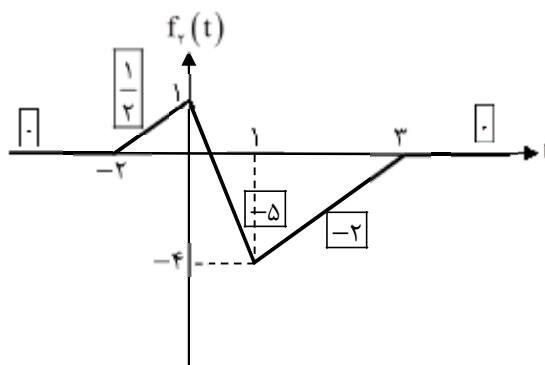
(تغییر شیب t_1) مقدار علامت دار تغییر شیب $\rightarrow$ در نقاط زاویه دار $i(t-t_1)$

مثلاً در شکل‌های زیر:



$$f_l(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + 4u(t-2) - 2u(t-4)$$

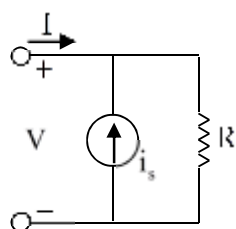
روی هر خط ??? را نوشته و در نقاط زاویه‌دار، تغییر شیب‌ها را محاسبه می‌کنیم.



$$f_r(t) = \frac{1}{2}r(t+2) - \frac{11}{2}r(t) + 7r(t-1) - 2r(t-3)$$

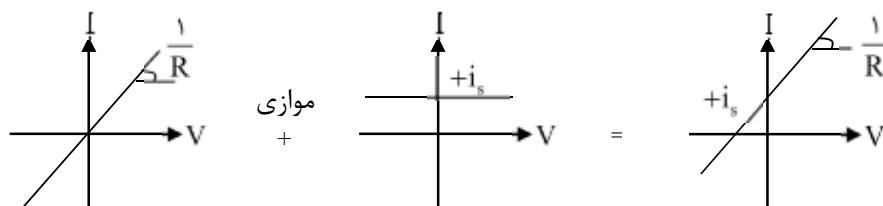
اکنون به بررسی چند نمونه سؤال می‌پردازیم.

سؤال ۱: در مدارهای زیر، مشخصه $I-V$ را رسم کنید.

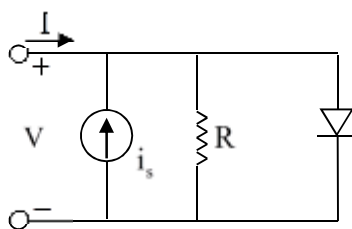


(الف)

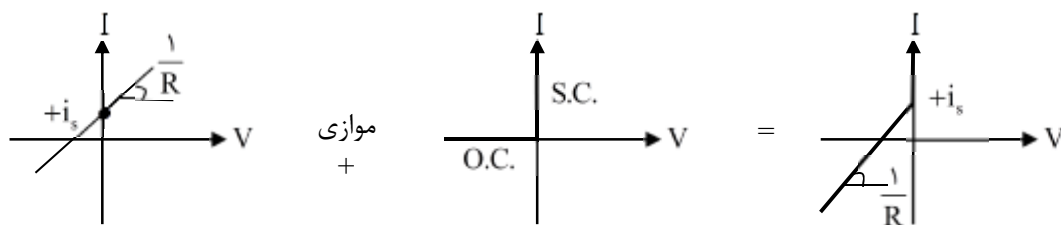
با توجه به موازی بودن مقاومت R و منبع جریان i_s ، به ازای ولتاژهای برابر، جریان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



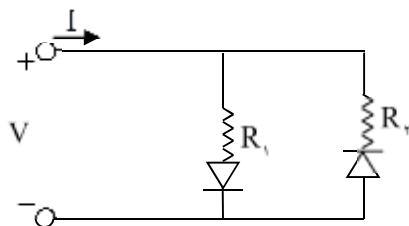
(ب)



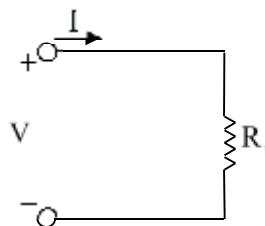
در این جا پاسخ قسمت قبل، با یک دیود موازی شده است، پس مشخصه آن‌ها جمع می‌شود.



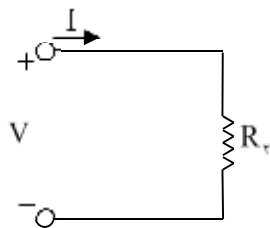
(ج)



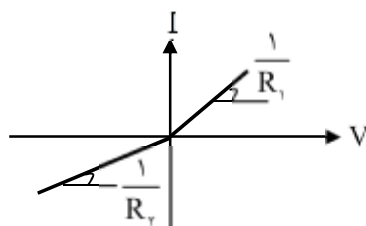
در این مدار با فرض ایده‌آل بودن دیودها، وقتی که $V > 0$ است، شاخه سمت چپ وصل و شاخه سمت راست قطع است و مدار به شکل زیر تبدیل می‌شود:



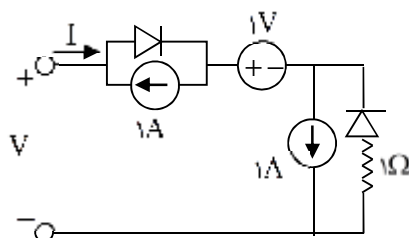
و هنگامی که $V < 0$ است، شاخه سمت راست وصل و شاخه سمت چپ قطع است. پس داریم:



بنابراین مشخصه جریان - ولتاژ به ازای دو ناحیه $V > 0$ و $V < 0$ به صورت زیر است:

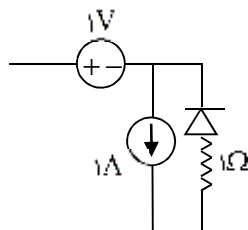


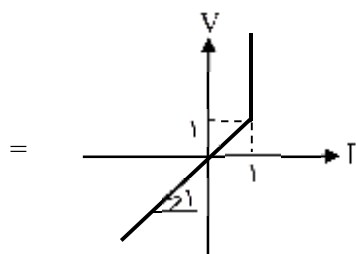
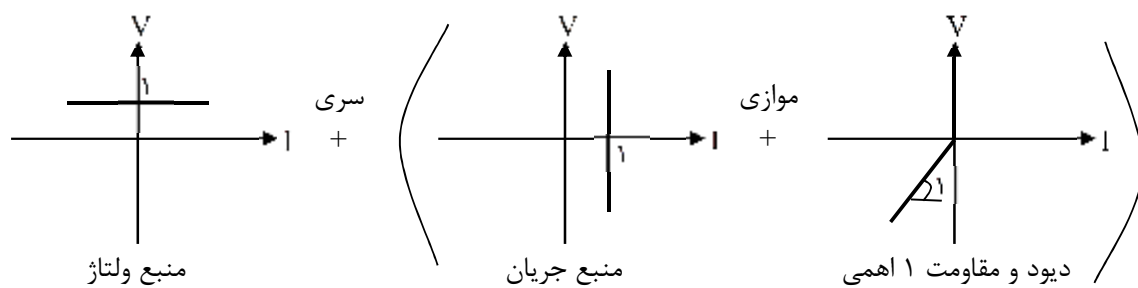
(د)



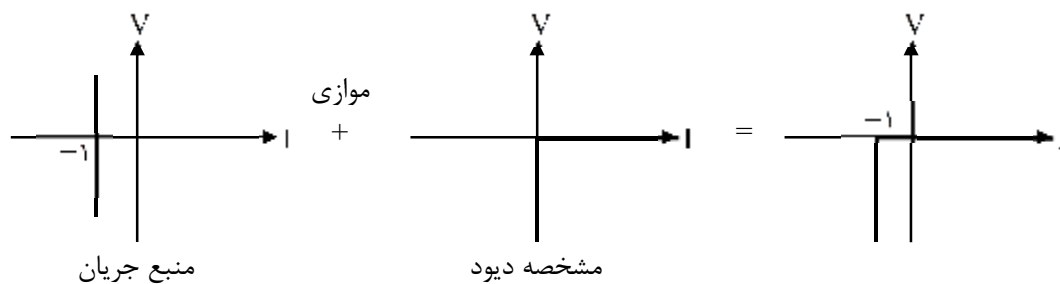
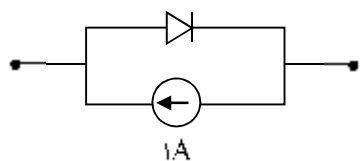
برای بررسی این مدار، ابتدا قسمت‌های مختلف آن را به صورت تکه تکه بررسی می‌کنیم و سپس نتیجه نهایی را به دست می‌آوریم.

برای قسمت سمت راست خواهیم داشت:

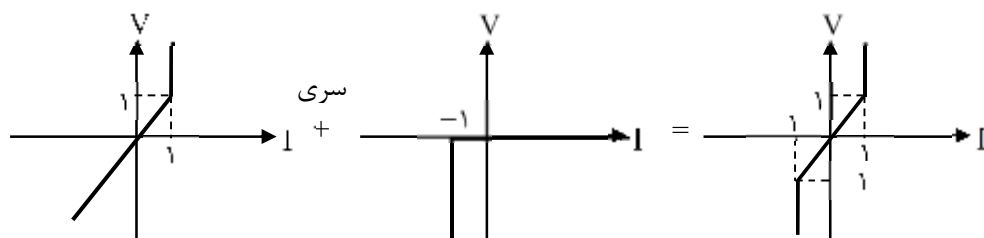




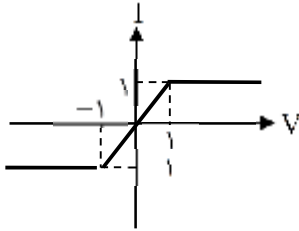
و برای مجموعه سمت چپ داریم:



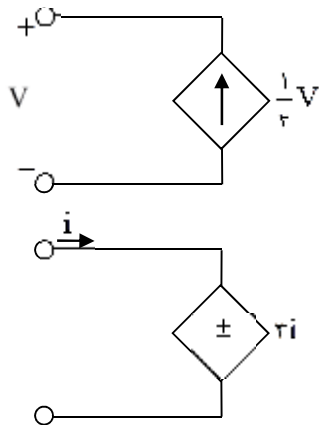
و در نهایت بخش سمت راست و چپ با هم سری می شوند:



و با تبدیل مشخصه $V-I$ به مشخصه $I-V$ داریم:



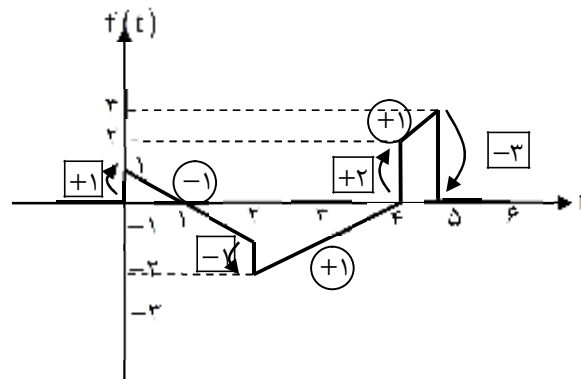
مثال ۲: مدارهای زیر معادل چه مدار دیگری می‌باشند؟



(الف) $\rightarrow R = \frac{V}{-\frac{1}{r}V} = -r\Omega$

(ب) $\rightarrow R = \frac{ri}{i} = r\Omega$

مثال ۳: ضابطه نمودار شکل زیر را برحسب توابع پالسی و شیبی بنویسید.



در این نمودار هم تغییر شیب داریم و هم پرش. بنابراین خواهیم داشت:

$$f(t) = u(t) - r(t) - 2r(t-2) - u(t-2) + 2u(t-4) - r(t-5) - 3u(t-5)$$

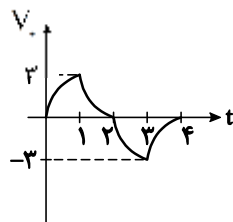
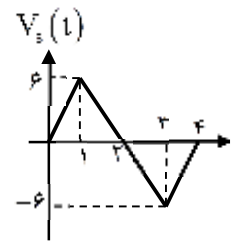
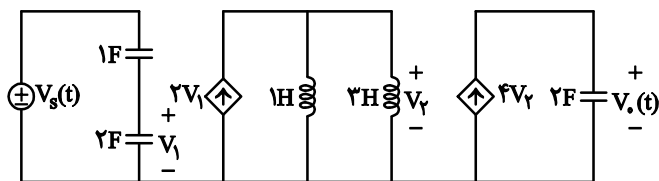
مثلاً در نقطه $t = +2$ ، هم شیب از -1 به $+1$ رسیده است (تغییر شیب برابر $+2$ واحد است) و هم یک پله رو به پایین

داریم ولی در نقطه $t = +4$ ، فقط دو پله رو به بالا رفته‌ایم و شیب تغییری نکرده است (شیب $+1$ بوده است و همان

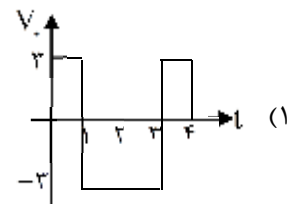
$+1$ باقی مانده است).

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مبانی مدارهای الکتریکی

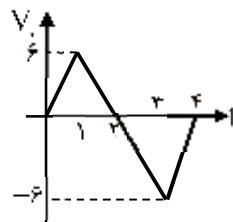
۱- شکل موج $V_s(t)$ مدار شکل مقابل به صورت زیر داده شده است. شکل موج ولتاژ خروجی $V_o(t)$ کدام است؟ (شرایط اولیه صفر)



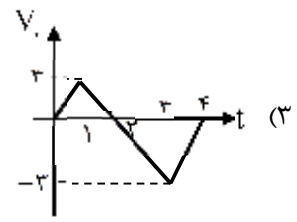
(۲)



(۱)

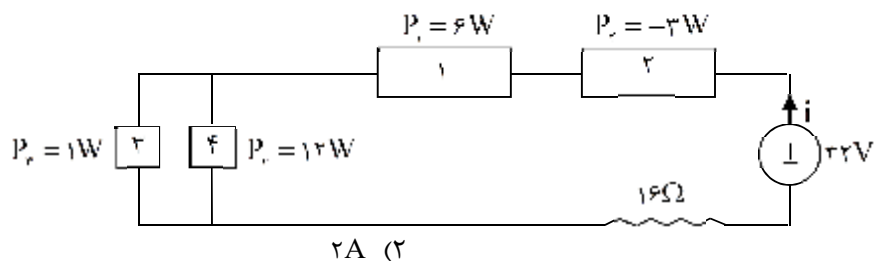


(۴)



(۳)

۲- در مدار مقاومتی شکل زیر توان هر یک از عناصر داده شده است. جریان i چقدر است؟



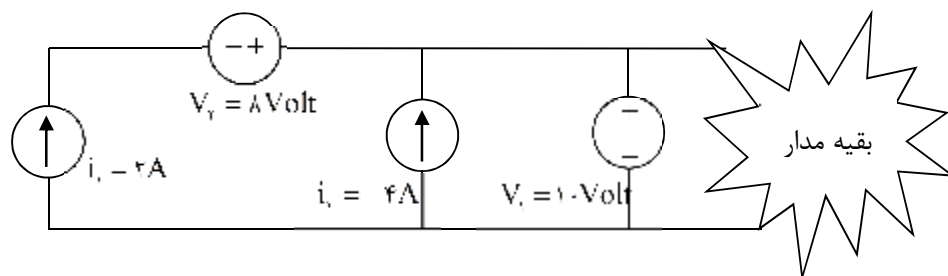
۲A (۲)

۱A (۱)

$\frac{1}{4}$ A (۴)

$\frac{1}{2}$ A (۳)

۳- کدام یک از چهار منبع در شکل زیر، توان جذب می کنند؟



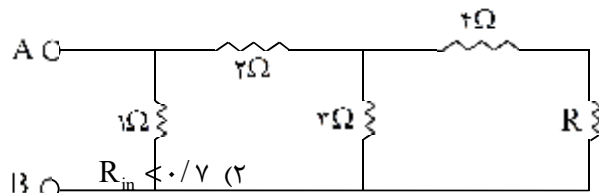
i_y (۲)

i_x (۱)

V_y (۴)

V_x (۳)

۴- در مورد مقاومت دیده شده R_{in} در دو سر A و B مدار شکل زیر، کدام رابطه همواره برقرار است؟



$R_{in} < 0.65$ (۱)

$R_{in} < 0.85$ (۴)

$R_{in} < 0.75$ (۳)

۵- مشخصه $V-i$ یک مقاومت به صورت زیر است:

$$V = 2i + e^{-t}i - \frac{1}{2}V \cos 2t$$

این مقاومت کدام ویژگی را دارا نیست؟

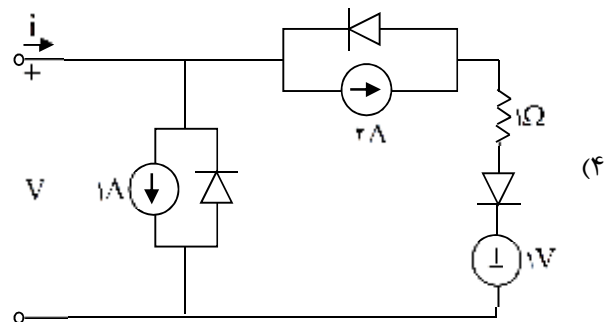
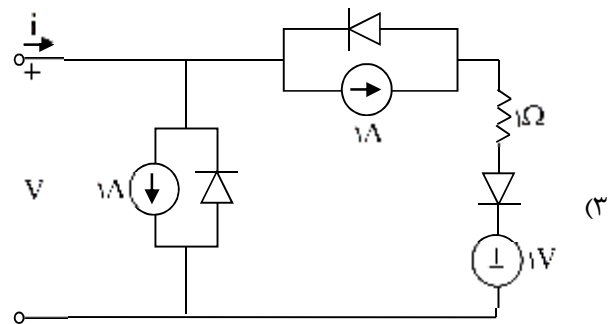
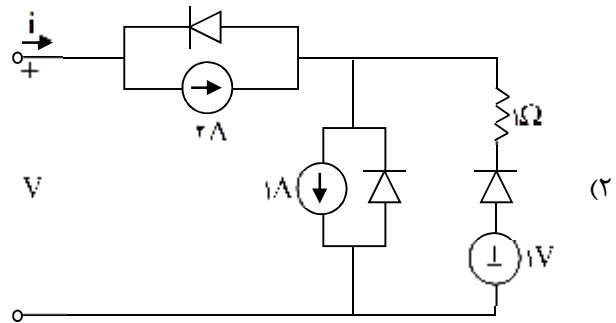
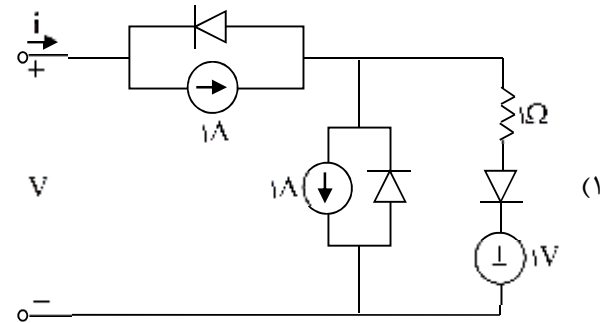
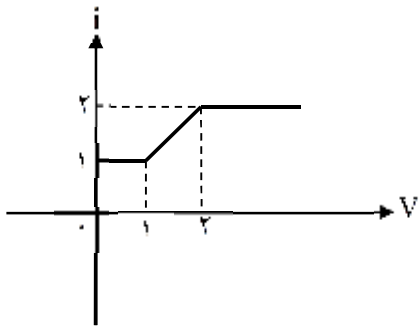
(۴) تغییرپذیر با زمان

(۳) دوطرفه

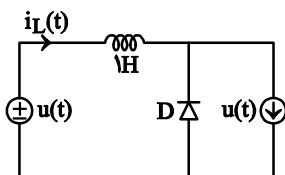
(۲) فعال

(۱) خطی

۶- مشخصه $V-i$ کدام یک قطبی، مطابق شکل زیر است؟ (دیودها ایده آل هستند).



۷- مدار شکل زیر در حالت صفر بوده و دیود D ایده آل فرض می شود. شکل موج جریان $i_L(t)$ کدام است؟



(۲) $r(t) + r(t-1)$

(۱) $r(t) - r(t-1)$

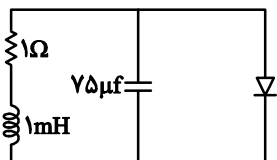
(۴) $u(t-1) + r(t)$

(۳) $r(t-1) - r(t)$

۸- در مدار شکل زیر مقاومت دیود تونلی باید برابر با $R = -\frac{40}{3}$ اهم باشد تا مدار به یک نوسان ساز تبدیل

شود. اگر معادله مشخصه دیود به صورت $i_D = 2/5 V^2 - 1/5 V^3 + 0.225 V$ باشد با فرض این که شرایط

سیگنال کوچک برقرار است، ولتاژ نقطه کار مدار (V_D) در حالت نوسان ساز برابر است با:



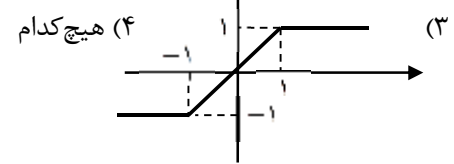
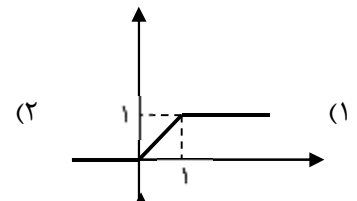
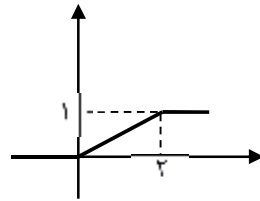
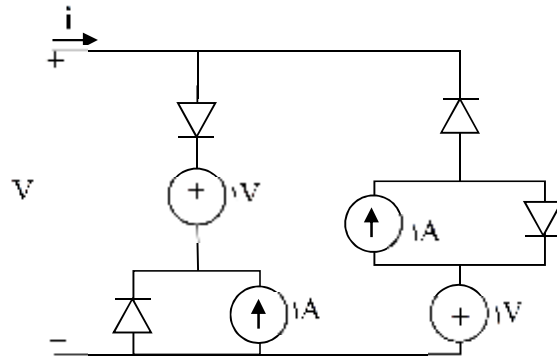
(۴) 0.2

(۳) 0.18

(۲) 0.15

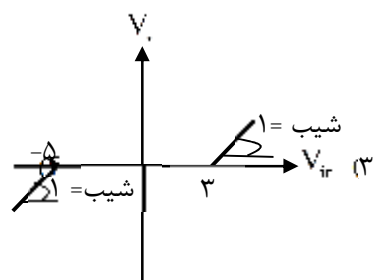
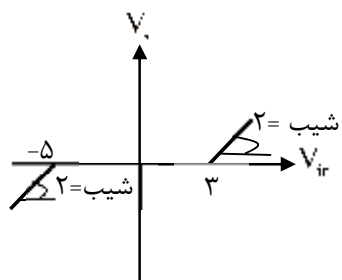
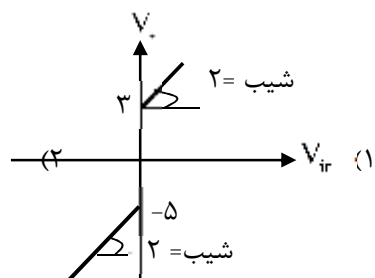
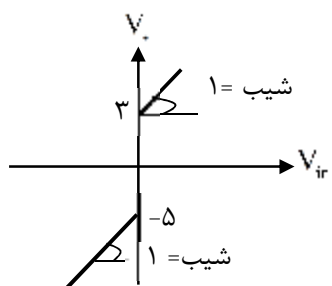
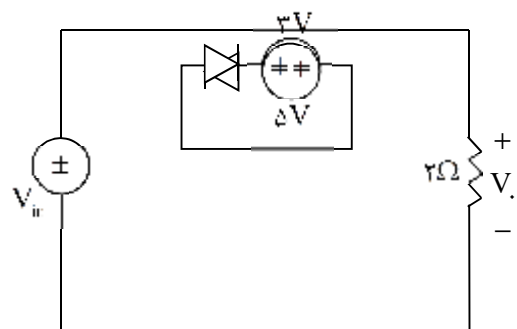
(۱) 0.25

۹- کدام یک از منحنی‌های زیر، منحنی مشخصه مدار مقابل است؟



(۴) هیچ کدام

۱۰- در مدار شکل زیر دیودها ایده آل فرض می‌شوند. مشخصه $V_o - V_{in}$ به چه صورت خواهد بود؟



پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

$$V_1 = \frac{1}{1+2} V_s = \frac{1}{3} V_s(t)$$

$$V_r = 3 \frac{di_{rH}}{dt} = 3 \frac{d\left(\frac{1}{1+3} 2V_1\right)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV_s}{dt}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \int i_{rF} dt = \frac{1}{3} \int 4V_r dt = \frac{1}{3} \int 4 \frac{1}{2} \frac{dV_s}{dt} dt = V_s \rightarrow V_1(t) = V_s(t)$$

یعنی شکل موج خروجی، همان شکل موج ورودی است.

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از قانون بقای توان می‌توان گفت:

$$\sum_{i=1}^6 P_i = 0 \rightarrow 6 - 3 + 1 + 12 + 16i^2 - 32i = 0 \rightarrow i^2 - 2i + 1 = 0 \rightarrow i = 1A$$

در این رابطه $16i^2$ توانی است که مقاومت 16 اهمی مصرف می‌کند و $32i$ توانی است که باتری تولید می‌کند.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

منبع جریان i_r با منبع ولتاژ V_1 موازی است، پس ولتاژ دو سر آن 10 ولت است. جریان i_r در جهت متناظر با ولتاژ آن $4A$ است در نتیجه:

$$P_r = V_1 i_r = 10 \cdot 4 = 40W$$

بنابراین منبع i_r توان جذب می‌کند.

۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

مقاومت دیده شده در سرهای A و B همواره بین دو حالت $R = 0$ و $R \rightarrow \infty$ قرار دارد. برای $R = 0$ داریم:

$$R_{in} = ((4 \parallel 3) + 2) \parallel 1 = \frac{26}{33} ; 0.7878$$

برای $R \rightarrow \infty$ می‌توان گفت:

$$R_{in} = (3 + 2) \parallel 1 = \frac{5}{6} ; 0.8333$$

بنابراین $0.7878 < R_{in} < 0.8333$ که فقط گزینه «۴» در این شرط صدق می‌کند.

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر معادله مشخصه مقاومت را برحسب V حل کنیم داریم:

$$V = \frac{2 + e^{-t}}{1 + \frac{1}{2} \cos 2t} i = Ri$$

دیده می شود که این معادله یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان و دو طرفه است. دو طرفه بودن یعنی اگر پلاریته ولتاژ دو سر آن را عوض کنیم، جهت جریان آن هم عکس می شود ولی مقدار جریان تغییر نمی کند.

برای فعال بودن مقاومت باید شیب خط $V - i$ منفی باشد، یعنی $\frac{2 + e^{-t}}{1 + \frac{1}{2} \cos t}$ منفی شود که هرگز این اتفاق نمی افتد.

در نتیجه این مقاومت، یک مقاومت پسیو است.

۶- گزینه ی «۳» صحیح است.

در گزینه ی «۱» برای جریان های مثبت، i نمی تواند از یک بزرگ تر باشد (در این حالت دیود بالایی قطع است) در حالی که با توجه به مشخصه داده شده، i می تواند تا ۲ آمپر باشد. در گزینه ی «۲» نیز i نمی تواند بزرگ تر از یک باشد، زیرا برای i مثبت فقط یک آمپر از جریان منبع ۲ آمپری می تواند عبور کند و یک آمپر دیگر از دیود موازی با منبع ۲ آمپری برمی گردد، پس در این حالت نیز i نمی تواند از یک آمپر بزرگ تر باشد.

در گزینه ی «۴» اگر i مثبت باشد، منبع جریان ۲ آمپری در دیود موازی با آن می چرخد و بنابراین i نمی تواند از یک بزرگ تر باشد.

در نتیجه گزینه ی «۳» فقط می تواند درست باشد.

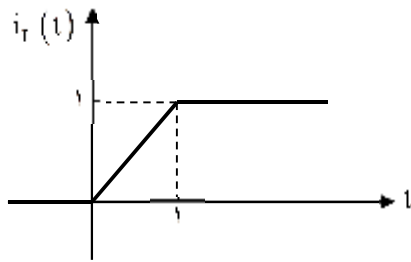
۷- گزینه ی «۱» صحیح است.

به دلیل این که جریان اولیه سلف صفر است، در $t = 0^+$ جریان منبع جریان $u(t)$ از دیود می گذرد و دیود مانند اتصال کوتاه عمل می کند. جریان سلف به تدریج شروع به افزایش می کند به طوری که:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t) dt = \int_0^t u(t) dt = r(t)$$

یعنی جریان سلف به صورت شیب واحد افزایش می یابد.

در لحظه $t = 1s$ ، مقدار جریان سلف به یک می رسد که برابر جریان منبع جریان $u(t)$ است. در نتیجه دیگر از دیود جریانی نمی گذرد و همه جریان سلف از منبع جریان عبور می کند. به عبارت دیگر، جریان سلف در مقدار ثابت یک باقی می ماند و دیگر تغییر نمی کند. بنابراین شکل موج جریان گذرنده از سلف به صورت زیر است:



$$i_L(t) = r(t) - r(t-1)$$

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در نقطه کار، مقاومت دیود تونلی عکس شیب خط مماس بر مشخصه آن است. یعنی:

$$\frac{1}{R} = \frac{di_D}{dV} \Big|_{V_D} = 7/5 V_D^2 - 3V_D + 0/225 = -\frac{3}{40} \rightarrow$$

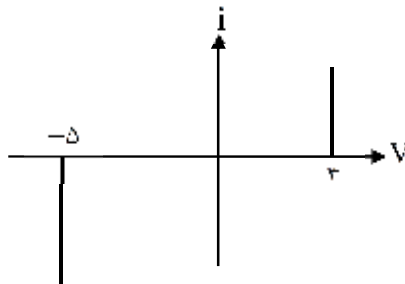
$$100V_D^2 - 40V_D + 4 = 0 \rightarrow (10V_D - 2)^2 = 0 \rightarrow V_D = 0/2 \text{ Volt}$$

۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

چون مدار فقط شامل دیود و منابع است، مشخصه آن نباید هیچ گونه شیبی داشته باشد زیرا خط مایل در اثر مقاومت خطی ایجاد می شود که مدار فاقد مقاومت است.

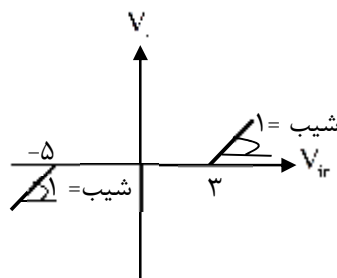
۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با سری کردن دیودها با منابع ولتاژ و سپس موازی شدن دو شاخه داریم:



و با سری شدن مجموعه فوق با مقاومت ۲ اهمی داریم:

$$V_s = 2i$$



فصل دوم: مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل

در این فصل به بررسی روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی می‌پردازیم. این مبحث مبنای تمام فصول بعدی است، پس با دقت به مطالعه و یادگیری این فصل بپردازید.

2-1- قوانین کیرشهف

مبنای درس مدارهای الکتریکی در دو قانون زیر خلاصه شده است:

2-1-1- قانون جریان (KCL)

جمع جبری جریان‌های خروجی از هر گره برابر صفر است.

براساس این قانون می‌توان گفت در هر گره یا سوپرگره یا کات ست (مسیر بسته‌ای در مدار الکتریکی که هر المان مداری را تنها یک‌بار قطع کند) داریم:

$$\sum I_{out} = 0$$

2-1-2- قانون ولتاژ (KVL)

جمع جبری ولتاژهای عناصر در هر مسیر بسته برابر صفر است.

پس با توجه به این قانون می‌توان گفت در هر مش یا سوپرمش یا حلقه داریم:

$$\sum V_i = 0$$

نکته: در یک مدار الکتریکی با توجه به قوانین کیرشهف می‌توان گفت:

۱ + تعداد گره - تعداد شاخه = تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه

۱ - تعداد گره = تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه

نکته: در KCL معمولاً جریان‌های وارد شونده به گره را منفی و جریان‌های خارج شونده از گره را مثبت در نظر

می‌گیریم. همچنین در KVL در مسیری که حلقه را دور می‌زنیم، اگر ابتدا به سر مثبت منبع ولتاژ برسیم، آن را مثبت در

نظر می‌گیریم و در غیر این صورت آن را منفی فرض می‌کنیم. در این حالت افت ولتاژ روی مقاومت‌ها را به‌صورت مثبت

در نظر می‌گیریم.

2-2- روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی

برای تحلیل مدارهای مقاومتی از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

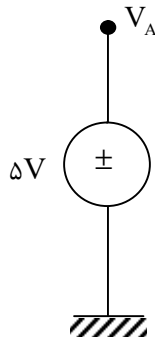
۲-۱- روش تجزیه و تحلیل گره

هدف از تجزیه و تحلیل گره، پیدا کردن ولتاژ گره‌ها (به جزء گره مبنا یا زمین که در آن $V=0$) می‌باشد. برای این

منظور KCL را در همه گره‌ها (به جزء گره زمین و گره‌های با ولتاژ معلوم) می‌نویسیم.

منظور از گره با ولتاژ معلوم این است که مثلاً اگر ولتاژ یک سر منبع ولتاژی معلوم باشد، ولتاژ سر دیگرش نیز معلوم

است و KCL زدن در آن گره‌ها غیرضروری می‌باشد مثلاً در شکل زیر $V_A = 5\text{Volt}$ است.



نکته: KCL یک قانون است و همواره درست می‌باشد ولی هدف از KCL زدن در گره‌ها، یافتن ولتاژ آن گره‌ها است. پس

KCL زدن در گره‌های با ولتاژ معلوم کار بیهوده‌ای می‌باشد.

در تجزیه و تحلیل گره باید به نکات زیر توجه نمود:

۱- KCL را در حد امکان برحسب ولتاژ گره‌ها می‌نویسیم.

۲- اگر گره مبنا یا زمین مشخص نبود، آن را یک سر منبع ولتاژ در نظر می‌گیریم تا نوشتن KCL در سر دیگر آن

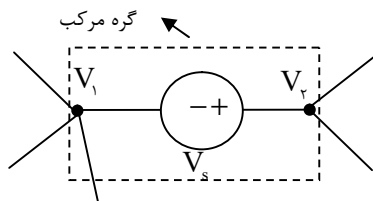
غیرضروری باشد و یک معادله از معادلات کاسته شود. همچنین می‌توان گره مبنا را گره‌ای در نظر بگیریم که تعداد

شاخه بیش‌تری به آن متصل شده است.

۳- اگر بین دو گره با ولتاژ مجهول، منبع ولتاژی قرار گرفته باشد، KCL را در گره مرکب یا سوپرگره می‌نویسیم تا یک

معادله از معادلات کم شود.

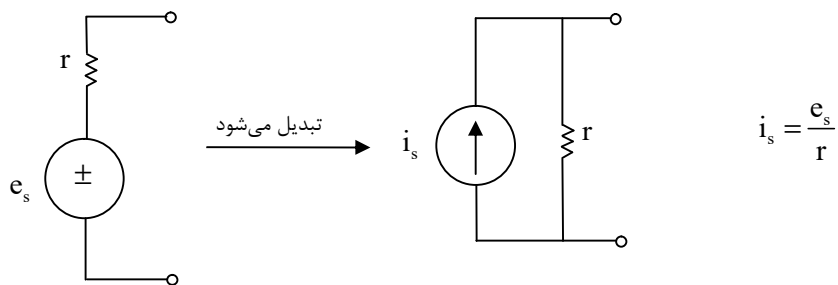
مثلاً در شکل زیر:



$$V_2 - V_1 = V_s$$

به کمک رابطه فوق، ولتاژ یکی از گره‌ها را برحسب دیگری می‌نویسیم و سپس کل نقطه‌چین نشان داده شده در شکل را به عنوان یک گره (گره مرکب) در نظر می‌گیریم و KCL را برای آن می‌نویسیم.

۴- مبنای روش تجزیه و تحلیل گره، KCL می‌باشد. پس کار کردن با منبع جریان در KCL راحت‌تر است. بنابراین از تبدیل زیر برای منابع ولتاژ دارای مقاومت سری استفاده می‌نماییم:



۵- در صورت امکان متغیرهای کنترلی (ولتاژها و جریان‌های وابسته) را برحسب متغیرهای مطلوب مسأله (ولتاژ گره‌ها) می‌نویسیم تا بی‌دلیل متغیر اضافی ایجاد نشود.

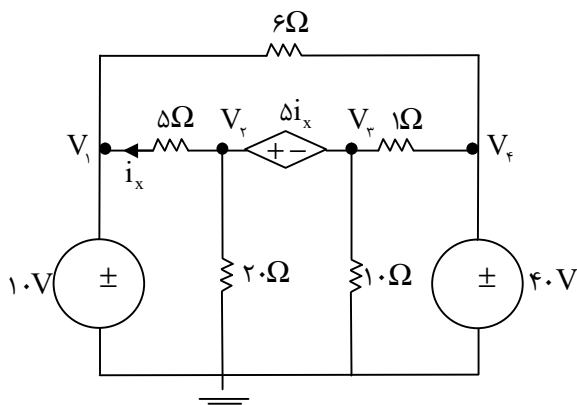
۶- روش تجزیه و تحلیل گره را می‌توان برای هر مداری به کار برد. در این صورت تعداد معادلات ایجاد شده برابر است با:

۱ - تعداد سوپر گره‌ها - تعداد گره‌ها = تعداد معادلات روش گره

۷- هنگام KCL زدن جریان‌های وارد شونده به گره را منفی و جریان‌های خارج شونده از گره را مثبت در نظر می‌گیریم.

اکنون به بررسی چند مثلاً می‌پردازیم:

مثال ۱: در مدار شکل زیر با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژهای V_1, V_2, V_3, V_4 را به دست آورید.



با انتخاب گره مبنا در سر منفی منابع ولتاژ ۱۰V و ۴۰V خواهیم داشت:

$$V_1 = 10V \text{ و } V_4 = 40V$$

برای حذف متغیر کنترلی i_x و بیان آن برحسب متغیرهای موردنظر مسأله (ولتاژ گره‌ها) داریم:

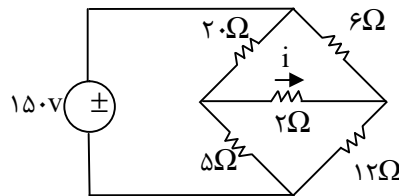
$$i_x = \frac{V_r - V_1}{5}$$

اکنون منبع ولتاژ $5i_x$ بین دو گروه ۲ و ۳ را به عنوان گره مرکب در نظر گرفته و می‌توان نوشت:

$$V_r - V_r = 5i_x = 5 \cdot \frac{V_r - V_1}{5} = V_r - V_1 \rightarrow V_r = V_1 = 10V$$

$$\text{KCL در گره مرکب: } \frac{V_r - 10}{5} + \frac{V_r - 0}{20} + \frac{10 - 0}{10} + \frac{10 - 40}{1} = 0 \rightarrow V_r = 124V$$

مثال ۲: در مدار شکل زیر جریان i را به دست آورید.



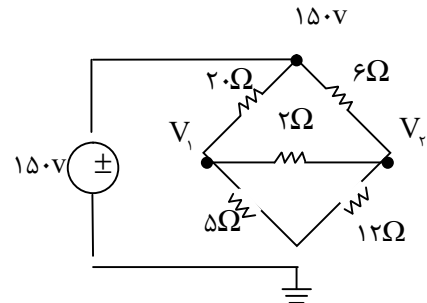
سر منفی منبع ولتاژ را به عنوان گره مبنا در نظر می‌گیریم، پس ولتاژ سر دیگر آن مشخص می‌شود و با KCL زدن در دو

گره مجهول دیگر داریم:

$$\text{KCL در گره ۱: } \frac{V_1 - 150}{20} + \frac{V_1 - V_r}{2} + \frac{V_1 - 0}{5} = 0$$

$$\text{KCL در گره ۲: } \frac{V_r - 150}{6} + \frac{V_r - V_1}{2} + \frac{V_r - 0}{12} = 0$$

$$\rightarrow V_r = 72V \text{ و } V_1 = 58V \Rightarrow i = \frac{V_1 - V_r}{2} = \frac{58 - 72}{2} \rightarrow i = -7A$$



۲-۲-۲ روش تجزیه و تحلیل مش

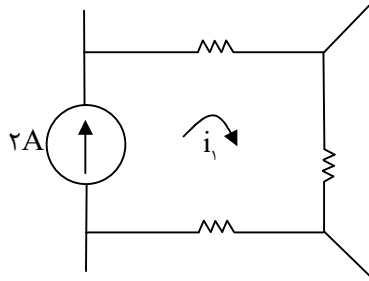
هدف از تجزیه و تحلیل مش، پیدا کردن جریان مش‌ها می‌باشد. برای این منظور KVL را در همهٔ مش‌ها (به جزء مش

بیرونی و مش‌های با جریان معلوم) می‌نویسیم.

منظور از مش با جریان معلوم این است که اگر در یک مش، منبع جریان مستقل وجود داشته باشد، جریان آن مش

معلوم می‌باشد.

مثلاً در شکل زیر $i_1 = 2A$ می‌باشد.



نکته: KVL یک قانون است و همواره درست می‌باشد ولی هدف از KVL زدن در مش‌ها، یافتن جریان آن مش‌ها است.

پس KVL زدن در مش‌های با جریان معلوم کار بیهوده‌ای می‌باشد.

در تجزیه و تحلیل مش باید به نکات زیر توجه نمود:

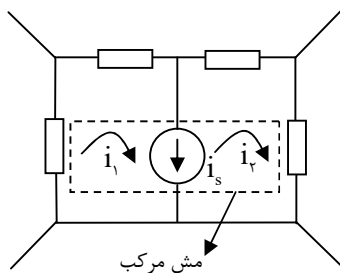
۱- KVL را در حد امکان برحسب جریان مش‌ها می‌نویسیم.

۲- متغیرهای جریان را به هر یک از مش‌های مدار در جهت ساعتگرد نسبت می‌دهیم. به این ترتیب، جریان شاخه‌ای که فقط در یک مش قرار دارد، برابر با جریان همان مش است و جریان شاخه‌ای که بین دو مش مشترک قرار دارد، برابر تفاضل جریان آن دو مش است.

۳- اگر منبع جریانی در یک مش بیرونی قرار داشته باشد، جریان آن مش معلوم و برابر منبع جریان می‌باشد.

۴- اگر بین دو مش با جریان مجهول، منبع جریانی قرار گرفته باشد، KVL را در مش مرکب یا سوپر مش می‌نویسیم تا یک معادله از معادلات کم شود.

مثلاً در شکل زیر:



$$i_1 - i_2 = i_s$$

به کمک رابطه فوق، جریان یکی از مش‌ها را برحسب دیگری می‌نویسیم و سپس کل نقطه‌چین نشان داده شده در شکل را به عنوان یک مش (مش مرکب) در نظر می‌گیریم و KVL را برای آن می‌نویسیم.

۵- در صورت امکان متغیرهای کنترلی (ولتاژها و جریان‌های وابسته) را برحسب متغیرهای مطلوب مسأله (جریان مش‌ها) می‌نویسیم تا بی‌دلیل متغیر اضافی ایجاد نشود.

۶- روش تجزیه و تحلیل مش را فقط می‌توان برای مدارات صفحه‌ای (مدارهایی که شکل آن‌ها در یک صفحه قابل رسم

باشد البته بدون عبور کردن دو شاخه از روی همدیگر) به کار برد. در این صورت تعداد معادلات ایجاد شده برابر است با:

تعداد مش‌های مرکب - تعداد مش‌ها = تعداد معادلات روش مش

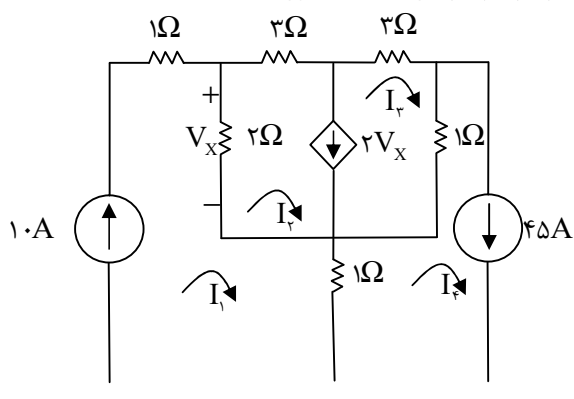
۷- هنگام KVL زدن با حرکت در مش در جهت جریان آن، اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شویم، مقدار آن را $+e_s$ قرار

می‌دهیم و اگر از سر منفی منبع ولتاژ وارد شویم، $-e_s$ قرار می‌دهیم. در مورد مقاومت‌ها، اگر هنگام حرکت، هم جهت

جریان بودیم، مقدار $+RI$ را در نظر می‌گیریم و اگر در خلاف جهت جریان بودیم، $-RI$ قرار می‌دهیم.

اکنون به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۳: در مدار شکل زیر با استفاده از تحلیل مش، جریان‌های I_1, I_2, I_3, I_4 را به دست آورید.



با توجه به جریان مش‌های بیرون می‌توان گفت:

$$I_1 = 10A \text{ و } I_4 = 45A$$

با KVL زدن در مش مرکب ۲ و ۳ و برای منبع جریان وابسته $2V_x$ داریم:

$$I_3 - I_2 = 2V_x \rightarrow I_3 - I_2 = 2(20 - 2I_2) \rightarrow I_3 = 5I_2 - 40$$

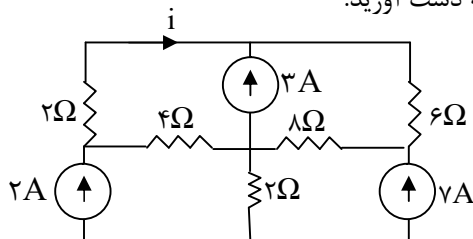
$$V_x = 2(I_1 - I_2)$$

$$\text{KVL در مش مرکب: } 3I_3 + 3I_2 + 1(I_3 - I_2) + 2(I_2 - I_1) = 0$$

$$\rightarrow 3I_2 + 3(5I_2 - 40) + (5I_2 - 40 - 45) + 2(I_2 - 10) = 0 \rightarrow I_2 = 9A$$

$$\text{و } I_3 = 5A$$

مثال ۴: در مدار شکل زیر جریان i را به دست آورید.

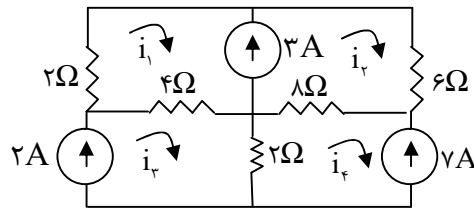


با استفاده از روش مش داریم:

$$i_r = 2A \text{ و } i_r = -7A$$

$$i_r - i_l = 3A \rightarrow i_r = i_l + 3$$

$$\text{KVL در مش مرکب: } 2i_l + 6(i_l + 3) + 8(i_l + 3 + 7) + 4(i_l - 2) = 0 \rightarrow i_l = -\frac{9}{8}A$$



۲-۳-۲ روش تجزیه و تحلیل هوشمندانه (روش ابتکاری) اول

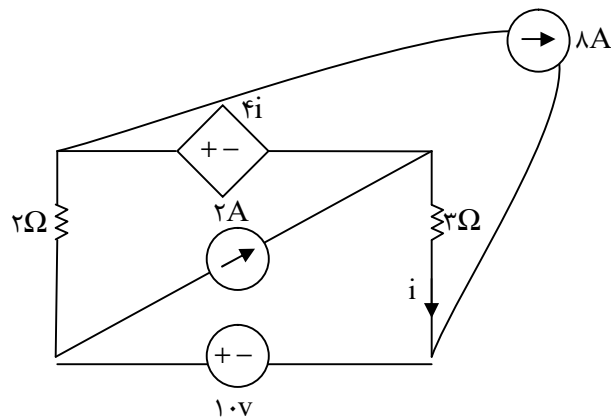
در این روش ابتدا جریان کلیه شاخه‌های مدار را با KCL به دست می‌آوریم و سپس با KVL زدن در یک حلقه مناسب، معادلات لازم برای تحلیل مدار را می‌نویسیم.

باید به این نکته توجه نمود که حلقه مناسب حلقه‌ای است که با KVL زدن در آن، جریان مجهول معلوم شود، یعنی دارای کم‌ترین جریان مجهول باشد.

همچنین حلقه مناسب حلقه‌ای است که تا حد امکان منبع جریان در آن وجود نداشته باشد.

برای درک بهتر این روش، مثال زیر را دنبال کنید.

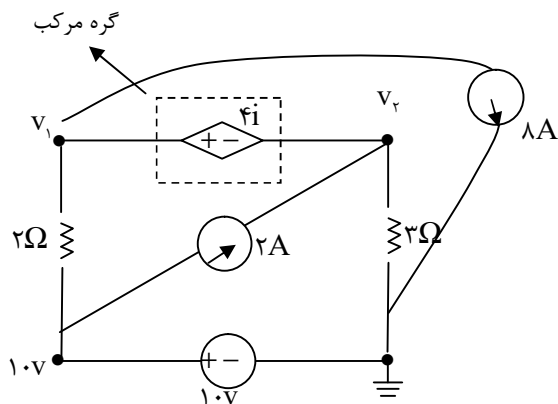
مثال ۵: در مدار شکل زیر جریان i را به دست آورید.



* راه حل اول: روش گره

با انتخاب گره مبنا در سمت راست منبع ولتاژ $10V$ ، ولتاژ سمت چپ آن برابر $10V$ شده و دو گره با ولتاژ مجهول داریم

که بین آن‌ها منبع ولتاژ قرار دارد.



بنابراین خواهیم داشت:

$$V_1 - V_r = \epsilon i$$

$$i = \frac{V_r - 0}{3} = \frac{V_r}{3} \rightarrow V_1 - V_r = \frac{4}{3} V_r \rightarrow V_1 = \frac{7}{3} V_r$$

و با KCL زدن در گره مرکب داریم:

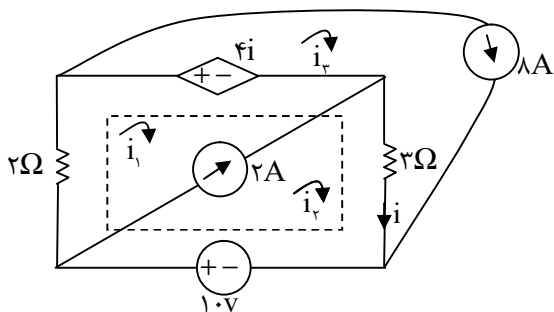
$$\text{KCL در گره مرکب: } \frac{\frac{7}{3} V_r - 10}{2} + 8 + \frac{V_r}{3} - 2 = 0 \rightarrow V_r = -\frac{2}{3} V$$

و برای جریان i داریم:

$$i = \frac{V_r}{3} = -\frac{2}{9} A$$

* راه حل دوم: روش مش

با توجه به شکل زیر جریان i_r معلوم است و برای مش‌های ۱ و ۲ از KVL در مش مرکب استفاده می‌نماییم.



$$i_r = 8A$$

$$i_r - i_1 = 2A \rightarrow i_1 = i_r - 2$$

$$i = i_r - i_r = i_r - 8$$

$$\text{KVL در مش مرکب: } 2i_1 + 4i + 3i - 10 = 0 \rightarrow 2(i_r - 2) + 7(i_r - 8) - 10 = 0$$

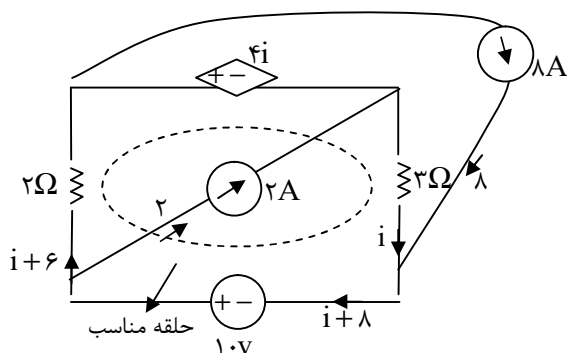
$$\rightarrow 9i_r = 70 \rightarrow i_r = \frac{70}{9} A$$

و برای جریان i داریم:

$$i = i_r - 8 = \frac{70}{9} - 8 = -\frac{2}{9} A$$

* راه حل سوم: روش هوشمندانه

ابتدا روی شکل مدار، با جریان‌های واقعی KCL می‌زنیم و سپس در یک حلقه مناسب KVL را می‌نویسیم.



$$\text{KVL در حلقه مناسب: } 4i + 3i - 10 + 2(i + 6) = 0$$

$$\rightarrow 9i + 2 = 0 \rightarrow i = -\frac{2}{9} A$$

ملاحظه می‌شود که این روش چقدر کار تحلیل مدار را ساده می‌کند.

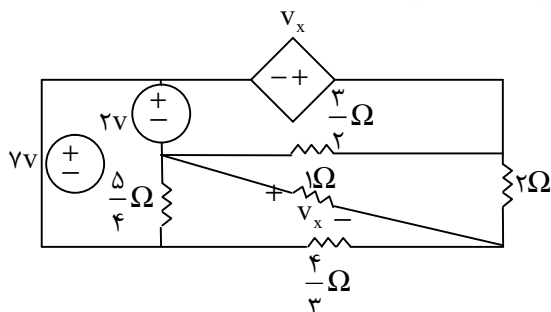
۲-۲-۴ روش تجزیه و تحلیل هوشمندانه (ابتکاری) دوم

در این روش ابتدا ولتاژ گره‌های مدار را روی شکل آن مشخص می‌کنیم و سپس با KCL زدن در یک گره مناسب (که

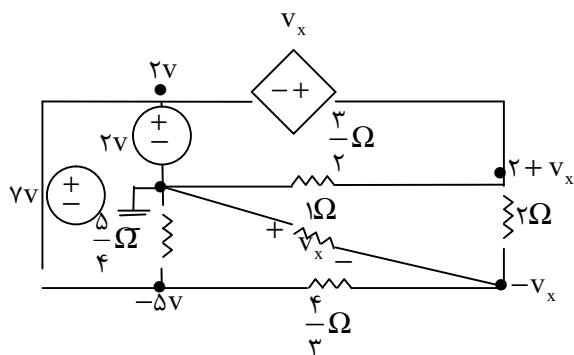
گاهی گره مرکب می‌باشد)، مجهولات مسأله را به دست می‌آوریم. (گره مناسب گره‌ای است که منبع ولتاژی به آن

متصل نباشد).

مثال ۶: در مدار شکل زیر مقدار V_x را به دست آورید.



با انتخاب گره مبدا در سر منفی منبع ولتاژ ۲۷ و مشخص کردن ولتاژ گره‌های مدار خواهیم داشت:



با KCL زدن در گره با ولتاژ $-V_x$ داریم:

$$\text{KCL: } \frac{-V_x - (-5)}{\frac{4}{3}} + \frac{-V_x}{1} + \frac{-V_x - (2 + V_x)}{2} = 0 \rightarrow V_x = 1 \text{ Volt}$$

* روش بهینه

در مدارهای با گره کم‌تر، روش گره و در مدارهای با مش کم‌تر، روش مش، روش بهینه است. ولی در اکثر مسائل می‌توان

از روش‌های تحلیل هوشمندانه استفاده نمود.

3-2- مدارهای متقارن

در تمام شبکه‌های مقاومتی که دارای شکل‌های هندسی منظم متقارن هستند و یا از جهت‌های متقارن تا بی‌نهایت

امتداد دارند، می‌توان از خواص تقارن استفاده کرد. توجه به تقارن در تحلیل مدار، کار را بسیار ساده می‌کند و از تعداد

مجهولات می‌کاهد. برای استفاده از تقارن در تحلیل مدار می‌توان از نکات زیر استفاده نمود:

۱- در یک مدار متقارن، وقتی جریان i در محور تقارن مدار به n شاخه یکسان می‌رسد، سهم هر شاخه برابر $\frac{i}{n}$

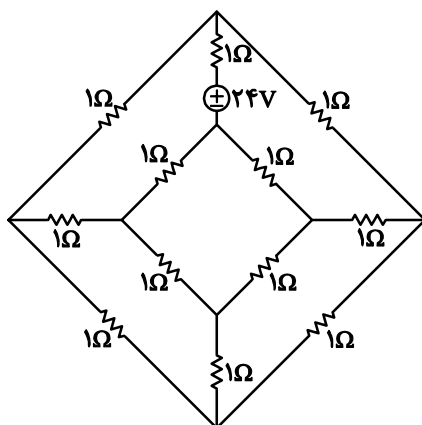
می‌شود.

۲- در هر مدار متقارن، می‌توان گره‌های هم پتانسیل را روی هم دیگر قرار داد. یعنی می‌توان مدار را روی محور تقارنش تا کرد.

۳- هنگام تا کردن مدار، عناصر روی محور تقارن ثابت باقی می‌مانند ولی سایر عناصر با جفت یکسان خود موازی می‌شوند، یعنی مقاومت‌ها و سلف‌ها نصف و خازن‌ها دو برابر می‌شوند. همچنین منابع جریان نیز دو برابر می‌شوند ولی منابع ولتاژ هیچ تغییری نمی‌کنند.

۴- گره‌های متقارن (نسبت به محور تقارن)، دارای ولتاژ یکسان می‌باشند. برای درک بهتر این موضوع چند مدار را با استفاده از خاصیت تقارن مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

مثال ۷: در مدار شکل زیر جریان‌های i_1 ، i_2 را به دست آورید.

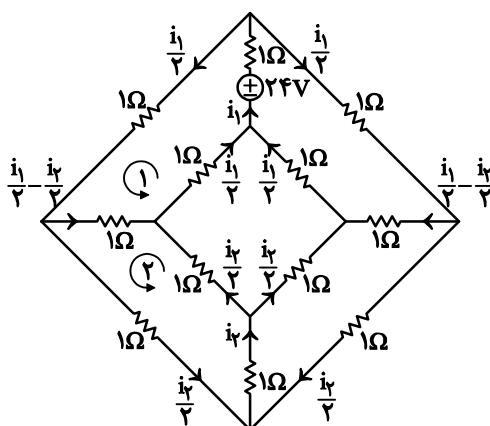


مدار نسبت به محور قائم وسطی متقارن است، پس جریان i_1 به دو جریان مساوی $\frac{i_1}{2}$ تقسیم می‌شود. همچنین در

پایین مدار دو جریان $\frac{i_2}{2}$ خواهیم داشت. پس در دو مش سمت راست یا سمت چپی، دو جریان i_1 و i_2 مجهول بوده که

با KVL به دست می‌آیند.



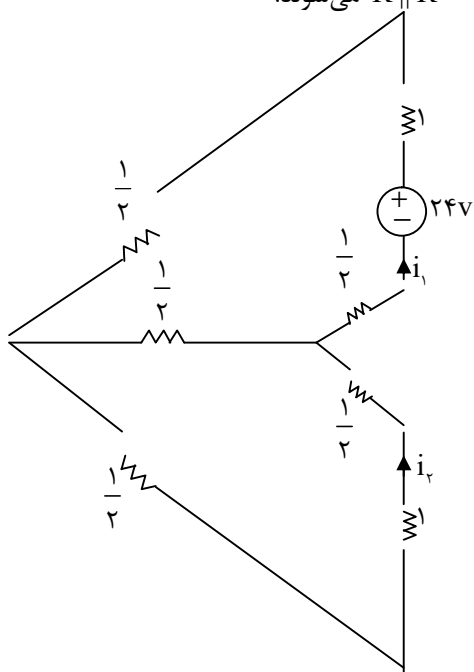


و داریم:

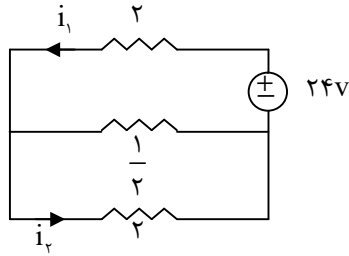
$$\begin{cases} \text{KVL}(1): i_1 + \frac{i_1}{2} + \frac{i_1}{2} - \frac{i_2}{2} + \frac{i_1}{2} = 24 \\ \text{KVL}(2): i_2 + \frac{i_2}{2} + \frac{i_2}{2} - \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = 10 \text{ A} \\ i_2 = 2 \text{ A} \end{cases}$$

همچنین می‌توان گفت چون مدار متقارن است، می‌توان آن را از روی محور تقارنش تا کرد و روی نیمه دیگر قرار دهیم.

واضح است که مقاومت‌های R متناظر که روی هم قرار می‌گیرند، برابر $R = \frac{R}{2} \parallel R$ می‌شوند.



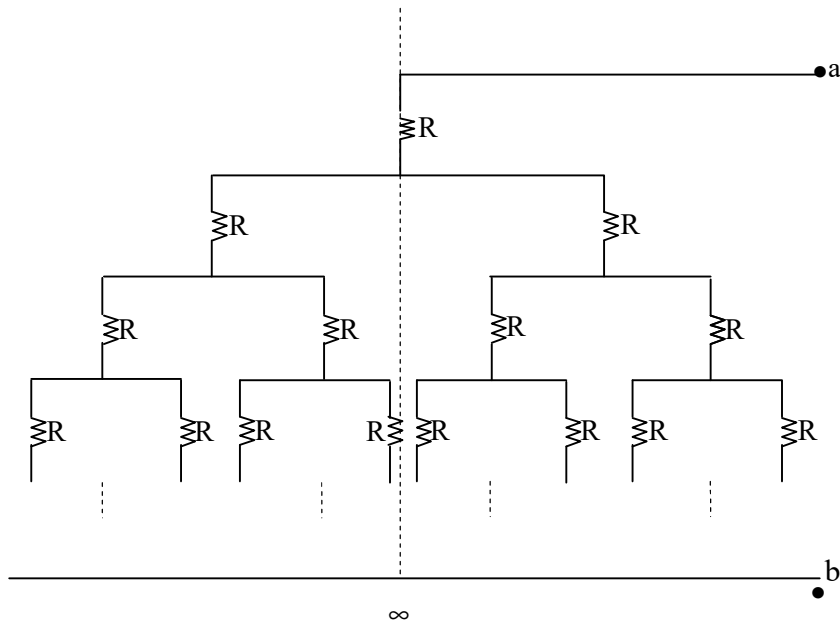
و باز می‌توان مدار را ساده‌تر کرد به‌طوری که:



$$i_1 = \frac{24}{2 + \left(2 \parallel \frac{1}{2}\right)} = 10 \text{ A}$$

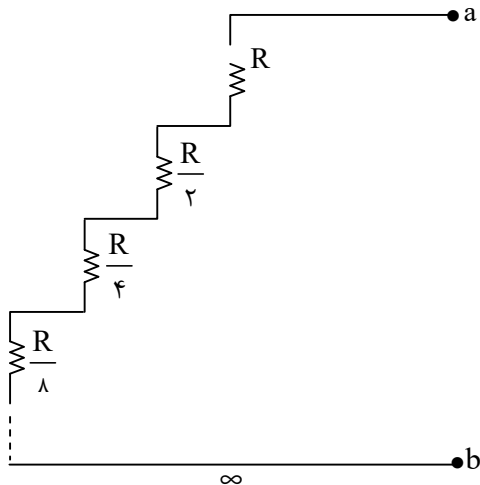
$$i_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} \quad i_1 = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

مثال ۸: در مدار شکل زیر مقاومت معادل از دو سر a, b چقدر است؟



اگر مدار را روی محور وسطی (محور تقارنش) تا کنیم، باز یک مدار متقارن به‌وجود می‌آید و همین‌طور تا بی‌نهایت این

کار را تکرار می‌کنیم تا در نهایت به مدار شکل زیر برسیم:

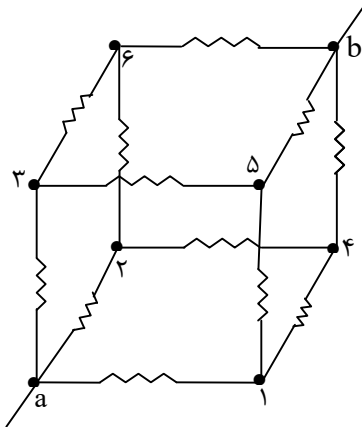


$$R_{ab} = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \dots$$

$$= R \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$$

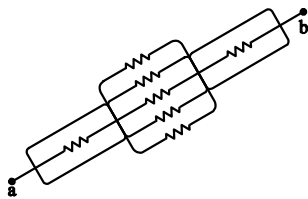
$$= R \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2R$$

مثال ۹: اگر همهٔ مقاومت‌ها برابر R باشد، مقاومت معادل دو سر a و b را پیدا کنید.



با توجه به شکل می‌توان گفت گره‌های ۱ و ۲ و ۳ با یکدیگر و گره‌های ۴ و ۵ و ۶ نیز با یکدیگر هم پتانسیل می‌باشند.

پس آن‌ها را روی هم قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:



$$R_{ab} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$$

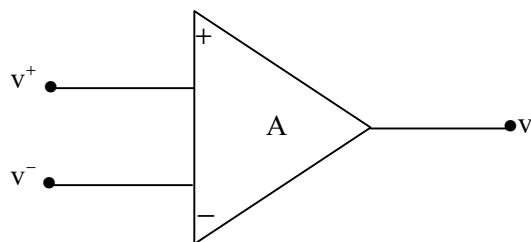
2-4- آپ امپ

تقویت کننده عملیاتی یا آپ امپ عنصری سه سر است که تفاضل ورودی را A برابر می‌کند و در خروجی تحویل

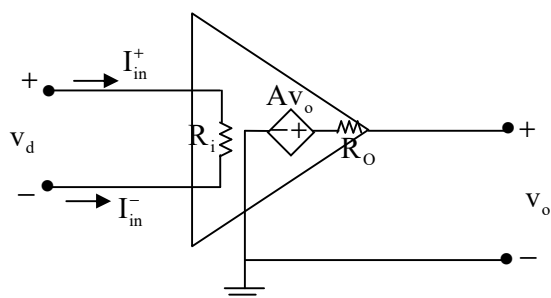
می‌دهد، یعنی:

$$V_o = AV_d = A(V^+ - V^-)$$

که A بهره تقویت کننده است.



مدار داخلی آپ امپ به صورت زیر است:



در حالت ایده‌آل، $A \rightarrow \infty$ را خیلی بزرگ در نظر می‌گیریم، پس می‌توان گفت:

$$V_d = 0 \rightarrow V^+ = V^-$$

یعنی ولتاژ سرهای ورودی آپ امپ برابر است، به عبارت دیگر یک اتصال کوتاه مجازی در دو سر ورودی داریم.

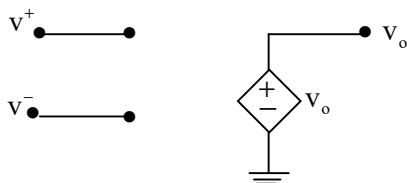
همچنین مقاومت ورودی یک آپ امپ ایده‌آل خیلی بزرگ است ($R_i \rightarrow \infty$)، پس جریان ورودی آپ امپ صفر است،

یعنی:

$$I_{in}^+ = I_{in}^- = 0$$

و مقاومت خروجی آن بسیار کوچک است. ($R_o \rightarrow 0$)

در نتیجه مدار معادل آپ امپ ایده‌آل به صورت زیر است:



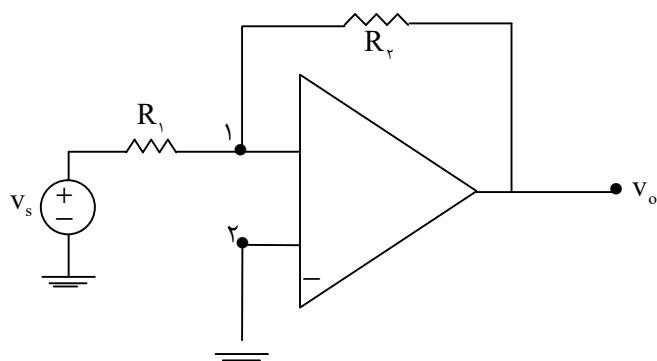
برای تحلیل مدارهای شامل آپ امپ:

۱- ولتاژهای ورودی را برابر و جریان‌های ورودی را صفر قرار می‌دهیم.

۲- در سرهای ورودی از KCL استفاده می‌کنیم.

۳- از KCL در خروجی استفاده نمی‌کنیم.

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، V_o را برحسب V_s به دست آورید. (آپ امپ ایده آل است).



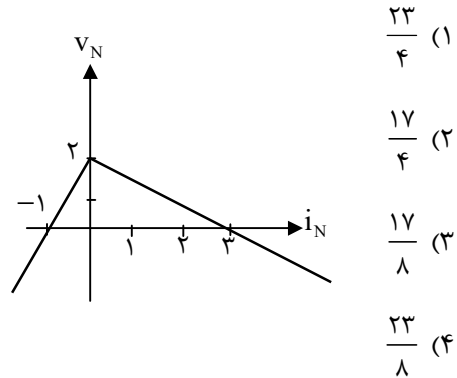
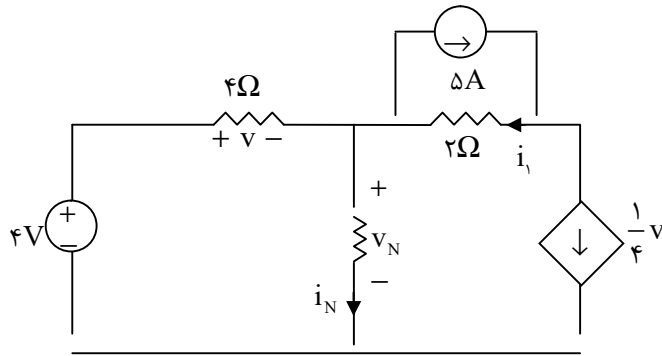
با توجه به ایده آل بودن آپ امپ و KCL زدن در گره ۱ داریم:

$$V^+ = V^- = 0$$

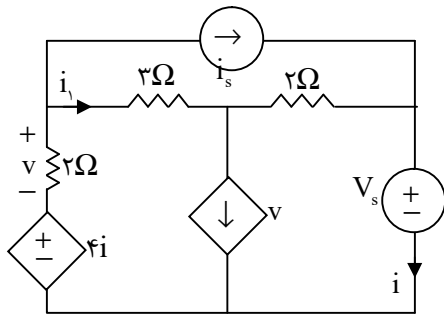
$$\text{KCL: } \frac{V_1 - V_s}{R_1} + \frac{V_1 - V_o}{R_f} = 0 \xrightarrow{V_1=0} V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_s$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای مقاومتی و روش‌های تحلیل

۱- در مدار شکل زیر اگر $i_N = \frac{2}{3} A$ باشد، i_1 چند آمپر است؟ (مدار دارای جواب یگانه است)

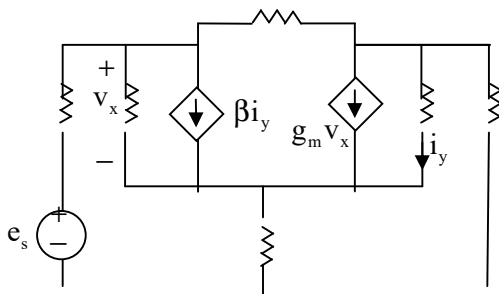


۲- اگر در مدار شکل زیر $i = 2i_1$ باشد، مقدار $\frac{V_s}{i_s}$ برابر است با:



- (۱) $-\frac{1}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۳- در مدار شکل زیر فرض کنید تمام مقاومت‌ها سه برابر شوند و مقدار β ثابت نگه داشته شود. مقدار g_m

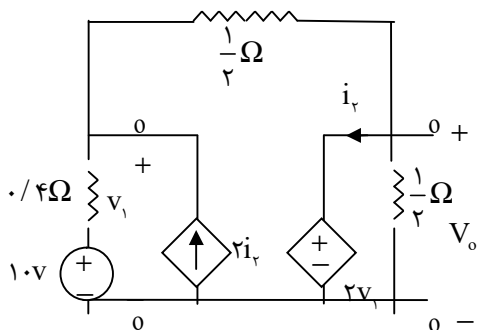


چگونه تغییر کند تا ولتاژ شاخه‌ها تغییر نکند؟

- (۱) g_m تغییر نکند.
- (۲) g_m در ۳ ضرب شود.
- (۳) g_m در $\frac{1}{3}$ ضرب شود.

(۴) بدون داشتن مقادیر مقاومت‌ها نمی‌توان اظهار نظر قاطع کرد.

۴- ولتاژ خروجی V_o در مدار شکل زیر کدام است؟



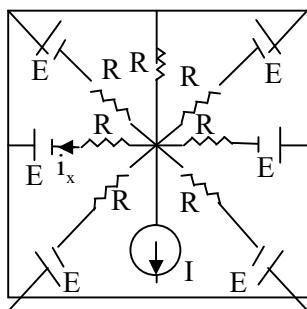
(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

۵- مقدار جریان i_x را به دست آورید. ($I = 2A, R = 7\Omega, E = 14V$)



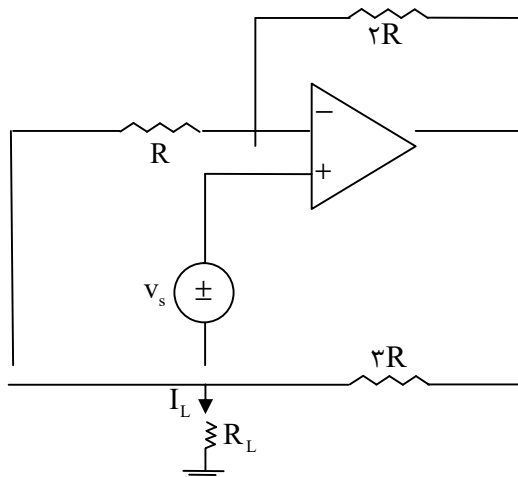
(۱) ۰

(۲) ۴A

(۳) ۲A

(۴) ۳/۴A

۶- آپ امپ ایده آل مدار شکل زیر در ناحیه خطی عمل می کند. جریان I_L گذرنده از مقاومت R_L کدام است؟



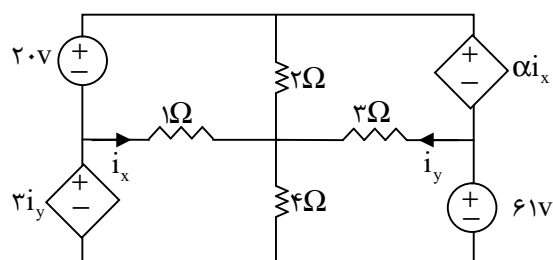
(۱) $\frac{V_s}{2R}$

(۲) $\frac{2V_s}{R}$

(۳) $\frac{V_s}{3R}$

(۴) $\frac{3V_s}{R}$

۷- به ازای چه مقدار α مدار شکل زیر دارای جواب یکتا است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

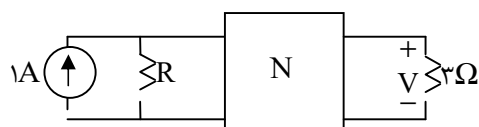
(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) تمام مقادیر α

۸- در مدار شکل زیر شبکه N متشکل از مقاوت‌های خطی مثبت است. کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند

ولتاژ v را نشان دهد؟ ($R \geq 0$)



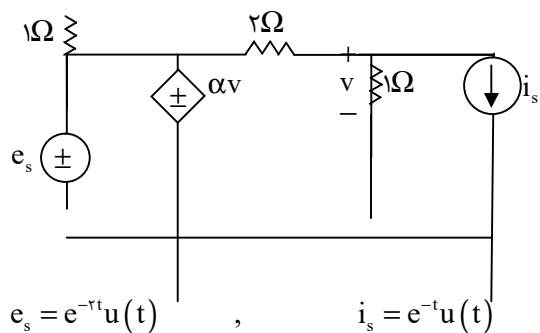
(۲) $\frac{2R+1}{R+1}$

(۱) $\frac{2R}{R+1}$

(۴) $\frac{4R+1}{3R+1}$

(۳) $\frac{7R}{2R+3}$

۹- در مدار شکل زیر α را چنان تعیین کنید که شدت جریان مقاومت ۲ اهمی $i_R = \frac{1}{4}e^{-t}u(t)$ باشد؟



(۱) -۳

(۲) -۱

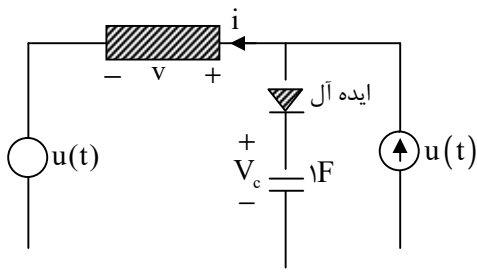
(۳) ۱

(۴) ۳

$e_s = e^{-t}u(t)$, $i_s = e^{-t}u(t)$

۱۰- اگر $V_c(\cdot) = 1$ و مشخصه مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان به صورت $V = ti$ باشد، ولتاژ $V_c(t)$ در

زمان‌های مثبت کدام است؟



(۱) $t+1$

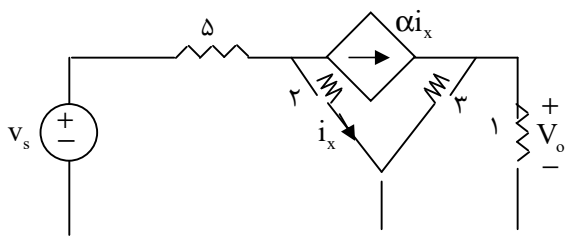
(۲) $\frac{1}{2}t+1$

(۳) t^2+t+1

(۴) $\frac{1}{2}t^2+t+1$

۱۱- در مدار شکل زیر مقاومت‌ها برحسب مهو داده شده‌اند. حداقل مقدار α که به ازای آن مدار برای

خروجی V_o مانند یک تقویت کننده عمل می‌کند چیست؟



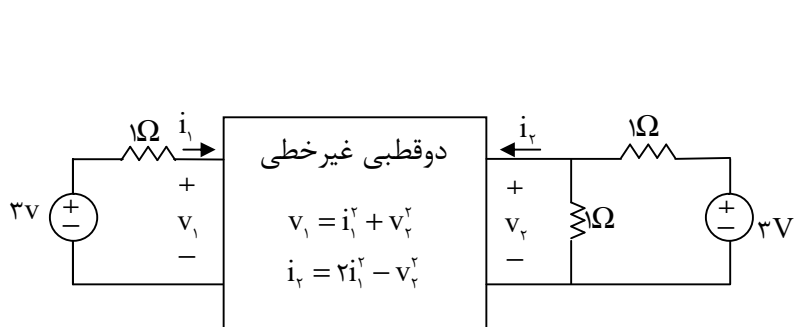
(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۴

(۴) به علت وجود منبع وابسته این مدار همواره به عنوان یک تقویت کننده عمل می‌کند.

۱۲- نقطه کار مدار شکل زیر برابر است با:



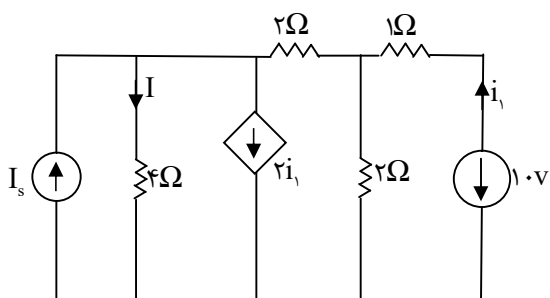
(۱) $\begin{cases} i_1 = -1 \\ V_r = 1 \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} i_1 = 1 \\ V_r = 1 \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} i_1 = 1 \\ V_r = -1 \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} i_1 = 2 \\ V_r = 1 \end{cases}$

۱۳- در مدار شکل زیر، مقدار منبع I_s (برحسب آمپر) در صورتی که $I = 0$ باشد، کدام است؟



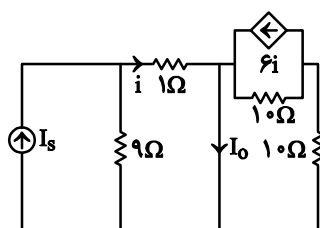
(۱) ۲/۵

(۲) ۷/۵

(۳) ۲۲/۵

(۴) ۲۷/۵

۱۴- در مدار شکل زیر نسبت $\frac{I_o}{I_s}$ برابر است با:

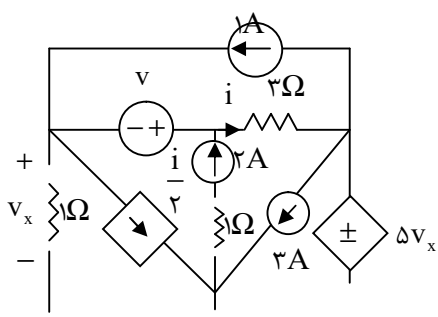


(۱) $0/9$ (۲-۱/۸)

(۳) ۲/۷

(۴) ۳/۶

۱۵- در مدار شکل زیر، مقدار V چقدر باشد تا $V_x = 0$ شود؟



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۱۲

(۴) ۱۸

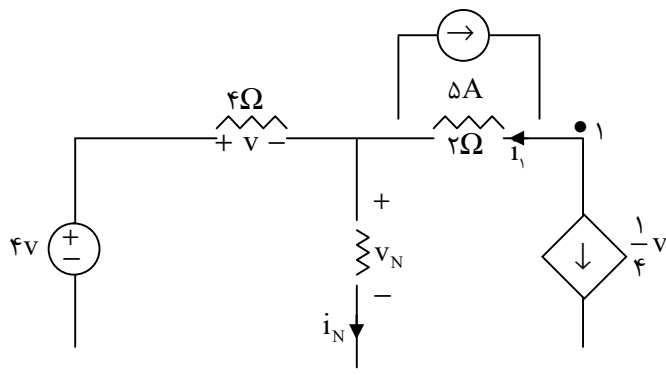
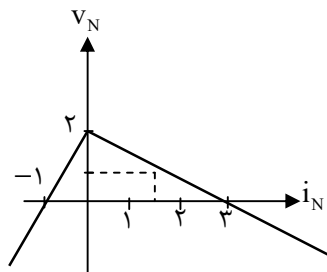
پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به مشخصه غیرخطی، اگر $i_N = \frac{3}{2} \text{ A}$ باشد برای V_N داریم:

$$i_N = \frac{3}{2} \text{ A} \rightarrow V_N = 10.1 \text{ V}$$

بنابراین با KVL در مش سمت چپ و KCL در گره ۱ داریم:

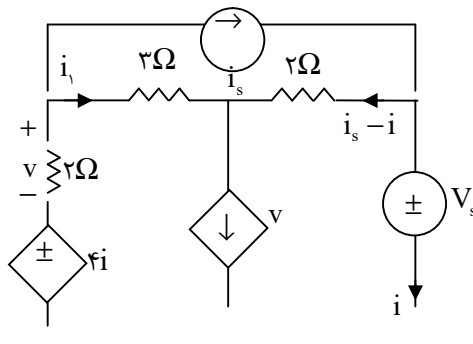


$$\text{KVL: } V_N + V - 4 = 0 \rightarrow V = 4 - 1 = 3 \text{ Volt}$$

$$\text{KCL: } i_1 + \frac{1}{4} V - 5 = 0 \rightarrow i_1 = 5 - \frac{V}{4} = 5 - \frac{3}{4} \rightarrow i_1 = \frac{17}{4} \text{ A}$$

۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با KCL زدن بر روی مدار و KVL در مش بیرونی داریم:



$$\text{KVL: } V_s = 2(i_s - i) - 3i_1 + V + 4i$$

با قرار دادن $i = 2i_1$ طبق فرض مسأله داریم:

$$V_s = 2i_s + V + i_1$$

و با KCL زدن در گره وسطی برای یافتن V خواهیم داشت:

$$\text{KCL: } V = i_1 + i_s - i = i_s - i_1$$

در نتیجه:

$$V_s = 2i_s + i_s - i_1 + i_1 = 3i_s \rightarrow \frac{V_s}{i_s} = 3$$

۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

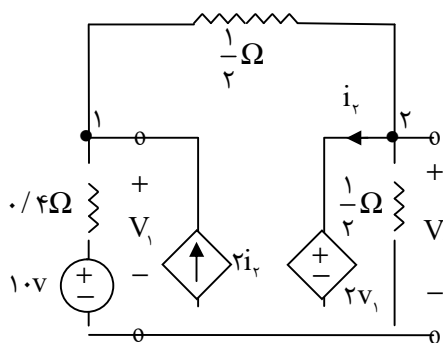
چون قرار است ولتاژ شاخه‌ها تغییر نکند و مقاومت‌ها سه برابر شود، پس جریان شاخه‌های مقاومتی $\frac{1}{3}$ می‌شود. حال اگر

در سر بالایی منبع جریان وابسته $g_m V_x$ ، KCL بزنیم، چون مقدار V_x نسبت به حالت اول تغییر نکرده است و جریان

سه شاخه دیگر $\frac{1}{3}$ برابر شده‌اند، پس g_m هم باید $\frac{1}{3}$ برابر شود تا معادله درست باشد.

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به شکل مدار می‌توان گفت $V_o = 2V_1$ و با اعمال KCL در گره‌های ۱ و ۲ داریم:



$$\text{KCL (1): } \frac{V_1 - 10}{4} - 2i_r + \frac{V_1 - 2V_1}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow i_r = \frac{1}{4} V_1 - \frac{25}{2}$$

$$\text{KCL (2): } \frac{2V_1}{\frac{1}{2}} + i_r + \frac{2V_1 - V_1}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow 6V_1 + i_r = 0 \rightarrow 6V_1 + \frac{1}{4} V_1 - \frac{25}{2} = 0 \rightarrow V_1 = 2 \text{ Volt}$$

بنابراین $V_o = 2V_1 = 4 \text{ Volt}$ است.

۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر ولتاژ نقطهٔ وسط را V در نظر بگیریم با اعمال KCL در این نقطه داریم:

$$\text{KCL: } 6\left(\frac{V+E}{R}\right) + \frac{V}{R} + I = 0 \rightarrow V = -\frac{RI + 6E}{7} = -\frac{(2 \text{ V}) + (6 \cdot 14)}{7} = -14V$$

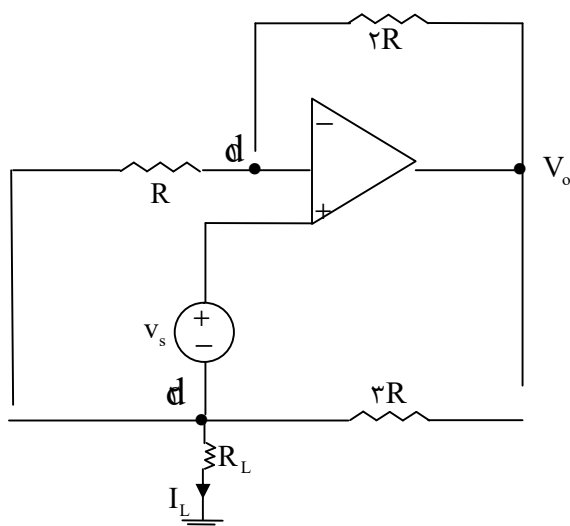
بنابراین برای i_x خواهیم داشت:

$$i_x = \frac{V+E}{R} = \frac{-14+14}{7} = 0 \rightarrow i_x = 0$$

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با اعمال KCL در گره‌های ۱ و ۲ داریم:

$$\begin{cases} V_r = V_L \\ V_+ = V_L + V_s \\ V_1 = V_- = V_+ = V_L + V_s \end{cases}$$



$$\text{KCL}(1): \frac{V_1 - V_r}{R} + \frac{V_1 - V_o}{2R} = 0 \rightarrow \frac{V_L + V_s - V_L}{R} + \frac{V_L + V_s - V_o}{2R} = 0 \rightarrow$$

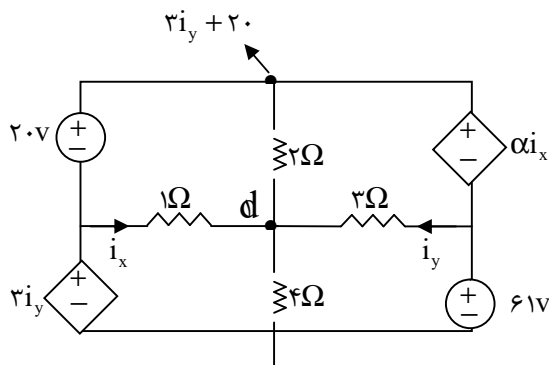
$$\frac{2V_s + V_L + V_s - V_o}{2R} = 0 \rightarrow V_o - V_L = 3V_s$$

$$\text{KCL}(2): I_L + \frac{V_r - V_1}{R} + \frac{V_r - V_o}{2R} = 0 \rightarrow I_L + \frac{V_L - V_L - V_s}{R} + \frac{V_L - V_o}{2R} = 0$$

$$\rightarrow I_L = \frac{V_o - V_L + 2V_s}{2R} = \frac{3V_s + 2V_s}{2R} = \frac{5V_s}{2R}$$

۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با KCL زدن در گره وسط (گره ۱) داریم:



$$V_1 = 3i_y - i_x = 61 - 3i_y$$

$$\text{KCL}(1): -i_x - i_y + \frac{3i_y - i_x}{4} + \frac{3i_y - i_x - (3i_y + 20)}{2} = 0$$

با حل این دو معادله $i_x = -7$ و $i_y = 9$ به دست می‌آیند.

با اعمال KVL در مش بیرونی داریم:

$$3i_y + 20 - \alpha i_x - 61 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{(3 \cdot 9) + 20 - 61}{-7} = \frac{-14}{-7} \rightarrow \alpha = 2$$

۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

به ازای $R = 0$ ، منبع جریان ۱A اتصال کوتاه می‌شود و در نتیجه جریانی به مقاومت ۳ اهمی نمی‌رسد، پس $V = 0$

است. یعنی گزینه «۱» یا «۳» درست است.

اگر بخواهیم V ماکزیمم شود باید بیش‌ترین جریان به مقاومت ۳ اهمی برسد، یعنی R باید بی‌نهایت باشد تا جریانی

نکشد. در این صورت به ازای گزینه «۱»، $V = 2$ و به ازای گزینه «۳»، $V = 3/5$ است.

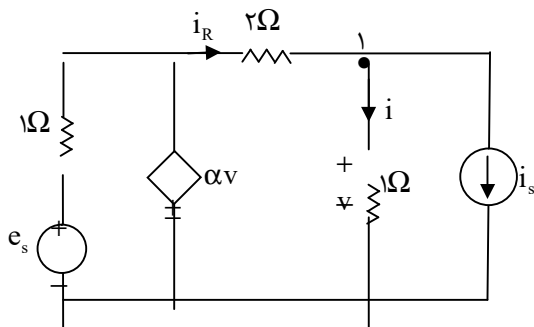
چون شبکه N مدار مقاومتی پیسو است، حداکثر جریان خروجی آن یک آمپر است و حداکثر V برابر

$V_{\max} = 1 \cdot 3 = 3V$ می‌باشد. پس گزینه «۳» نیز نادرست است و فقط گزینه «۱» می‌تواند مقدار ولتاژ V را نشان

دهد.

۹- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با نوشتن KCL در گره ۱ داریم:



$$\text{KCL: } i = i_R - i_s = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

$$V = 1 \quad i = -\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

و با اعمال KVL در مش وسطی داریم:

$$\text{KVL: } \alpha V = 2i_R + V \rightarrow (\alpha - 1)V = 2i_R \rightarrow (\alpha - 1)\left(-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)\right) = e^{-t}u(t)$$

$$\rightarrow \alpha - 1 = -2 \rightarrow \alpha = -1$$

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر فرض کنیم دیود مدار باز باشد، با KVL زدن در مش سمت چپ داریم:

$$V_d = ti + u(t) - V_C(\bullet)$$

که برای $t = \bullet^+$ داریم:

$$V_d(\bullet^+) = (t - 1) + 1 - 1 = t|_{t=\bullet^+} > 0$$

پس دیود نمی‌تواند مدار باز باشد. یعنی از ابتدا دیود اتصال کوتاه است و با KCL زدن در گره بالایی داریم:

$$\text{KCL: } \frac{V_C - u(t)}{t} + \frac{dV_C}{dt} = u(t) \rightarrow t \frac{dV_C}{dt} + V_C = tu(t) + u(t)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(tV_C(t)) = u(t)(t+1) \xrightarrow{\int} \int \frac{d}{dt}(tV_C(t)) dt = \int (t+1)u(t) dt$$

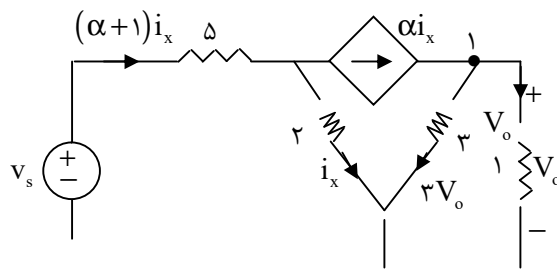
$$\rightarrow tV_C(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)u(t) \rightarrow V_C(t) = \left(\frac{t}{2} + 1\right)u(t)$$

بنابراین برای $t > 0$ داریم:

$$V_C(t) = \frac{1}{2}t + 1$$

۱۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای عملکرد به صورت تقویت کننده باید نسبت V_o به V_s بزرگ‌تر از یک باشد. $\left(\frac{V_o}{V_s} > 1\right)$ با KCL زدن و نوشتن



KVL در مدار داریم:

$$\text{KCL}(1): \alpha i_x = V_o + 3V_o = 4V_o \rightarrow V_o = \frac{\alpha}{4} i_x \rightarrow i_x = \frac{4}{\alpha} V_o$$

$$\text{KVL در مش سمت چپ}: V_s = \frac{(\alpha+1)i_x}{5} + \frac{i_x}{2} = \frac{4}{\alpha} V_o \left(\frac{\alpha+1}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha+1}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{5\alpha}{4\alpha+14} \geq 1 \rightarrow \alpha \geq 14$$

بنابراین حداقل مقدار α برابر ۱۴ است.

۱۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با نوشتن KVL در مش سمت چپ داریم:

$$\text{KVL}: 3 = i_1 + V_1 = i_1 + i_1^* + V_1^*$$

و با KCL زدن در گره سمت راست خواهیم داشت:

$$i_r + V_r + \frac{V_r - 3}{1} = 0 \rightarrow i_r = 3 - 2V_r = 2i_1^* - V_1^*$$

برای به دست آوردن نقطه کار باید معادلات فوق برحسب V_r و i_1 حل شوند:

$$\begin{cases} i_1 + i_1^* + V_1^* = 3 \\ 2i_1^* + 2V_r - V_1^* = 3 \end{cases}$$

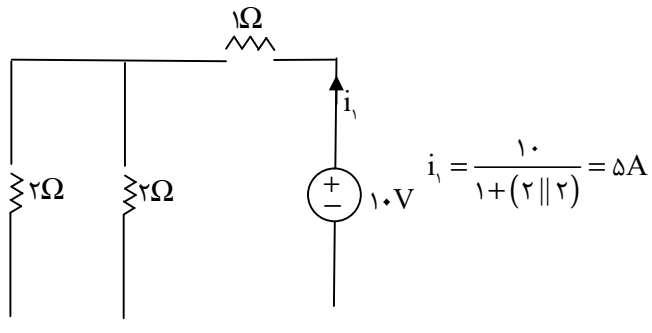
با توجه به غیرخطی بودن معادلات، گزینه‌ها را در این معادلات قرار می‌دهیم.

دیده می‌شود گزینه «۲» در معادلات فوق صدق می‌کند.

۱۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با در نظر گرفتن $I=0$ ، ولتاژ دو سر منبع جریان I_s برابر است با ولتاژ دو سر مقاومت ۴ اهمی، یعنی $I=0$. پس ولتاژ دو سر منبع جریان صفر است و شاخه مقاومت ۴ اهمی هم مدار باز ($I=0$) و هم اتصال کوتاه ($V=0$) است. در نتیجه با اتصال کوتاه شدن مقاومت ۴ اهمی، دو مقاومت ۲ اهمی موازی می‌شوند.

به عبارت دیگر:



و جریان هر کدام از مقاومت‌های ۲ اهمی برابر $i_2 = 2/5A$ است.

اکنون با KCL زدن در گره سمت چپ مدار اصلی داریم:

$$KCL: -I_s + I + 2i_1 - \frac{i_1}{2} = 0 \rightarrow I_s = I + \frac{3}{2}i_1 = 0 + \left(\frac{3}{2} \quad 5\right) \rightarrow I_s = 7/5A$$

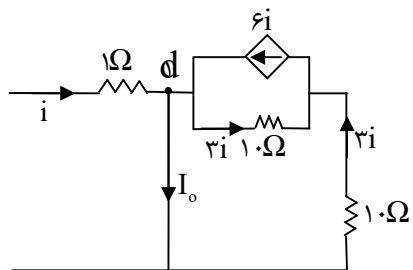
در این رابطه، $\frac{-i_1}{2}$ مربوط به جریان مقاومت ۲ اهمی است که به گره موردنظر وارد می‌شود.

۱۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

چون شاخه‌ای که جریان I_o از آن می‌گذرد اتصال کوتاه است، پس مقاومت‌های یک اهمی و ۹ اهمی موازی هستند و جریان I_s بین آن‌ها تقسیم می‌شود:

$$i = \frac{9}{9+1} I_s \rightarrow i = \frac{9}{10} I_s$$

از طرفی مقاومت‌های ۱۰ اهمی نیز موازی‌اند و جریان گذرنده از هر کدام $3i$ است. پس با KCL زدن در گره ۱ داریم:



$$\text{KCL} : i + 6i = I_o + 3i \rightarrow I_o = 3i = \frac{36}{10} I_s \rightarrow \frac{I_o}{I_s} = 3/6$$

۱۵- گزینه ی «۲» صحیح است.

با KCL و KVL زدن داریم:

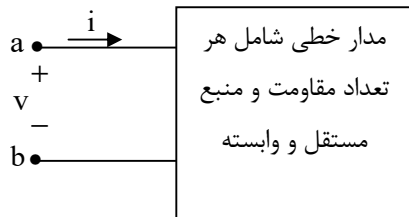
$$\text{KCL} : -1 + \frac{V_x}{1} + \frac{i}{2} + i - 2 = 0 \xrightarrow{V_x=0} i = 2A$$

$$\text{KVL} : -V + 3i + 5V_x - V_x = 0 \rightarrow V = 3i = 6 \text{ Volt}$$

فصل سوم: مدارهای معادل

می‌توان هر شبکه خطی شامل هر تعداد مقاومت و منبع مستقل و وابسته را با یک شبکه شامل فقط یک مقاومت و یک منبع ولتاژ یا منبع جریان مدل‌سازی نمود. این مدل‌سازی تجزیه و تحلیل مدار را بسیار ساده و آسان می‌کند.

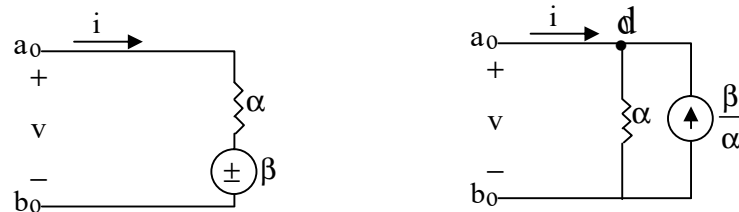
برای درک بهتر این موضوع، فرض کنید درون شبکه زیر یک مدار خطی شامل مقاومت‌ها و منابع وابسته و مستقل وجود دارد.



با توجه به خطی بودن مدار می‌توان گفت رابطه ولتاژ و جریان در این شبکه به صورت زیر است:

$$V = \alpha i + \beta$$

با در نظر گرفتن رابطه فوق می‌توان مدارهای زیر را برای شبکه فوق مدل‌سازی نمود:

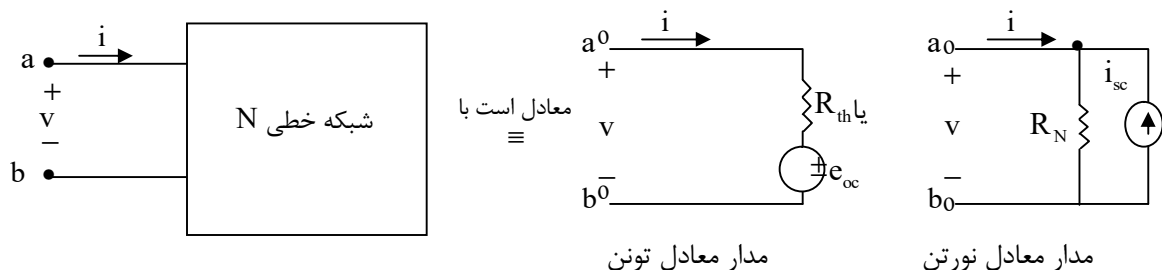


اگر در مدار اول KVL و در گره ۱ از مدار دوم KCL بزنیم به رابطه فوق می‌رسیم.

1-3- مدارهای معادل تونن و نورتن

معادل‌سازی‌های فوق را مدارهای معادل تونن و نورتن می‌نامیم.

پس برای هر مدار خطی، یک مدار معادل تونن (مدار اول) و یک مدار معادل نورتن (مدار دوم) داریم.



در این معادل‌سازی، α را با R_{th} یا R_{eq} یا R_N نشان می‌دهیم و مقدار منبع ولتاژ β را با V_{th} یا e_{oc} (ولتاژ مدار باز)

و مقدار منبع جریان $\frac{\beta}{\alpha}$ را با i_N یا i_{sc} (جریان اتصال کوتاه) مشخص می‌کنیم.

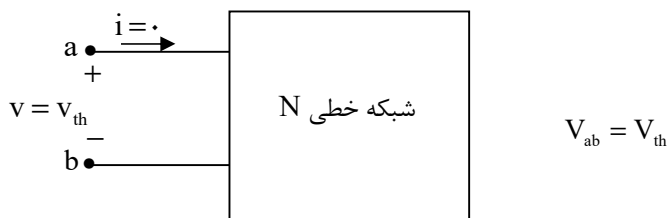
3-2- محاسبه‌ی پارامترهای معادل‌سازی

برای معادل‌سازی یک شبکه خطی با مدار معادل تونن یا نورتن آن، باید پارامترهای V_{th} ، i_N و R_{th} را محاسبه نمود.

3-2-1- محاسبه V_{th} یا e_{oc} (ولتاژ مدار باز)

برای محاسبه‌ی V_{th} کافی است دو سر a و b را مدار باز کنیم (یعنی $i = 0$) و سپس با تحلیل مدار، ولتاژ دو سر a و

b را به دست آوریم. در این صورت:

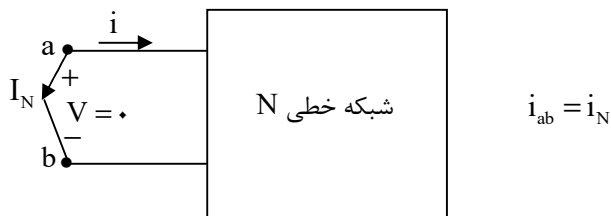


نکته: مداری که فاقد منابع مستقل (ولتاژ و جریان) باشد، $V_{th} = 0$ دارد.

3-2-2- محاسبه i_N یا i_{sc} (جریان اتصال کوتاه)

برای محاسبه i_N کافی است دو سر a و b را اتصال کوتاه کنیم. (یعنی $V = 0$) و سپس با تحلیل مدار، جریان گذرنده

از a به b را به دست آوریم. در این صورت:



در این حالت به جهت i_N دقت کنید. i_N در خلاف جهت i می‌باشد.

نکته: مداری که فاقد منابع مستقل (ولتاژ و جریان) باشد، $i_N = 0$ دارد.

3-2-3- محاسبه R_{th} یا R_{eq} (مقاومت معادل)

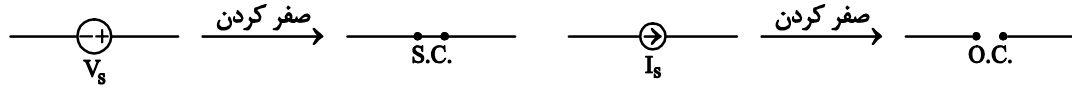
1- روش اول

اگر شبکه دارای منابع وابسته نباشد، می‌توان در ابتدا منابع مستقل را صفر کرد و سپس با قواعد مقاومت‌های سری،

موازی، تقارن، شبکه‌های بی‌نهایت و، R_{eq} را محاسبه نمود.

نکته: صفر کردن منابع مستقل:

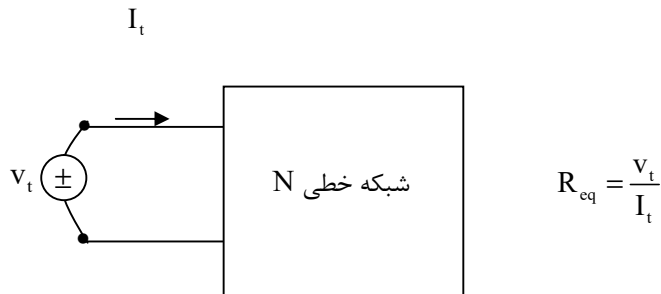
صفر کردن منبع ولتاژ یعنی اتصال کوتاه کردن آن و صفر کردن منبع جریان یعنی مدار باز نمودن آن.



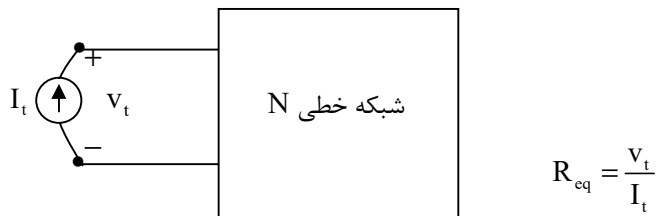
نکته: مقدار منابع مستقل، تأثیری روی R_{eq} ندارند. یعنی اگر در یک مدار مثلاً منبع ولتاژ $10V$ را به منبع ولتاژ $100V$ تبدیل کنیم، مقدار R_{eq} تغییری نمی‌کند و ثابت می‌ماند. پس در به دست آوردن R_{eq} می‌توان آن‌ها را صفر کرد.

۲- روش دوم

اگر شبکه دارای منابع وابسته باشد، در ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم و سپس یک منبع ولتاژ تست V_t به دو سر مدار اعمال می‌کنیم و با تحلیل مدار، جریان خارج شونده از منبع ولتاژ را محاسبه می‌کنیم (I_t) در این صورت می‌توان گفت:



همچنین می‌توان به دو سر مدار یک منبع جریان I_t اعمال نمود و با تحلیل آن، ولتاژ دو سر منبع جریان (V_t) را محاسبه کرده و خواهیم داشت:



مزیت این روش این است که یک مدار را تحلیل می‌کنیم.

نکته: در مدارهای با گره کمتر که روش KCL بهتر است، استفاده از منبع جریان و یافتن V_t راحت‌تر می‌باشد و در مدارهای با تعداد حلقه کمتر که روش KVL مناسب‌تر است، استفاده از منبع ولتاژ و یافتن I_t بهتر است.

۳- روش سوم

در این روش در ابتدا دو سر مدار را باز کرده، مدار را تحلیل می‌کنیم و ولتاژ مدار باز e_{oc} را به دست می‌آوریم. سپس دو سر مدار را اتصال کوتاه نموده و با تحلیل مدار، جریان گذرنده از آن i_{sc} را محاسبه کرده و با استفاده از رابطه زیر:

$$R_{eq} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}}$$

مقاومت معادل دو سر مدار را به دست می‌آوریم.

در شرایط عادی، این روش مناسب نمی‌باشد زیرا برای محاسبه‌ی e_{oc} و i_{sc} باید دو مدار جداگانه را تحلیل کرد و تحلیل این دو مدار کاملاً متفاوت است زیرا این دو مدار هیچ ربطی به هم ندارند.

ولی گاهی این روش، بهترین روش می‌باشد!

۴- روش چهارم

در این روش V_{th} و R_{th} به صورت همزمان محاسبه می‌شوند.

برای این منظور، منبع جریانی (یا منبع ولتاژی) با مقدار i (یا V) به دو سر مدار وصل می‌کنیم و سعی می‌کنیم ولتاژ V دو سر آن (جریان i دو سر آن) را به دست آوریم. در این صورت:

اگر بتوان ولتاژ را به صورت $V = \alpha i + \beta$ بیان کرد، ضریب α همان R_{eq} و β همان V_{th} می‌باشد.

اگر بتوان جریان را به صورت $i = \alpha' V + \beta'$ بیان نمود، ضریب α' همان $\frac{1}{R_{eq}}$ و β' همان i_N است.

نکته: رابطه $V = \alpha i + \beta$ بیان کننده رابطه‌ی خطی بین ولتاژ و جریان مدار است که α شیب خط برابر مقاومت معادل

(R_{eq}) و β عرض از مبدأ خط برابر ولتاژ مدار باز (e_{oc} یا V_{th}) می‌باشد.

برای رسیدن به این رابطه، بهترین راه، KCL زدن در گره‌های مدار و سپس KVL در حلقه‌های خاص برای حذف

جریان‌های اضافی و نهایتاً KVL در حلقه ورودی است.

3-3- رابطه بین i_{sc} ، e_{oc} و R_{eq}

در حالت کلی می‌توان گفت:

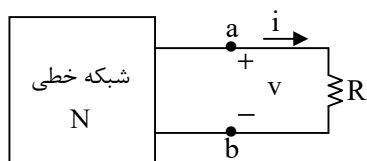
$$e_{oc} = R_{eq} i_{sc}$$

$$i_{sc} = \frac{e_{oc}}{R_{eq}}$$

این روابط بیان می‌کند که با داشتن دو پارامتر از سه پارامتر فوق، پارامتر دیگر به سادگی قابل محاسبه می‌باشد. به عبارت دیگر، به کمک روابط فوق می‌توان مدار معادل تونن و نورتن را به یکدیگر تبدیل نمود.

اکنون به بررسی چند مثال ساده می‌پردازیم.

مثال ۱: در مدار شکل زیر وقتی $R \rightarrow \infty$ ، ولتاژ V برابر ۳ ولت و وقتی $R \rightarrow 0$ می‌رود، جریان عبوری i برابر ۳ آمپر است. به ازای $R = 5\Omega$ ، جریان عبوری از مقاومت را به دست آورید.

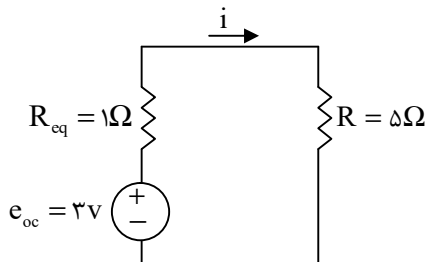


با توجه به مفاهیم مدار باز و اتصال کوتاه می‌توان گفت:

$$\begin{cases} R \rightarrow \infty & \xrightarrow{\text{مدار باز}} e_{oc} = 3V \\ V = 3V \end{cases} \Rightarrow R_{eq} = \frac{e_{oc}}{i_{sc}} = \frac{3}{3} = 1\Omega$$

$$\begin{cases} R \rightarrow 0 & \xrightarrow{\text{اتصال کوتاه}} i_{sc} = 3A \\ i = 3A \end{cases}$$

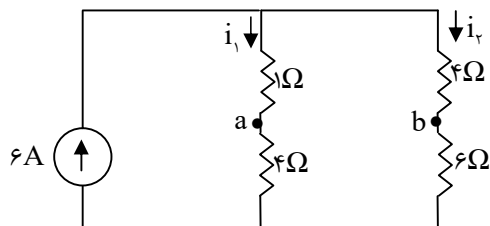
بنابراین مدار معادل تونن شبکه خطی از دو سر a, b به صورت زیر است:



و داریم:

$$i = \frac{e_{oc}}{R_{eq} + R} = \frac{3}{1 + 5} = 0.5A$$

مثال ۲: در مدار شکل زیر، مدار معادل تونن را از دو سر a و b به دست آورید.



با استفاده از تقسیم جریان داریم:

$$i_1 = \frac{6+4}{6+4+1+4} \quad 6=4A$$

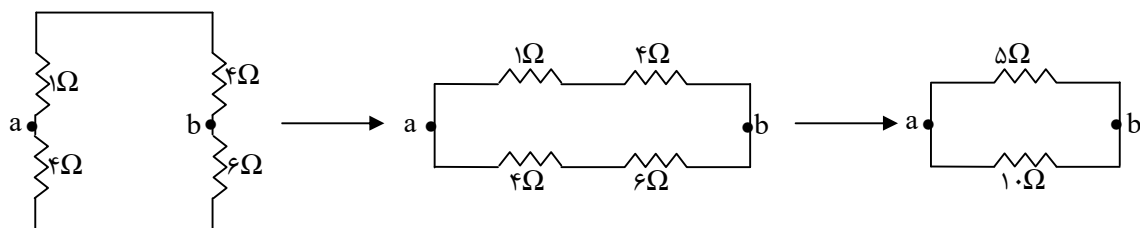
$$i_2 = \frac{1+4}{1+4+4+6} \quad 6=2A$$

و برای ولتاژ مدار باز داریم:

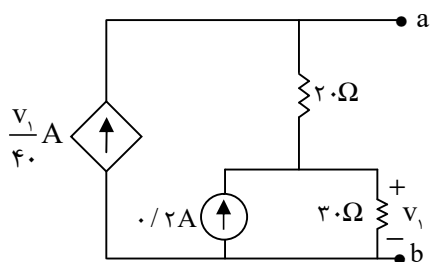
$$e_{oc} = V_a - V_b = 4i_1 - 6i_2 = 4 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 4 \text{ Volt}$$

برای محاسبه R_{eq} ، منبع جریان را صفر نموده (اتصال باز) و از دو سر a و b داریم:

$$R_{eq} = R_{ab} = (1+4) \parallel (4+6) = \frac{5 \cdot 10}{5+10} = \frac{10}{3} \Omega$$

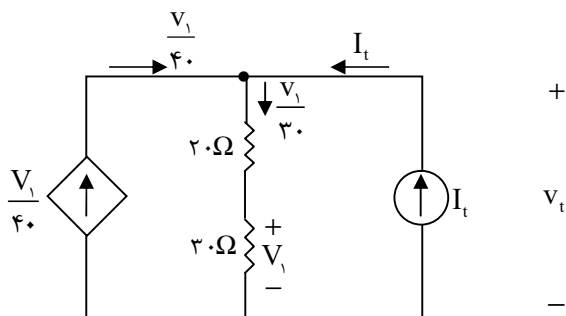


مثال ۳: در مدار شکل زیر، مقاومت معادل از دو سر a و b را به دست آورید.



در ابتدا منبع جریان مستقل $0.2A$ را اتصال باز می‌کنیم و سپس با قرار دادن یک منبع جریان I_t به دو سر a و b،

ولتاژ $V_{ab} = V_t$ را محاسبه می‌کنیم.



با KCL در گره بالایی داریم:

$$\text{KCL: } \frac{V_1}{40} + I_t - \frac{V_1}{30} = 0 \rightarrow V_1 = 120 \cdot I_t$$

و با KVL در حلقه‌ی ورودی داریم:

$$\text{KVL: } V_t - \frac{2}{3} V_1 - V_1 = 0 \rightarrow V_t = \frac{5}{3} V_1 = \frac{5}{3} \cdot 120 \cdot I_t = 200 \cdot I_t$$

و در نتیجه:

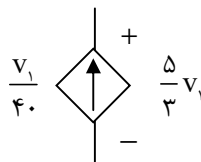
$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = 200 \cdot \Omega$$

روش دوم:

در قسمت قبل دیدیم که ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته برابر است با:

$$V_t = \frac{5}{3} V_1$$

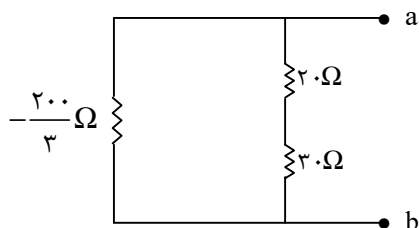
و با توجه به شکل زیر می‌توان گفت:



جریان منبع وابسته به ولتاژ دو سرش، وابسته شد و این منبع جریان معادل یک مقاومت است با مقدار:

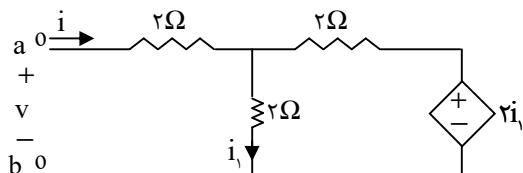
$$R = \frac{-\frac{5}{3} V_1}{\frac{V_1}{40}} = -\frac{200}{3} \Omega$$

و برای مدار اصلی داریم:



$$R_{eq} = (20 + 30) \parallel \left(-\frac{200}{3} \right) = \frac{-\frac{200}{3} \cdot 50}{-\frac{200}{3} + 50} = 20 \cdot \Omega$$

مثال ۴: مدار معادل تونن شبکه زیر را به دست آورید.

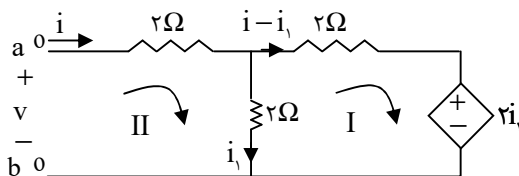


با توجه به شبکه دیده می شود که، شبکه به خودی خود منبع مستقل ندارد. بنابراین:

$$e_{oc} = i_{sc} = 0$$

و شبکه تنها معادل یک مقاومت است.

برای یافتن مقاومت معادل با KCL و KVL زدن در مدار داریم:



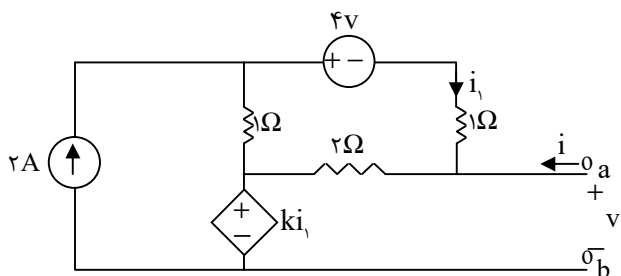
$$\text{KVL در حلقه I: } 2(i - i_1) + 2i_1 - 2i_1 = 0 \rightarrow i_1 = i$$

$$\text{KVL در حلقه II: } V - 2i - 2i_1 = 0 \rightarrow V = 2(i + i_1) = 2 \cdot 2i = 4i \rightarrow R_{eq} = \frac{V}{i} = 4\Omega$$

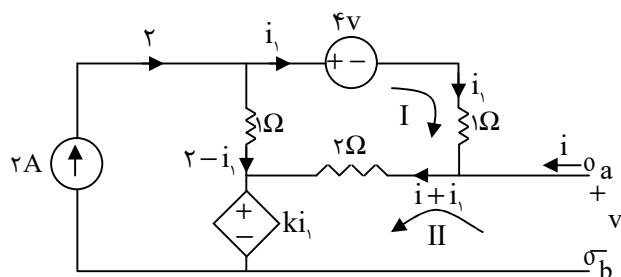
مثال ۵: در مدار شکل زیر مقدار K را به گونه‌ای تعیین کنید که:

الف) مدار معادل یک مقاومت خالص باشد.

ب) مدار معادل یک باتری بدون مقاومت داخلی باشد.



برای این منظور، روی شکل مدار اصلی KCL می‌زنیم و سپس در حلقه‌های I و II، KVL می‌زنیم.



$$\text{I در حلقه‌ی KVL: } 4 + i_1 + 2(i + i_1) - (2 - i_1) = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{i+1}{2}$$

$$\text{II در حلقه‌ی KVL: } V = 2(i + i_1) + Ki_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{K}{2} \\ 4 \end{pmatrix} i + \begin{pmatrix} -1 - \frac{K}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\alpha \qquad \qquad \beta$

بنابراین می‌توان گفت:

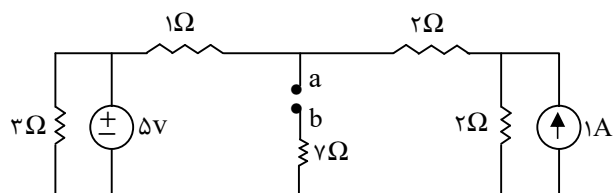
$$R_{eq} = \alpha = 1 - \frac{K}{2} \quad , \quad e_{oc} = \beta = -1 - \frac{K}{2}$$

و در نتیجه:

$$\text{الف) } e_{oc} = 0 \rightarrow -1 - \frac{K}{2} = 0 \rightarrow K = -2$$

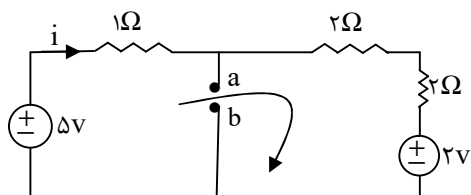
$$\text{ب) } R_{eq} = 0 \rightarrow 1 - \frac{K}{2} = 0 \rightarrow K = 2$$

مثال ۶: در مدار شکل زیر، ولتاژ مدار باز دو سر a و b را به دست آورید.



در مدار شکل فوق مقاومت 3Ω هیچ تأثیری ندارد زیرا موازی با منبع ولتاژ می‌باشد و به طور کلی هر المانی (به جز اتصال کوتاه) موازی با منبع ولتاژ، قابل حذف است و به همین ترتیب هر عنصری (به جز مدار باز) سری یا منبع جریان، قابل حذف می‌باشد.

همچنین با توجه به این که اتصال ab مدار باز است، مقاومت 7Ω نیز حذف می‌شود. با تبدیل نورتن به تونن برای منبع جریان یک آمپر و مقاومت 2Ω داریم:

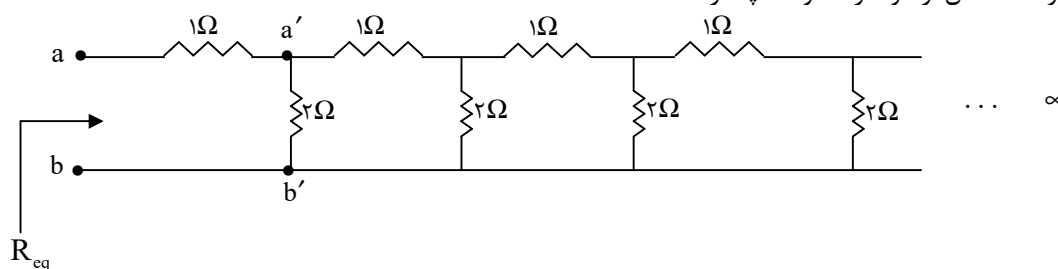


$$\text{KVL: } -5 + i + 2i + 2i + 2 = 0 \rightarrow i = \frac{3}{5} \text{ A}$$

و در نتیجه:

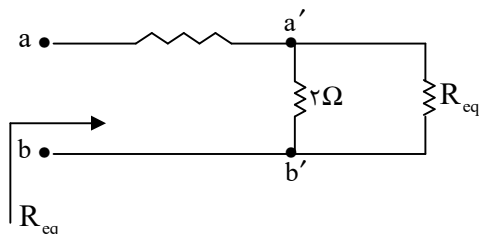
$$V_{ab} = 2i + 2 = \frac{22}{5} \text{ V} = 4.4 \text{ Volt}$$

مثال ۷: مقاومت معادل از دو سر a و b چقدر است؟



در این گونه مدارها نمی‌توان دو مقاومت سری یا موازی پیدا کرد و روش‌های معمول برای یافتن مقاومت معادل فایده‌ای ندارد.

در این مسائل از مفهوم بی‌نهایت استفاده می‌کنیم. اگر از سر a' و b' به مدار نگاه کنیم، به دلیل امتداد آن تا بی‌نهایت، دقیقاً همان چیزی دیده می‌شود که از سر a و b به مدار نگاه می‌کنیم. پس می‌توان مدار را به صورت زیر ساده نمود:



و در نتیجه داریم:

$$R_{eq} = 1 + (2 \parallel R_{eq}) = 1 + \frac{2R_{eq}}{2 + R_{eq}} \rightarrow R_{eq} = \frac{2 + 2R_{eq}}{2 + R_{eq}}$$

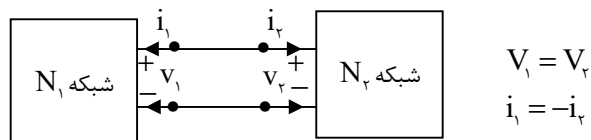
$$\rightarrow R_{eq} - R_{eq} - 2 = 0 \rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$

4-3- اتصال دو شبکه

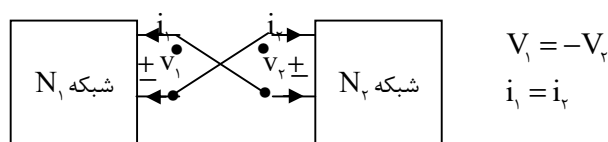
دو شبکه دلخواه به صورت‌های زیر به هم متصل می‌شوند:

۱- اتصال مستقیم

با توجه به شکل زیر می‌توان گفت:



۲- اتصال معکوس



براین اساس برای یافتن پاسخ ولتاژ V و جریان i ، در ابتدا باید به نوع اتصال توجه داشت. واضح است که:

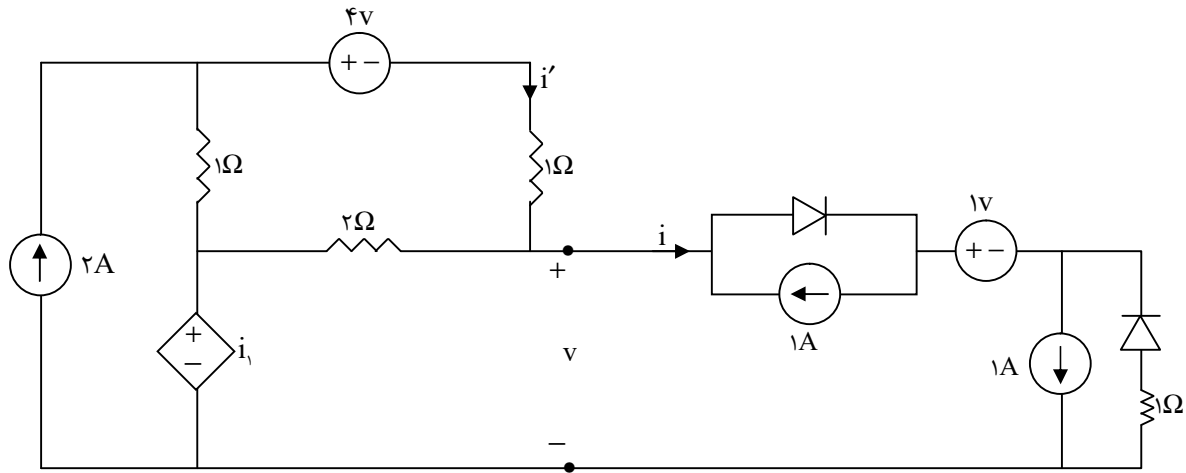
$$\text{در اتصال مستقیم} \begin{cases} V = V_1 = V_r \\ i = i_1 = -i_r \end{cases}$$

$$\text{در اتصال معکوس} \begin{cases} V = V_1 = -V_r \\ i = i_1 = i_r \end{cases}$$

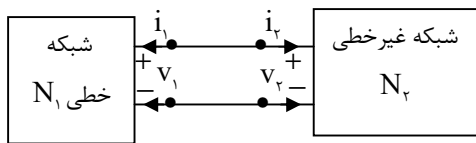
و با داشتن مشخصه ولتاژ و جریان در هر یک از شبکه‌ها (به صورت فرمولی یا به صورت نموداری)، از یافتن محل تلاقی

آن‌ها V و i به دست می‌آیند.

مثال ۸: در مدار شکل زیر، پاسخ‌های V و i را به دست آورید.



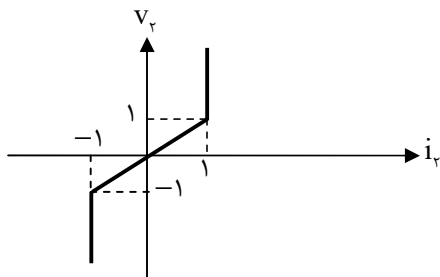
این شبکه را می‌توان اتصال سری دو شبکه N_1 و N_r به صورت زیر در نظر گرفت:



در مثال ۵ همین فصل دیدیم که به ازای $K = 1$ برای شبکه N_1 داریم:

$$V_1 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{3}{2}$$

و برای شبکه غیرخطی N_r در مثال ۱ قسمت د فصل اول دیدیم که:



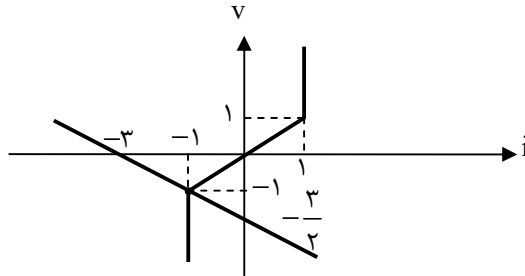
با توجه به اتصال مستقیم دو شبکه می‌توان گفت:

$$V = V_1 = V_r, \quad i = -i_1 = i_r$$

پس برای مدار شبکه N_1 داریم:

$$V = \frac{1}{2}i - \frac{3}{2}$$

با رسم مشخصه دو شبکه و تلاقی آنها:



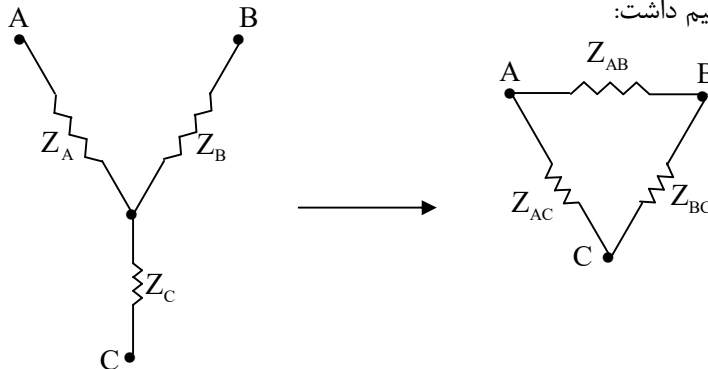
و با توجه به محل تلاقی داریم:

$$\begin{cases} V = V_1 = V_2 = -1 \text{ Volt} \\ i = -i_1 = i_2 = -1 \text{ A} \end{cases}$$

5-3- مدار معادل ستاره - مثلث (y/Δ)

یک روش ساده سازی برای حل شبکه های پیچیده، استفاده از تبدیل ستاره به مثلث و بالعکس است.

برای تبدیل ستاره به مثلث خواهیم داشت:



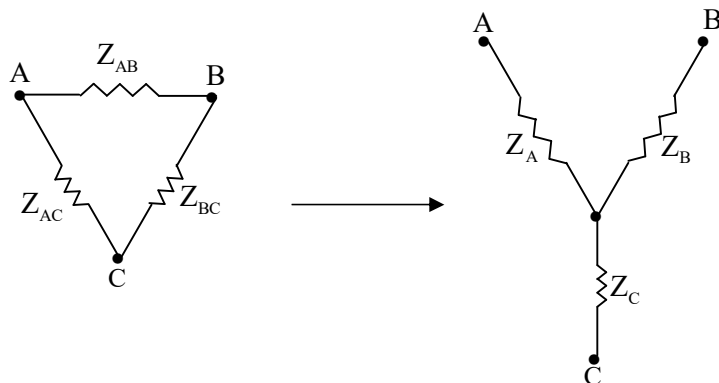
$$Z_{AB} = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C}$$

$$Z_{BC} = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A}, \quad Z_{AC} = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_B}$$

در یک حالت خاص اگر $Z_A = Z_B = Z_C$ باشد آنگاه:

$$Z_{AB} = Z_{AC} = Z_{BC} = 2Z_A$$

و برای تبدیل مثلث به ستاره داریم:



$$Z_A = \frac{Z_{AB} \cdot Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

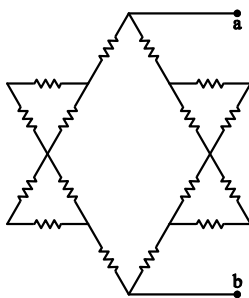
$$Z_B = \frac{Z_{AB} \cdot Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

$$, \quad Z_C = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{AC} + Z_{BC}}$$

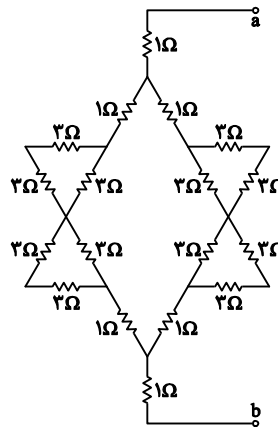
و در حالت خاصی که $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$ باشد می توان گفت:

$$Z_A = Z_B = Z_C = \frac{1}{3} Z_{AB}$$

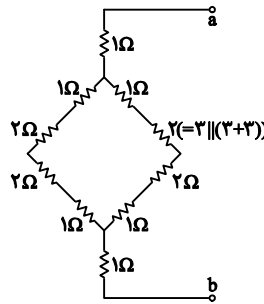
مثال ۹: در مدار شکل زیر اگر تمام مقاومت ها برابر 3Ω باشد، مقاومت معادل از دو سر a و b را به دست آورید.



دو مثلث بالا و پایین را به ستاره تبدیل می کنیم:

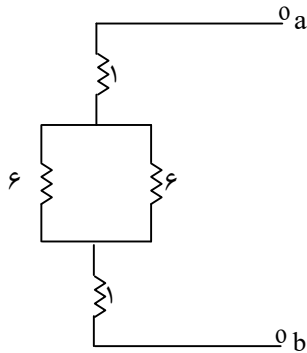


و مقاومت معادل شاخه‌های چپ و راست را به دست می‌آوریم:



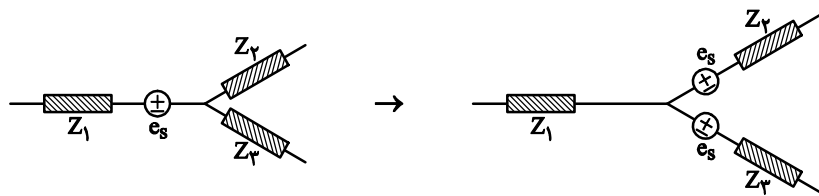
و در نهایت می‌توان گفت:

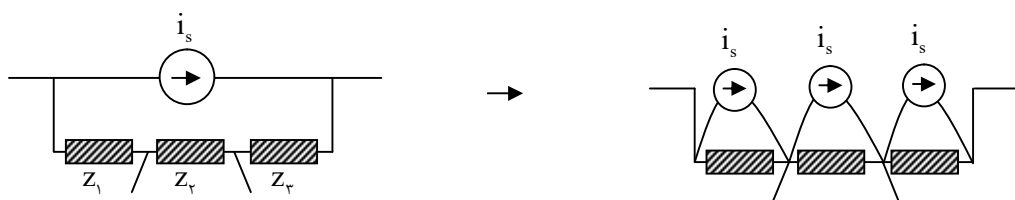
$$R_{ab} = 1 + (6 \parallel 6) + 1 = 5\Omega$$



6-3- تبدیل منابع

منابع مستقل ولتاژ و جریین را می‌توان به صورت زیر تبدیل نمود:

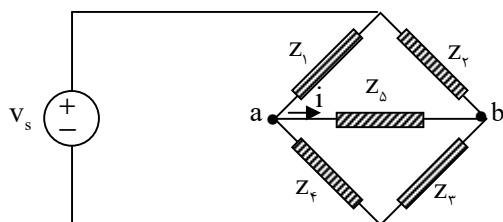




این تبدیل‌ها می‌تواند باعث کاهش تعداد مش‌های مستقل و تعداد گره‌های مستقل شود.

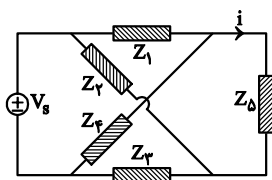
3-7- پل وتستون

بدون شرح!!!



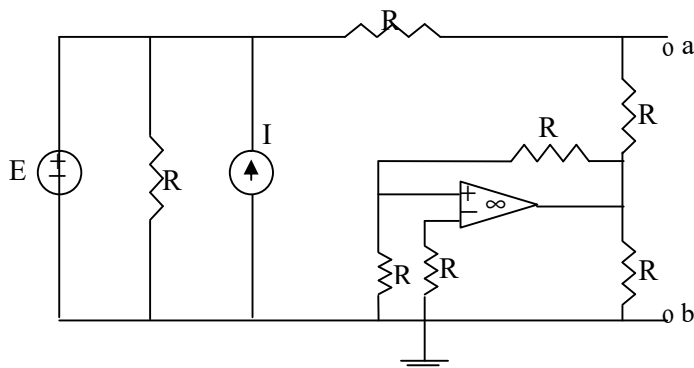
شاخه ab و امپدانس Z_5 قابل حذف است. $\rightarrow i = 0 \rightarrow Z_1 Z_2 = Z_3 Z_4$ اگر

پل وتستون همچنین به صورت زیر قابل نمایش است:



تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای معادل

۱- مدار معادل تونن از سرهای a, b کدام است؟ (آپ امپ ایده‌ال است)



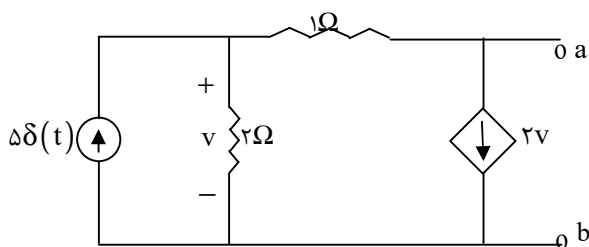
$$R_{th} = \frac{2}{3}R, V_{th} = E + RI \quad (1)$$

$$R_{th} = \frac{10}{11}R, V_{th} = \frac{E + RI}{2} \quad (2)$$

$$R_{th} = \frac{R}{2}, V_{th} = \frac{E}{2} \quad (3)$$

$$R_{th} = R, V_{th} = E \quad (4)$$

۲- مدار معادل تونن مدار زیر برابر است با:



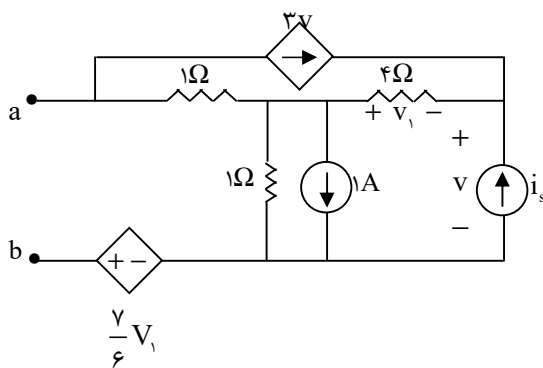
$$V_{th} = \delta(t), R_{th} = 2\Omega \quad (1)$$

$$V_{th} = 2\delta(t), R_{th} = 2\Omega \quad (2)$$

$$V_{th} = -2\delta(t), R_{th} = \frac{3}{5}\Omega \quad (3)$$

$$V_{th} = -\delta(t), R_{th} = \frac{3}{5}\Omega \quad (4)$$

۳- مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است؟



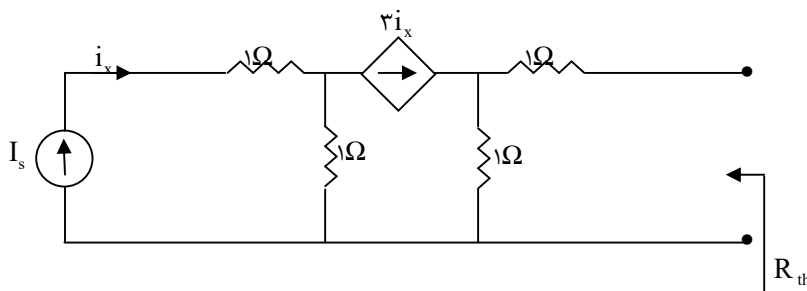
$$\frac{5}{11}\Omega \quad (1)$$

$$1\Omega \quad (2)$$

$$3\Omega \quad (3)$$

$$\frac{39}{11}\Omega \quad (4)$$

۴- مقاومت معادل تونن مدار شکل زیر کدام است؟



$$1\Omega \quad (1)$$

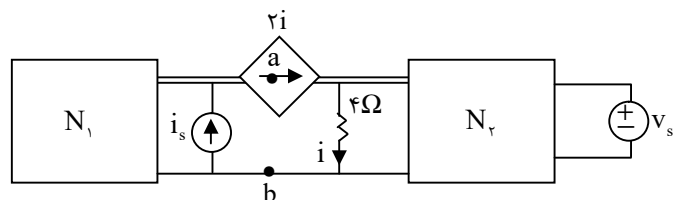
$$1\frac{1}{3}\Omega \quad (2)$$

$$1/5\Omega \quad (3)$$

$$2\Omega \quad (4)$$

۵- در مدار زیر (با فرض جواب یکتا)، N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی تشکیل شده‌اند و $i = \frac{2}{V}(V_s + i_s)$

می‌باشد. به جای مقاومت 4Ω چه مقاومتی را بگذاریم تا مقاومت کل مدار از دو سر a و b برابر $\frac{8}{9}\Omega$ شود؟



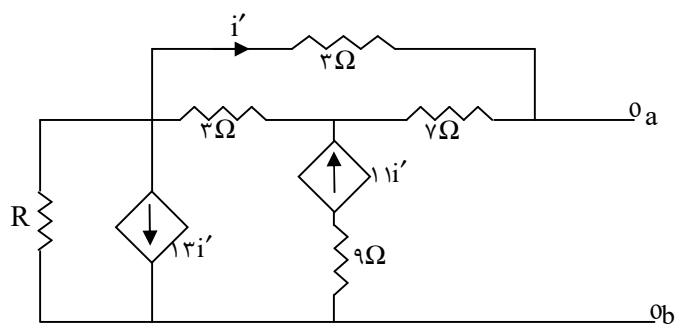
(۱) $\frac{8}{9}\Omega$

(۲) $\frac{8}{5}\Omega$

(۳) 2Ω

(۴) 4Ω

۶- مقاومت معادل بین دو سر a, b مدار داده شده در شکل زیر کدام است؟



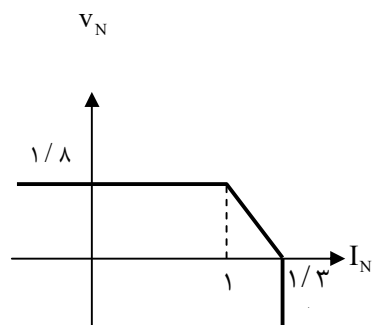
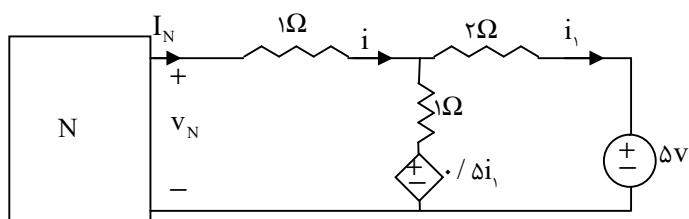
(۱) $3R + 3/2$

(۲) $2R - 1/5$

(۳) $1/4R + 3$

(۴) $2/4R + 2$

۷- مشخصه یک قطبی N در مدار شکل زیر داده شده است. جریان i برابر است با:



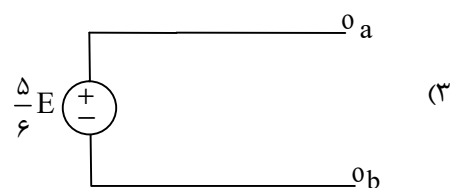
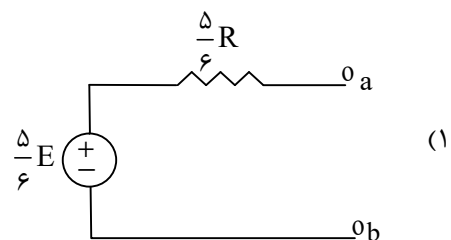
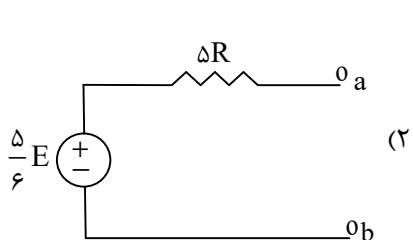
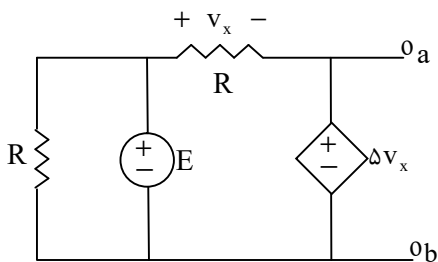
(۱) $-\frac{5}{9}A$

(۲) $-\frac{4}{9}A$

(۳) $\frac{5}{9}A$

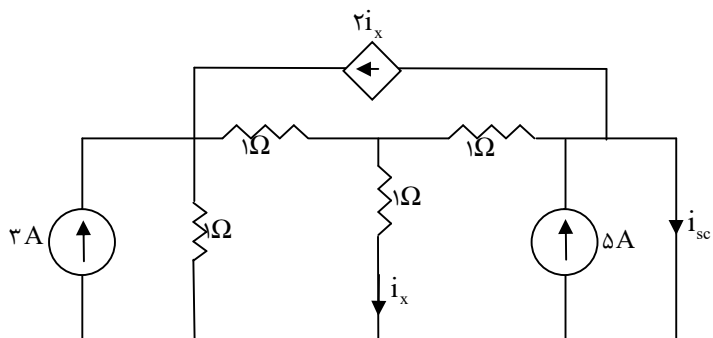
(۴) $\frac{4}{9}A$

۸- مدار معادل تونن شکل زیر را به دست آورید.



(۴) معادل تونن ندارد

۹- جریان اتصال کوتاه (i_{sc}) کدام است؟



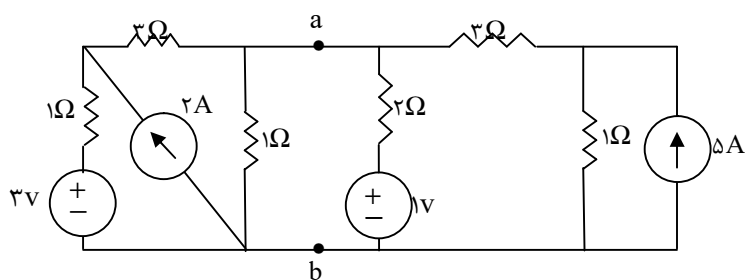
(۱) ۱A

(۲) ۲A

(۳) ۴A

(۴) ۸A

۱۰- در مدار زیر، V_{ab} چند ولت است؟



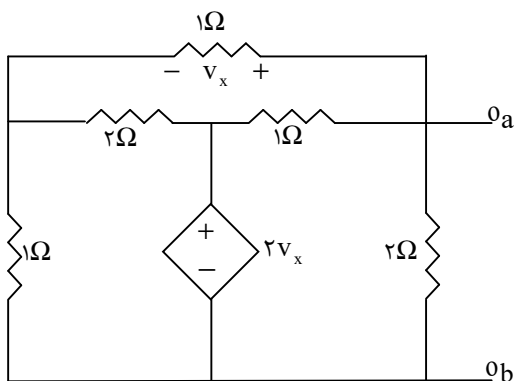
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{4}$

۱۱- مقاومت دیده شده در سرهای a, b مدار شکل زیر کدام است؟



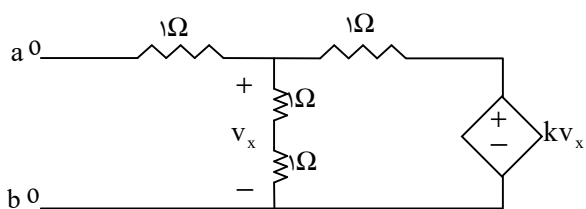
(۱) $\frac{4}{7}\Omega$

(۲) $\frac{15}{14}\Omega$

(۳) $\frac{7}{4}\Omega$

(۴) $\frac{14}{15}\Omega$

۱۲- در مدار شکل زیر به ازای چه مقدار K مقاومت دیده شده در سرهای a و b منفی است؟



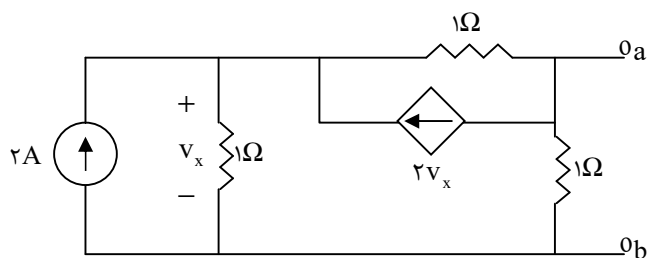
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) ۴

۱۳- در مدار شکل زیر مقاومت تونن از دو سر a و b کدام است؟



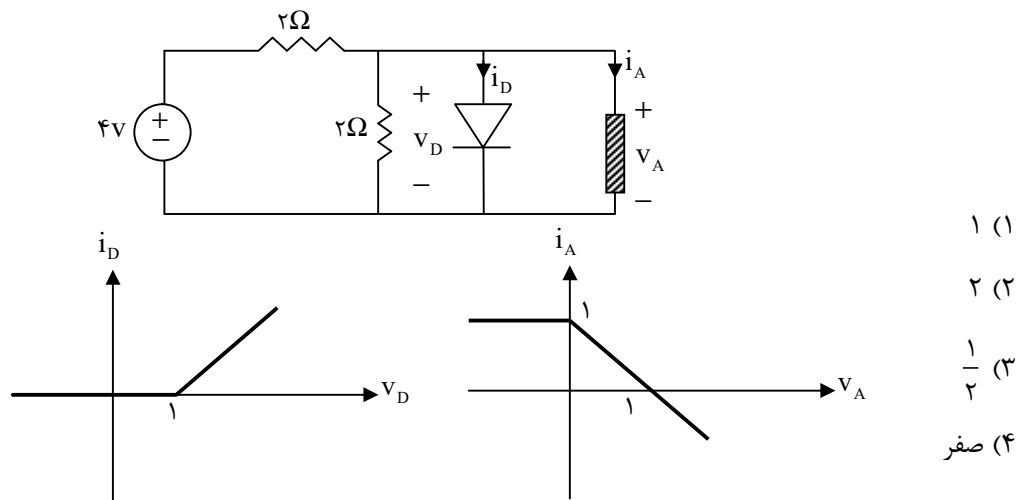
(۱) صفر

(۲) $\frac{2}{3}\Omega$

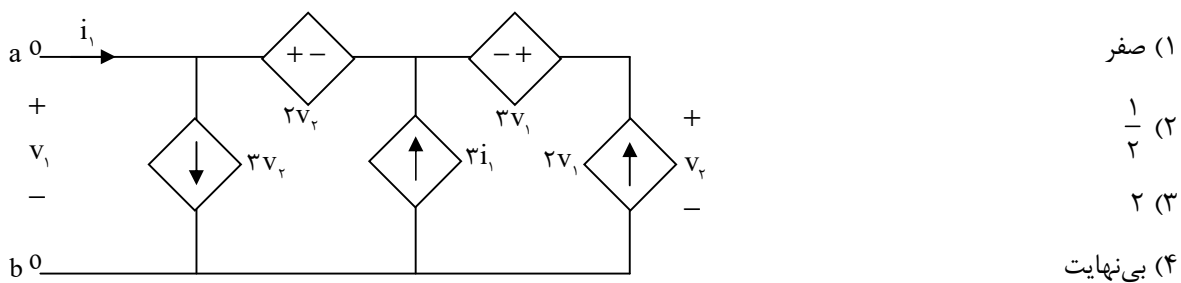
(۳) ۱۵

(۴) بی نهایت

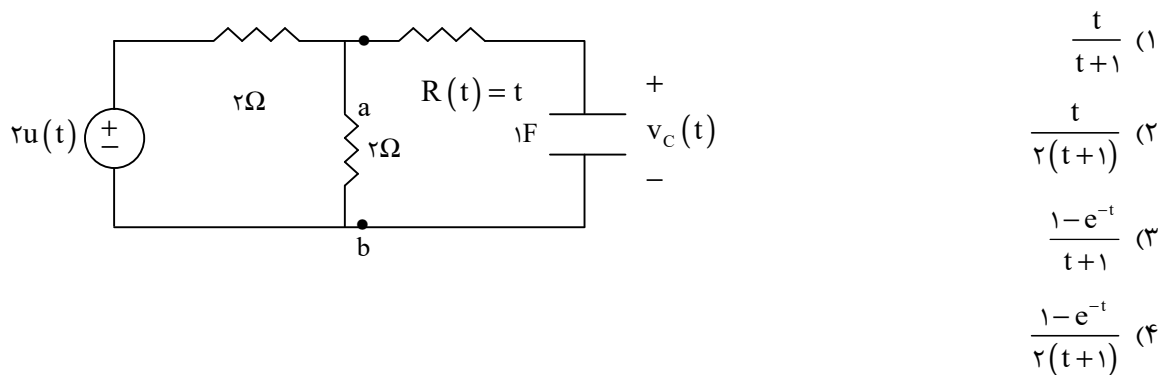
۱۴- در مدار شکل زیر، توان مصرفی در دیود چند وات است؟



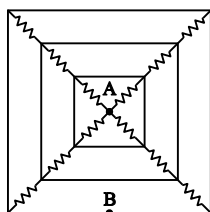
۱۵- مقاومت دیده شده در سرهای a و b مدار شکل زیر چند اهم است؟



۱۶- برای مدار خطی تغییرپذیر با زمان شکل زیر، $V_C(t)$ برای $t \geq 0$ برابر کدام گزینه است؟ $(V_C(0^-) = 0)$



۱۷- در مدار شکل زیر تمام مقاومت‌ها یک اهم هستند. مقاومت دیده شده از سرهای A, B چند اهم است؟



(۲) $\frac{1}{3}$

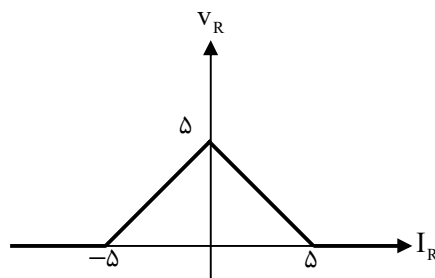
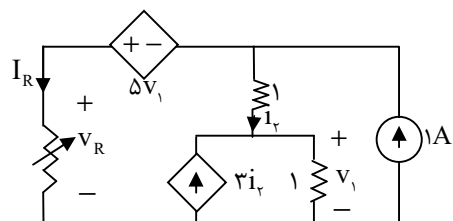
(۴) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

۱۸- در مدار شکل زیر، R یک مقاومت غیرخطی با مشخصه داده شده می‌باشد. ولتاژ V_R در دو سر این

مقاومت غیرخطی کدام است؟



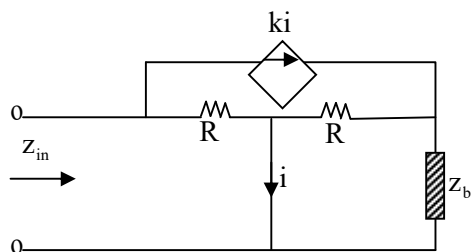
(۱) $\frac{6}{25} V$

(۲) $\frac{24}{25} V$

(۳) $\frac{25}{24} V$

(۴) $\frac{25}{6} V$

۱۹- در شبکه زیر $\lim_{k \rightarrow \infty} Z_{in}$ چقدر است؟



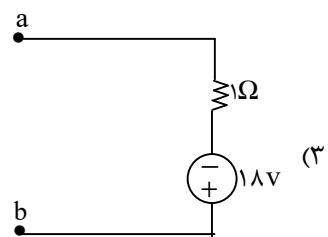
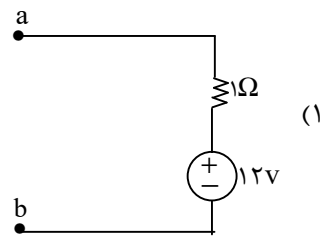
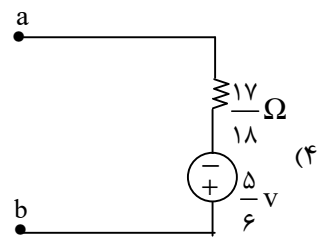
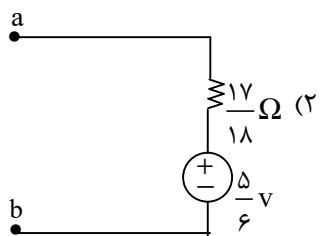
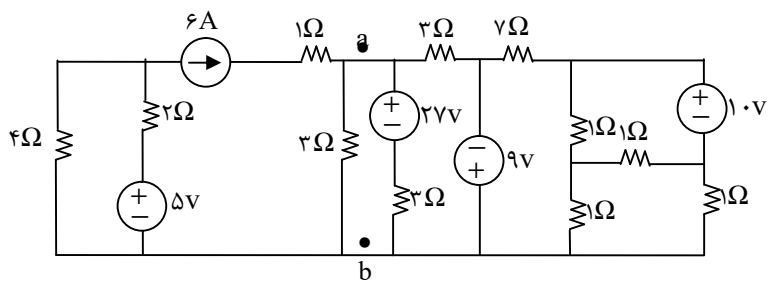
(۱) $-Z_b$

(۲) $Z_b - R$

(۳) $Z_b + R$

(۴) بی‌نهایت

۲۰- مدار معادل تونن از دید دو سر a و b در مدار شکل زیر کدام است؟

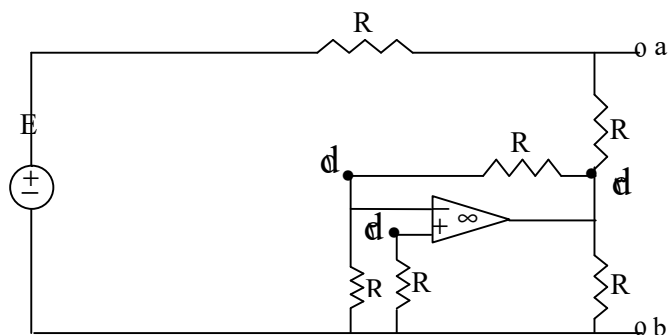


پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

ا توجه به موازی قرار گرفتن منبع جریان I و مقاومت R با منبع ولتاژ E ، می‌توان منبع جریان و مقاومت R را حذف

شود و مدار به شکل زیر تبدیل شود:

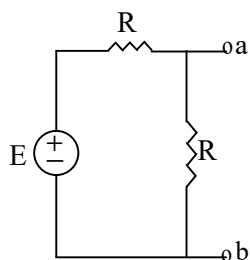


آپ امپ ایده‌آل است، پس جریان سرهای ورودی آن صفر است و در نتیجه ولتاژ گره‌های ۱ و ۲ صفر می‌شود:

$$V_+ = V_- = 0 \rightarrow V_1 = V_2 = 0$$

بنابراین ولتاژ گره ۳ نیز برابر صفر است و عملاً آپ امپ نقشی در مدار ندارد و فقط یک تقسیم کننده ولتاژ است. در

نتیجه مدار به شکل زیر در می‌آید:

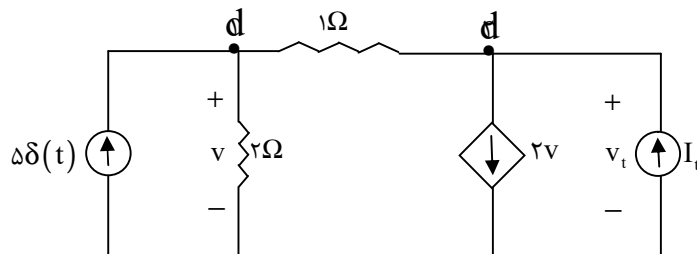


$$V_{th} = V_{ab} = \frac{R}{R+R} E = \frac{E}{2}$$

$$R_{th} = R \parallel R = \frac{R}{2}$$

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با قرار دادن منبع جریان تست I_t در سرهای a و b و نوشتن KCL داریم:



$$\text{KCL (1): } \frac{V}{2} + \frac{V - V_t}{1} = \Delta\delta(t) \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}V - V_t = \Delta\delta(t) \\ V + V_t = I_t \end{cases}$$

$$\text{KCL (2): } \frac{V_t - V}{1} + 2V = I_t$$

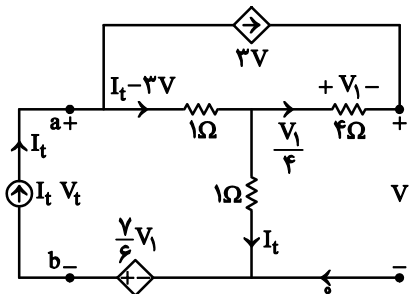
با جایگذاری دو معادله به دست آمده در یکدیگر داریم:

$$\frac{3}{2}(I_t - V_t) - V_t = \Delta\delta(t) \rightarrow V_t = \frac{3}{5}I_t - \frac{2}{5}\delta(t)$$

بنابراین $R_{th} = \frac{3}{5}\Omega$ و $V_{th} = -\frac{2}{5}\delta(t)$ به دست می‌آید.

۳- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

برای به دست آوردن مقاومت معادل ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم و سپس با قرار دادن منبع جریان تست I_t به دو سر a و b، با اعمال KCL و KVL خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \text{KCL: } \frac{V_1}{4} = -3V \rightarrow V_1 = -12V \\ \text{KVL: } V = -V_1 + I_t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{12}{11}I_t \\ V = -\frac{1}{11}I_t \end{cases}$$

و با KVL در مش سمت چپ می‌توان گفت:

$$\text{KVL: } V_t = 1(I_t - 3V) + I_t - \frac{1}{6}V_1 \rightarrow V_t = I_t + \frac{3}{11}I_t + I_t - \left(\frac{1}{6} - \frac{12}{11}\right)I_t = I_t$$

بنابراین برای مقاومت معادل از دو سر a و b داریم:

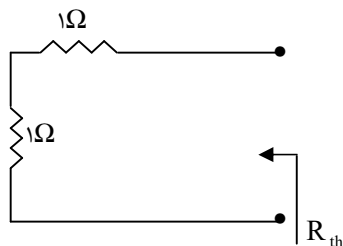
$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = 1\Omega$$

۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای به دست آوردن مقاومت معادل ابتدا منبع مستقل را صفر می‌کنیم، در نتیجه:

$$I_s = 0 \rightarrow i_x = 0 \rightarrow 3i_x = 0$$

یعنی منبع جریان وابسته $3i_x$ نیز اتصال باز می‌شود و داریم:



$$R_{th} = 2\Omega$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

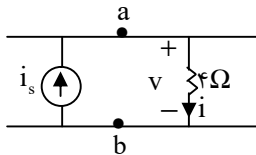
برای به دست آوردن مقاومت ورودی، مقدار منبع ولتاژ V_s تأثیری ندارد، پس $V_s = 0$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$i = \frac{V}{V} (V_s + i_s) \xrightarrow{V_s=0} i = \frac{V}{V} i_s$$

اگر ولتاژ دو سر مقاومت ۴ اهمی را V در نظر بگیریم داریم:

$$V = 4i = 4 \cdot \frac{V}{V} i_s = \frac{4}{V} i_s$$

پس مقاومت معادل دیده شده از دو سر منبع جریان برابر است با:



$$R_{th} = R_{ab} = \frac{V}{i_s} = \frac{4}{V} \Omega$$

حال اگر از دو سر مقاومت ۴ اهمی به بقیه مدار نگاه کنیم و مقاومت آن را R بنامیم، اتصال موازی مقاومت R و

مقاومت ۴ اهمی برابر R_{th} می‌شود، یعنی:

$$R \parallel 4 = \frac{4R}{4+R} = R_{th} = \frac{4}{V} \Omega \rightarrow R = \frac{4}{5} \Omega$$

اگر مقاومت ۴ اهمی را با مقاومت R' عوض کنیم، اتصال موازی مقاومت R' با R برابر $\frac{4}{9}$ خواهد بود (طبق فرض و

خواسته مسأله) به عبارت دیگر:

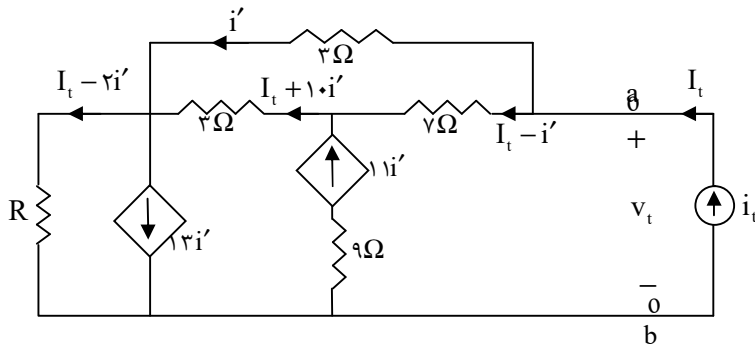
$$R' \parallel R = \frac{\frac{4}{5} R'}{\frac{4}{5} + R'} = \frac{4}{9} \rightarrow R' = 2 \Omega$$

یعنی اگر مقاومت ۴ اهمی را با مقاومت ۲ اهمی عوض کنیم، مقاومت معادل مدار از دو سر a و b برابر $\frac{4}{9} \Omega$ می‌شود.

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به مدار، منبع مستقلى وجود ندارد که صفر شود، پس منبع جریان I_1 را به دو سر a, b قرار می‌دهیم و با

KCL زدن بر روی مدار و سپس KVL زدن در حلقه بالایی و حلقه بیرونی داریم:



KVL در حلقه بالایی: $3(I_t - i') + 1(I_t + 1i') - 3i' = 0 \rightarrow i' = -\frac{I_t}{2}$

KVL در حلقه بیرونی: $V_t = 3i' + R(I_t - 3i') = \left(2R - \frac{3}{2}\right)I_t$

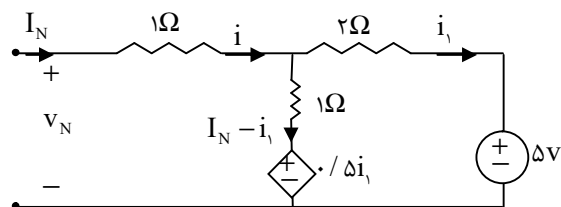
بنابراین:

$$R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = 2R - \frac{3}{2} = 2R - 1.5$$

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در این حالت باید مشخصه $V-I$ مدار سمت راست را نیز به دست آورده و با مشخصه شبکه N قطع دهیم تا جریان و ولتاژ مشترک از نقطه تقاطع به دست آید.

برای مدار سمت راست با KCL زدن روی مدار و سپس نوشتن KVL داریم:



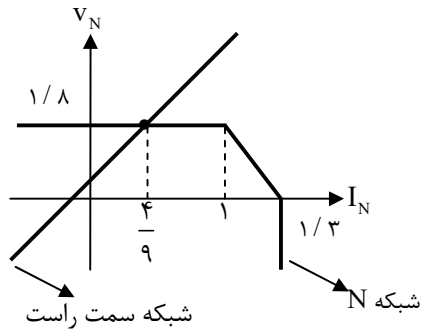
KVL در مش سمت راست: $2i_1 + \Delta V - 0.5i_1 - (I_N - i_1) = 0 \rightarrow i_1 = \frac{2}{5}I_N - 2$

KVL در مش ورودی: $V_N = I_N + I_N - i_1 + 0.5i_1 = 2I_N - 0.5i_1$

با استفاده از دو رابطه فوق داریم:

$$V_N = 2I_N - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}I_N - 2 \right) \rightarrow V_N = \frac{9}{5}I_N + 1$$

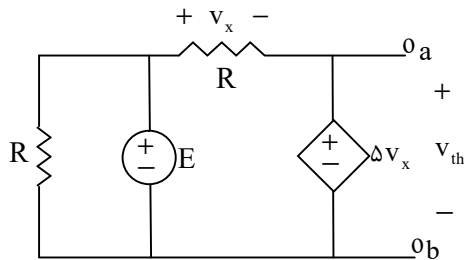
با رسم دو مشخصه $V-I$ در یک صفحه داریم:



$$V_N = \frac{9}{5} I_N + 1 = 1/4 \rightarrow I_N = \frac{4}{9} A$$

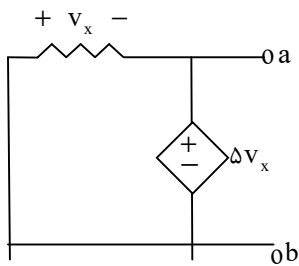
۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای محاسبه‌ی V_{th} با اعمال KVL در حلقه سمت راست داریم:



$$\begin{cases} \text{KVL: } E = V_x + \Delta V_x = \epsilon V_x \\ V_{th} = \Delta V_x \end{cases} \rightarrow V_{th} = \frac{\Delta}{\epsilon} E$$

برای محاسبه ی R_{th} منابع مستقل را صفر می‌کنیم و داریم:

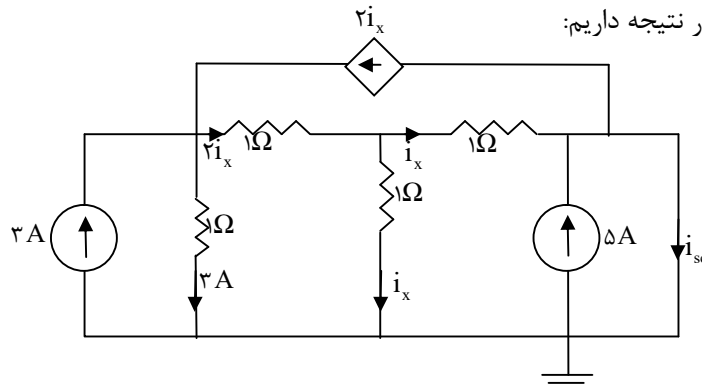


$$\Delta V_x = -V_x \rightarrow V_x = \bullet \rightarrow R_{th} = \bullet$$

۹- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

شاخه اتصال کوتاه شده باعث می شود دو مقاومت 1Ω سمت راست با هم موازی شوند، پس جریان مقاومت یک اهمی

سمت راست نیز i_x است. در نتیجه داریم:



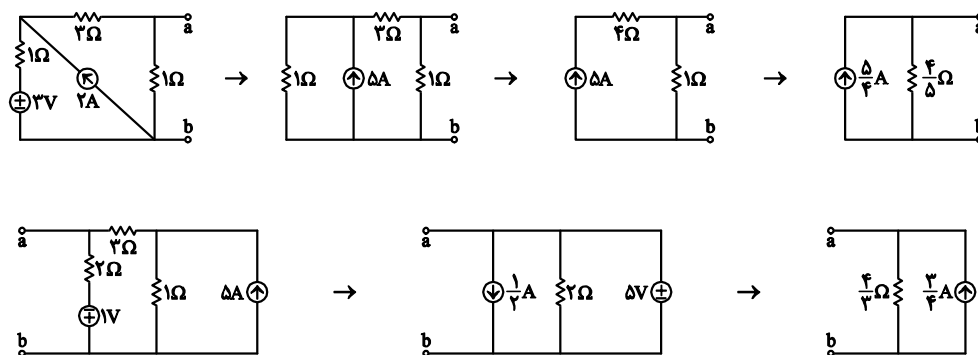
$$\text{KCL: } i_{sc} = 5 + i_x - 2i_x = 5 - i_x$$

$$\text{KVL: } 2i_x + i_x - 3 = 0 \rightarrow 3i_x = 3 \rightarrow i_x = 1\text{A}$$

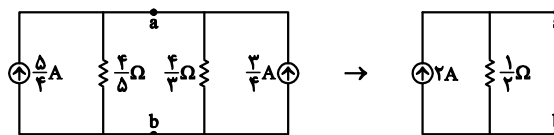
$$i_{sc} = 5 - i_x = 5 - 1 = 4\text{A}$$

۱۰- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از تبدیل تونن - نورتن برای سمت راست و چپ سرهای a و b داریم:



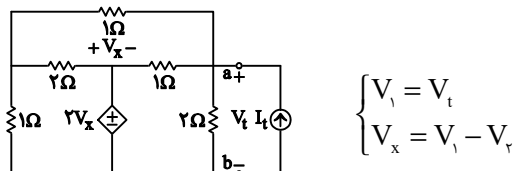
در نتیجه داریم:



$$V_{ab} = \frac{1}{2} \quad 2 = 1 \text{ Volt}$$

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

اگر منبع جریان تست I_t را به دو سر a و b وصل کنیم و در گره‌های ۱ و ۲ معادلات KCL را بنویسیم داریم:



$$\text{KCL}(1): \frac{V_t}{2} + \frac{V_t - 2V_x}{1} + \frac{V_t - V_r}{1} = I_t \rightarrow V_t + 2V_r = 2I_t$$

$$\text{KCL}(2): \frac{V_r}{1} + \frac{V_r - 2V_x}{2} + \frac{V_r - V_t}{1} = 0 \rightarrow 4V_t - 2V_r = 0$$

با استفاده از دو معادله به دست آمده خواهیم داشت:

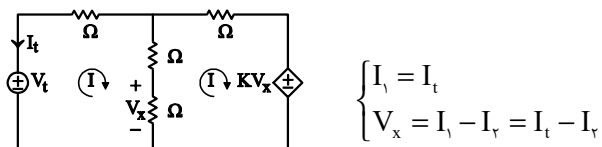
$$V_r = \frac{4}{5} V_t$$

$$V_t + \left(2 - \frac{4}{5} V_t \right) = 2I_t \rightarrow \frac{1}{5} V_t = 2I_t \rightarrow R_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{10}{1} \Omega$$

۱۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای یافتن مقاومت معادل از دو سر a و b یک منبع ولتاژ تست V_t به دو سر آن وصل می‌کنیم و با نوشتن معادلات

مش داریم:



$$\begin{cases} I_t = I_t \\ V_x = I_t - I_r = I_t - I_r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{KVL (1)}: I_t + 2(I_t - I_r) &= V_t \\ \text{KVL}: I_r + KV_x + 2(I_r - I_t) &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} 3I_t - 2I_r = V_t \\ (K-2)I_t + (3-K)I_r = 0 \end{cases}$$

با استفاده از دو رابطه به دست آمده داریم:

$$I_r = \frac{3I_t - V_t}{2}$$

$$(K-2)I_t + (3-K)\left(\frac{3I_t - V_t}{2}\right) = 0 \rightarrow 2(K-2)I_t + (3-K)(3I_t - V_t) = 0 \rightarrow (3-K)V_t = (5-K)I_t$$

بنابراین:

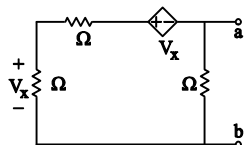
$$R_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{5-K}{3-K} < 0 \rightarrow 3 < K < 5$$

در نتیجه به ازای $K = 4$ مقاومت دیده شده از دو سر a و b منفی است.

۱۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با استفاده از تبدیل نورتن و تونن، منبع جریان وابسته را به منبع ولتاژ معادل آن تبدیل می‌کنیم و برای یافتن مقاومت

معادل از دو سر a و b منبع جریان مستقل را صفر می‌کنیم:



با توجه به این که ولتاژ دو سر مقاومت یک اهمی سمت چپ برابر V_x است پس جریان عبوری از آن نیز V_x می‌باشد و

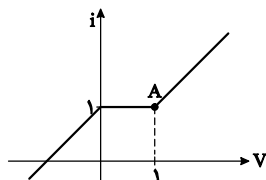
با اعمال KVL در مش فوق داریم:

$$\text{KVL}: V_{ab} = -2V_x + V_x + V_x = 0 \rightarrow V_{ab} = 0$$

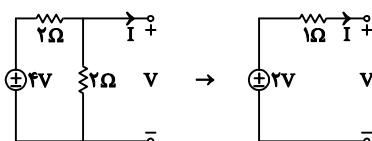
پس مدار مانند یک شاخه اتصال کوتاه است و مقاومت معادل آن برابر صفر می‌باشد.

۱۴- گزینه ی «۴» صحیح است.

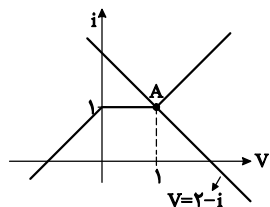
مشخصه اتصال موازی دو عنصر غیرخطی با توجه به جهت ولتاژها به صورت زیر به دست می آید: (به ازای ولتاژهای برابر، جریان ها با هم جمع می شوند).



مدار معادل تونن قسمت خطی دیده شده از دو سر قسمت غیرخطی به صورت زیر است:



معادله خط بار توصیف کننده آن با توجه به جهت جریان مربوط به قسمت غیرخطی به صورت $V = 2 - i$ است که با تلاقی آن با مشخصه اتصال موازی قسمت غیرخطی، نقطه کار مدار غیرخطی به دست می آید:

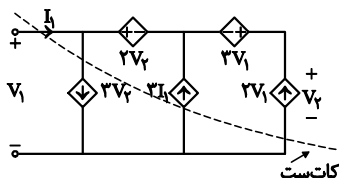


نقطه کار $A \Big|_{\substack{V=1 \\ i=1}}$

اگر ولتاژ دو سر دیود برابر یک ولت باشد، با توجه به مشخصه آن، جریان گذرنده از آن برابر صفر است. بنابراین توان مصرفی دیود برابر صفر است.

۱۵- گزینه ی «۳» صحیح است.

با نوشتن KVL در مش بیرونی و KCL زدن در کات است نشان داده شده داریم:



$$\text{KVL: } 2V_r - 3V_1 + V_r = V_1 \rightarrow 3V_r = 4V_1$$

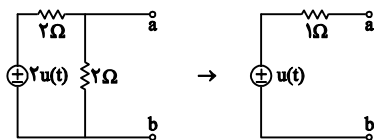
$$\text{KCL: } i_1 = 3V_r - 3i_1 - 2V_1 \rightarrow 4i_1 = 3V_r - 2V_1 = 4V_1 - 2V_1 = 2V_1 \rightarrow V_1 = 2i_1$$

در نتیجه:

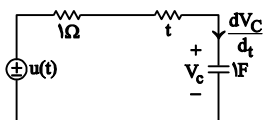
$$R_{in} = R_{ab} = \frac{V_1}{i_1} = 2\Omega$$

۱۶- گزینه ی «۱» صحیح است.

ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر a, b را به جای طرف سمت چپ مدار قرار می دهیم:



در نتیجه با اعمال KVL در مدار شکل زیر داریم:



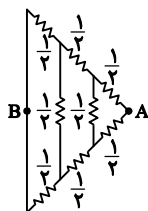
$$\text{KVL: } u(t) = (t+1) \frac{dV_c}{dt} + V_c \rightarrow u(t) = \frac{d}{dt} [(t+1) V_c(t)]$$

$$\xrightarrow{\int} \int_0^t u(t) dt = \int_0^t \frac{d}{dt} [(t+1) V_c(t)] dt \rightarrow t = (t+1) V_c(t)$$

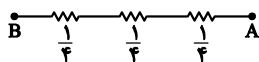
$$\rightarrow V_c(t) = \frac{t}{t+1}$$

۱۷- گزینه ی «۴» صحیح است.

اگر مدار را از روی محور تقارنی که از AB می گذرد تا کنیم، چون دو سر مقاومت های افقی روی همدیگر می افتد، این مقاومت ها حذف شده و داریم:



و اگر باز مدار را از روی محور تقارن که از AB می گذرد تا کنیم، با حذف مقاومت های عمودی که دو سر آن ها اتصال



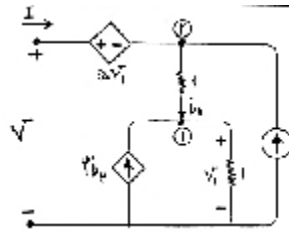
کوتاه می شود خواهیم داشت:

بنابراین:

$$R_{AB} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Omega$$

۱۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

ابتدا مدار معادل تونن دیده شده از دو سر مقاومت غیرخطی را به دست می آوریم:



$$\text{KCL}(1): 3i_r + i_r = V_1 \rightarrow V_1 = 4i_r$$

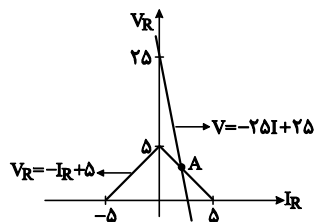
$$\text{KVL}: V = 5V_1 + i_r + V_1 = 6V_1 + i_r = 24i_r + i_r = 25i_r$$

$$\text{KCL}(2): i_r = I + 1 \rightarrow V = 25(I + 1) = 25I + 25$$

در نتیجه مشخصه $V - I$ سمت راست مدار به صورت $V = 25I + 25$ می باشد که با توجه به نحوه به هم پیوستن مقاومت غیرخطی و طرف راست مدار می توان گفت:

$$\begin{cases} V = V_R \\ I = -I_R \end{cases}$$

یعنی در معادله مشخص دو سر مدار سمت راست، I را به $-I$ تبدیل می کنیم و خط $V = -25I + 25$ را با مشخصه مقاومت غیرخطی تلاقی می دهیم:



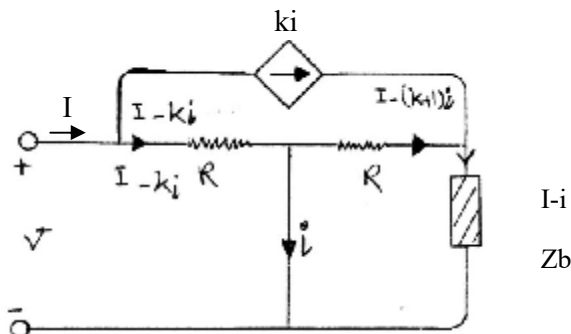
$$\begin{cases} V = V_R = -25I_R + 25 \\ V_R + I_R = 5 \end{cases}$$

بنابراین:

$$-25I_R + 25 = -I_R + 5 \rightarrow I_R = \frac{5}{6} \text{ A} \rightarrow V_R = 5 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6} \text{ V}$$

۱۹- گزینه ی «۱» صحیح است.

با KCL زدن و نوشتن KVL در مدار شکل زیر داریم:



$$\text{KVL در مش سمت راست: } R(I - (K+1)i) + Z_b(I - i) = 0 \rightarrow i = \frac{(R + Z_b)}{R(K+1) + Z_b} I$$

$$\text{KVL در مش سمت چپ: } V = R(I - K_i) = RI - \frac{RK(R + Z_b)}{R(K+1) + Z_b} I$$

$$\rightarrow V = \left(R - \frac{K(R + Z_b)}{R(K+1) + Z_b} \right) I = \frac{R^2 + R(1-K)Z_b}{R(K+1) + Z_b} I$$

بنابراین:

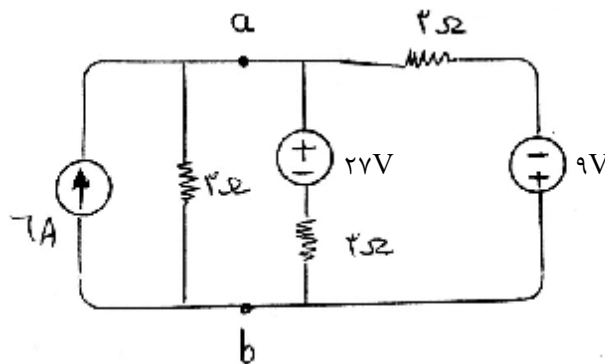
$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{R^2 + RZ_b(1-K)}{R(K+1) + Z_b} = \frac{-RZ_bK + (R^2 + RZ_b)}{RK + (R + Z_b)}$$

در نتیجه:

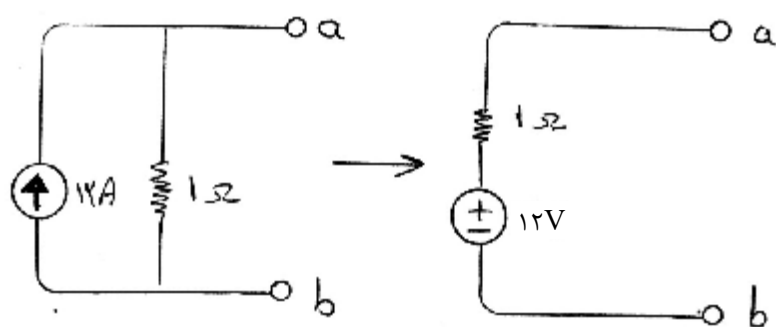
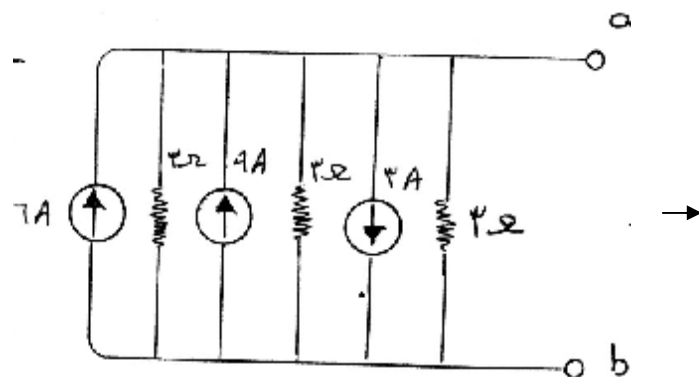
$$\lim_{K \rightarrow \infty} Z_{in} = -\frac{RZ_b}{R} = -Z_b$$

۲۰- گزینه ی «۱» صحیح است.

هر عنصری موازی با منبع ولتاژ و سری با منبع جریان قابل حذف است، پس مدار به صورت زیر ساده می شود.



با تبدیل منابع ولتاژ به جریان داریم:



فصل چهارم: مدارهای مرتبه اول

در فصل‌های قبل، روابط بین ولتاژ و جریان عناصر به صورت جبری بود بنابراین معادلات ناشی از KCL و KVL زدن همگی جبری می‌شدند. اما با ورود خازن و سلف به این مدارات، روابط به صورت معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی تبدیل می‌شوند.

اگر معادله بیان‌کننده یک مدار به صورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول باشد، به آن مدار، مرتبه اول گفته می‌شود. ابتدا به معرفی دو عنصر خازن و سلف که دو عنصر حافظه‌دار می‌باشند، می‌پردازیم. حافظه‌دار بودن خازن و سلف به این معنی است که مقدار ولتاژ (جریان) در آن‌ها به مقادیر گذشته جریان (ولتاژ) بستگی دارد.

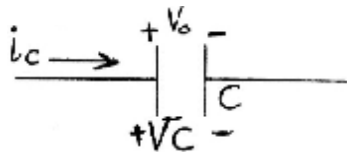
بر همین اساس است که برای خازن، ولتاژ اولیه و برای سلف، جریان اولیه بیان می‌شود. ولی در مقاومت چنین مفاهیمی نداشتیم.

4-1- خازن

در فصل اول به طور کامل به معرفی خازن پرداختیم. در این قسمت اشاره‌ای مختصر به روابط و اتصالات خازن‌ها داریم. برای هر خازن می‌توان گفت:

$$q = C.V$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$



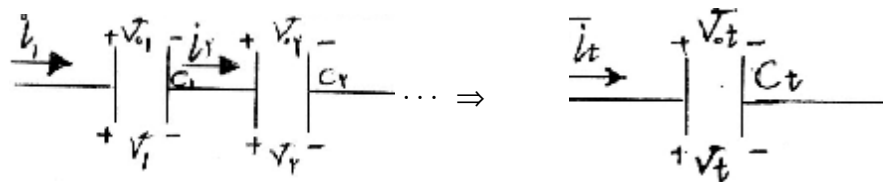
$$V = V_o + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

$$W = \frac{1}{2} q.V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$$

که در این روابط q بار الکتریکی برحسب کولن، C ظرفیت خازن برحسب فاراد، V ولتاژ برحسب ولت، i جریان برحسب آمپر، V_o ولتاژ اولیه خازن برحسب ولت و W انرژی خازن برحسب ژول می‌باشند.

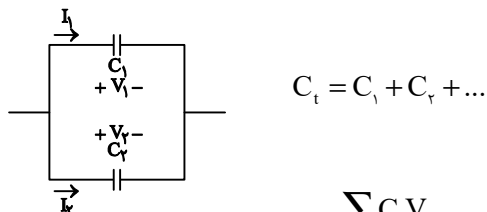
در اتصال سری خازن‌ها می‌توان گفت:

$$C_t = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)^{-1}$$



ولتاژ اولیه خازن معادل $V_{ot} = V_{o1} + V_{o2} + \dots$

و برای اتصال موازی خازن‌ها داریم:



$$C_t = C_1 + C_2 + \dots$$

ولتاژ اولیه خازن معادل $V_{ot} = \frac{q_{ot}}{C_t} = \frac{\sum_i C_i V_{ot}}{\sum_i C_i} = \frac{C_1 V_{o1} + C_2 V_{o2} + \dots}{C_1 + C_2 + \dots}$

اگر خازن‌های از قبل شارژ شده را با هم موازی کنیم، برای هم پتانسیل شدن خازن‌ها، بارها حرکت می‌کنند. اگر مجموع

انرژی خازن‌ها را قبل و بعد از اتصال به‌دست آوریم:

$$W_{\text{قبل از اتصال}} = \frac{1}{2} C_1 V_{o1}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{o2}^2 + \dots$$

$$W_{\text{بعد از اتصال}} = \frac{1}{2} C_t V_{ot}^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2 + \dots) \left(\frac{C_1 V_{o1} + C_2 V_{o2} + \dots}{C_1 + C_2 + \dots} \right)^2$$

دیده می‌شود که:

$$W_{\text{قبل از اتصال}} < W_{\text{بعد از اتصال}}$$

این اختلاف انرژی ΔW که به صورت گرما در سیم‌ها ظاهر می‌شود، صرف حرکت بارها جهت هم پتانسیل شدن

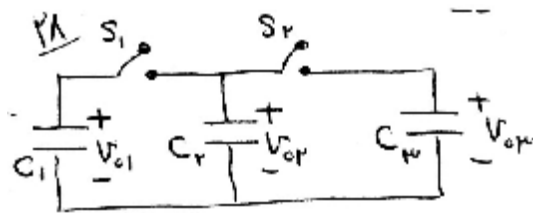
خازن‌ها می‌شود.

$$\Delta W = W_{\text{بعد از اتصال}} - W_{\text{قبل از اتصال}}$$

مثال ۱: در مدار شکل زیر، کلیدهای S_1 و S_2 در لحظه‌ی $t = t_0$ همزمان بسته می‌شوند. انرژی ذخیره شده در مدار در

$t = t_0^-$ تا $t = t_0^+$ چه تغییری می‌کند؟

$C_1 = 2F$	$V_{o1} = 2V$
$C_2 = 3F$	$V_{o2} = 4V$
$C_3 = 5F$	$V_{o3} = 3V$



$$\text{در } t = t^- \text{ قبل از اتصال: } W_1 = \frac{1}{2} (2^2 + 3^2 + 5^2) = 50 / 5 \text{ J}$$

$$\text{در } t = t^+ \text{ بعد از اتصال: } W_2 = \frac{1}{2} (2+3+5) \left(\frac{2^2 + 3^2 + 5^2}{2+3+5} \right) = 48 / 0.5 \text{ J}$$

$$\Delta W = W_1 - W_2 = 50 / 5 - 48 / 0.5 = 2 / 45 \text{ J}$$

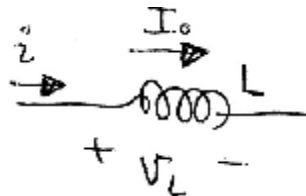
۴-۲- سلف

در فصل اول نیز به طور کامل به معرفی سلف پرداخته شده است. در این جا اشاره‌ای کوتاه به روابط و اتصالات سلف‌ها داریم.

برای هر سلف می‌توان گفت:

$$\phi = L.I$$

$$V = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



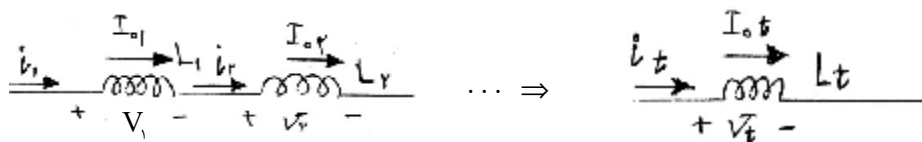
$$i = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$$

$$W = \frac{1}{2} \phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}$$

که در این روابط ϕ شار الکتریکی برحسب وبر، L اندوکتانس سلف برحسب هانری، I جریان برحسب آمپر، V ولتاژ

برحسب ولت، I_0 جریان اولیه برحسب آمپر و W انرژی برحسب ژول است.

در اتصال سری سلف‌ها خواهیم داشت:



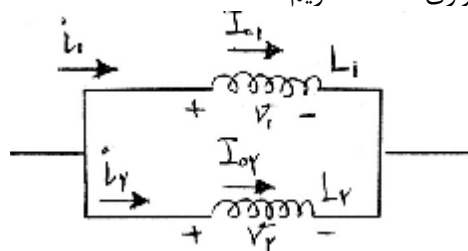
$$L_t = L_1 + L_2 + \dots$$

$$I_{ot} = \frac{\Phi_{ot}}{L_t} = \frac{L_1 I_{o1} + L_2 I_{o2} + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

و برای اتصال موازی سلف‌ها داریم:

$$L_t = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \right)^{-1}$$

$$I_{ot} = I_{o1} + I_{o2} + \dots$$



اگر سلف‌های از قبل شارژ شده را با هم سری کنیم، یک اتلاف انرژی داریم که برای آن می‌توان گفت:

$$W_{\text{قبل از اتصال}} = \frac{1}{2} L_1 I_{o1}^2 + \frac{1}{2} L_2 I_{o2}^2 + \dots$$

$$W_{\text{بعد از اتصال}} = \frac{1}{2} L_t I_{ot}^2 = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 + \dots) \left(\frac{L_1 I_{o1} + L_2 I_{o2} + \dots}{L_1 + L_2 + \dots} \right)^2$$

$$\Delta W = W_{\text{بعد از اتصال}} - W_{\text{قبل از اتصال}}$$

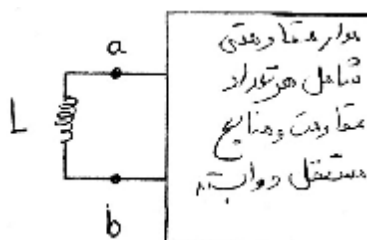
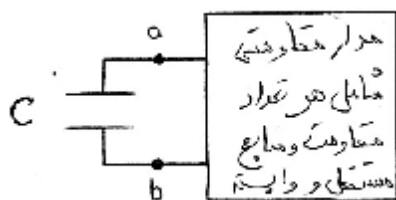
این اختلاف انرژی ΔW ، صرف حرکت شارهای الکتریکی جهت هم جریان شدن سلف‌ها می‌شود.

۳-۴- بررسی مدارهای مرتبه اول

همان‌طور که گفته شد، مداری مرتبه اول است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده آن، مرتبه اول باشد. به عبارت دیگر، مداری شامل هر تعداد مقاومت و منابع مستقل و وابسته و فقط یک خازن مستقل (و یا فقط یک سلف مستقل) را مدار مرتبه اول می‌گویند.

اگر مداری شامل n تا خازن یا n تا سلف باشد، در شرایط خاصی (مخصوصاً در کلیدزنی) خازن‌ها یا سلف‌ها با هم سری یا موازی می‌شوند و در این حالت باز مدار مرتبه اول است و از قوانین مدارهای مرتبه اول پیروی می‌کند.

برای تحلیل و بررسی مدارهای مرتبه اول، خازن یا سلف را از آن بیرون آورده و مدار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

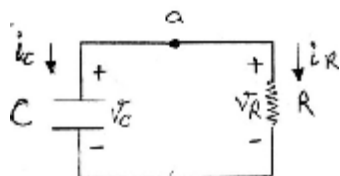


در هر یک از مدارهای فوق، برای تحلیل مدار مرتبه اول دو روش وجود دارد:

4-3-1- نوشتن معادله دیفرانسیل و حل آن

روش کلی تحلیل و حل مدارهای شامل خازن و سلف (از هر مرتبه‌ای)، نوشتن معادله دیفرانسیل و سپس حل آن است. برای مدارهای مرتبه اول خازنی یا سلفی نیز می‌توان با استفاده از روابط بخش ۴-۱ و ۴-۲، معادله دیفرانسیل مربوطه را تشکیل داده و سپس آن را حل کرد.

به عنوان مثال، برای مدار RC در شکل زیر داریم:



$$V_C(\cdot^+) = V_0$$

$$\text{KCL در گره } a: i_C + i_R = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_R}{R} = 0$$

$$\xrightarrow{V_C = V_R} C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = 0$$

با حل این معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول خطی همگن:

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

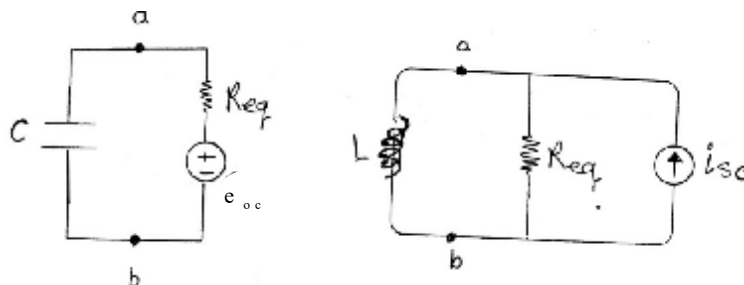
که منحنی آن به صورت زیر می‌باشد:



این روش حل، کار نسبتاً طولانی و زمان‌بری است. بنابراین از روش دیگری که ما را سریع‌تر به پاسخ می‌رساند، استفاده می‌کنیم.

4-3-2- روش نظری در تحلیل مدارهای مرتبه اول

در این حالت مدار معادل تونن یا نورتن از دو سر خازن (یا سلف) بیرون آورده شده از مدار، در شکل قبل را به دست می‌آوریم:



و با تحلیل این دو مدار، می‌توان پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل مدار مرتبه اول را به دست آورد. می‌دانیم که پاسخ ورودی صفر یعنی پاسخ، وقتی که ورودی صفر است؛ یعنی پاسخ فقط ناشی از شرایط اولیه است. و پاسخ حالت صفر، یعنی زمانی که شرایط اولیه صفر است و به عبارت دیگر، پاسخ فقط ناشی از ورودی است و پاسخ کامل، مجموع پاسخ‌های ورودی صفر و پاسخ حالت صفر می‌باشد. بر این اساس، در مدارهای مرتبه اول خطی و با ورودی DC، پاسخ کامل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$y(t) = [y(\infty) - y(0)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(0)$$

که y هر سیگنالی (ولتاژ یا جریان) از مدار مرتبه‌ی اول است.

برای استفاده از این رابطه باید اجرای آن را به طور کامل بشناسیم و نحوه‌ی به دست آوردن آن‌ها را بررسی نماییم:

۱- ثابت زمانی یا τ

ثابت زمانی فقط مربوط به مدارهای مرتبه اول می‌باشد به طوری که هر مدار مرتبه اول پس از مدت زمانی بین ۴ تا ۵ برابر آن به مقدار نهایی یا ماندگار خود می‌رسد.

ثابت زمانی مدارهای مختلف به صورت زیر بیان می‌شود:

$$RC \text{ مدارهای } \tau = R_{eq} \quad C$$

$$RL \text{ مدارهای } \tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

که در آن R_{eq} مقاومت معادل دیده شده از دو سر سلف یا خازن است. پس به دست آوردن ثابت زمانی معادل است با

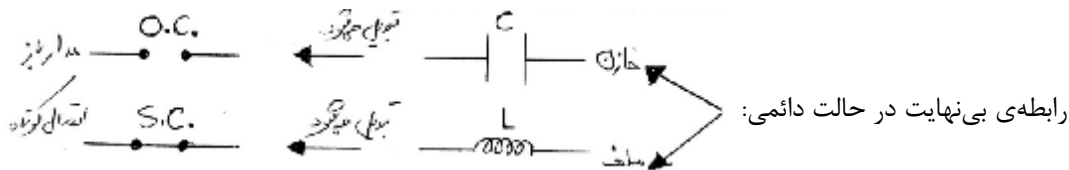
یافتن مقاومت معادل دیده شده از دو سر خازن یا سلف.

نکته: در مدارهای مرتبه اول، زمان‌های بزرگتر از 5τ را بی‌نهایت (از دید فیزیکی) در نظر می‌گیریم حتی اگر این بی‌نهایت کمتر از چند میلی ثانیه باشد!

۲- $y(\infty)$

$y(\infty)$ یعنی مقدار سیگنال موردنظر (ولتاژ یا جریان) در حالت دائمی.

برای به دست آوردن مقدار ولتاژ یا جریان موردنظر در حالت دائمی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

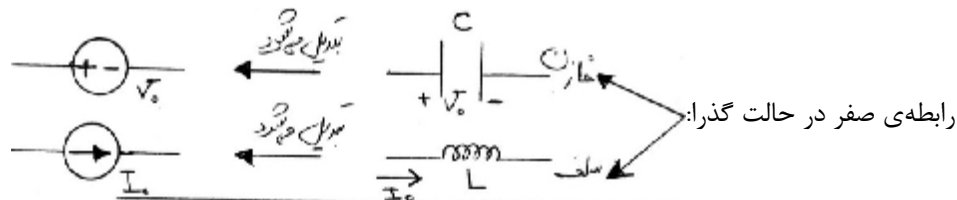


یعنی به جای خازن، مدار باز و به جای سلف، اتصال کوتاه قرار می‌دهیم و با این تغییرات مدار را تحلیل می‌کنیم تا $y(\infty)$ را در حالت دائمی به دست می‌آوریم.

۳- $y(0)$

$y(0)$ یعنی مقدار سیگنال موردنظر در لحظه‌ی صفر که مربوط به حالت گذرا می‌باشد.

برای این منظور از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:



یعنی به جای خازن، یک منبع ولتاژ با مقدار V_s (ولتاژ اولیه خازن) و به جای سلف، یک منبع جریان با مقدار I_s (جریان اولیه سلف) قرار می‌دهیم و با این تغییرات مدار را تحلیل می‌کنیم تا $y(0)$ را به دست می‌آوریم.

نکته: اگر خازن یا سلف دارای شرایط اولیه نباشند، به جای خازن، اتصال کوتاه (منبع ولتاژ صفر شده) و به جای سلف، مدار باز (منبع جریان صفر شده) قرار می‌دهیم.

* کلیدزنی

یکی از زمان‌های بسیار مهم در تحلیل مدارهای مرتبه اول، زمان کلیدزنی یا لحظه‌ی صفر است. در اصل، زمانی که با

قطع یا وصل کردن کلیدی در مدار، شرایط مسأله تغییر می‌کند، این زمان را زمان کلیدزنی یا لحظه‌ی صفر $t = 0$ می‌نامیم.

برای پیدا کردن مقدار سیگنال موردنظر در این زمان، باید توجه نمود که با دو جور صفر سر و کار داریم. یکی $t = 0^-$ که بلافاصله قبل از کلیدزنی است و یکی $t = 0^+$ که بلافاصله پس از کلیدزنی می‌باشد.

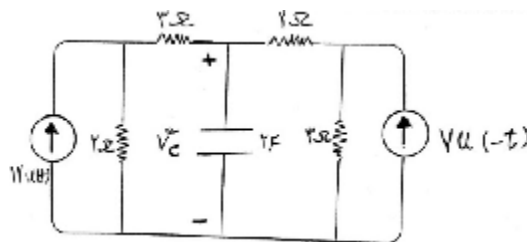
می‌توان گفت 0^+ از جنس صفر می‌باشد و برای یافتن $y(0^+)$ از رابطه‌ی صفر استفاده می‌کنیم و 0^- از جنس بی‌نهایت است (0^- یعنی بی‌نهایت ثانیه پس از $-\infty$) و برای به دست آوردن $y(0^-)$ از رابطه‌ی بی‌نهایت بهره می‌گیریم. پس به طور کلی می‌توان گفت:

$t = 0^+ \leftarrow$ از جنس صفر $\leftarrow$ استفاده از رابطه‌ی صفر برای به دست آوردن $y(0^+)$

لحظه‌ی کلیدزنی $t = 0$

$t = 0^- \leftarrow$ از جنس بی‌نهایت $\leftarrow$ استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت برای به دست آوردن $y(0^-)$

مثال ۲: در مدار شکل زیر $V_C(t)$ را به دست آورید.

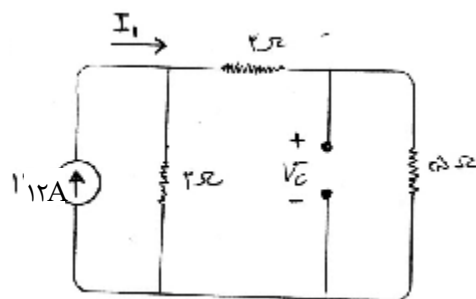


برای یافتن τ ، از دو سر خازن R_{eq} را پیدا می‌کنیم:

$$R_{eq} = (3 + 2) \parallel (2 + 3) = 2 / 5 \Omega$$

$$\tau = R_{eq} C = 2 / 5 \quad 2 = 5S$$

برای محاسبه‌ی $y(\infty)$ ، با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت و صفر بودن منبع $7u(-t)$ در آن زمان داریم:

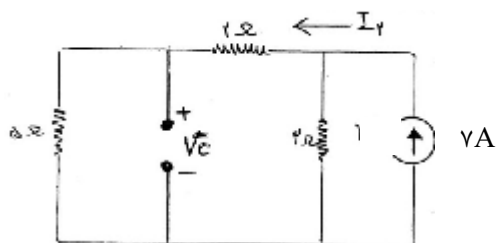


$$I_1 = \frac{2}{2+3+5} \quad 12 = 2/4A$$

$$V_C(\infty) = 5I_1 = 5 \cdot 2/4 = 12V$$

برای محاسبه $V(0^+)$ از رابطه‌ی صفر نمی‌توان استفاده کرد بلکه با توجه به پیوسته بودن ولتاژ خازن، $V(0^-)$ را با استفاده

از رابطه‌ی بی‌نهایت به دست می‌آوریم و آن را با $V(0^+)$ برابر قرار می‌دهیم:



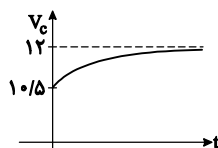
$$I_2 = \frac{3}{3+2+5} \quad 7 = 2/1A$$

$$V_C(0^-) = 5I_2 = 10/5V \rightarrow V_C(0^+) = 10/5V$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$V_C(t) = [V_C(0^+) - V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + V_C(\infty) = (10/5 - 12)e^{-\frac{t}{5}} + 12 \rightarrow V_C(t) = -1/5e^{-\frac{t}{5}} + 12$$

که شکل آن به صورت زیر است:



همان‌طور که در حل این مثال دیدیم، از پیوستگی ولتاژ خازن استفاده نمودیم. در حالت کلی می‌توان گفت:

4-3-3- قضیه پیوستگی

در مدارهای مرتبه اول، ولتاژ خازن و جریان سلف نمی‌توانند به طور ناگهانی تغییر کنند (موارد استثنائی وجود دارد که

بعداً بررسی می‌کنیم)، پس در لحظه‌ی $t = t_0$ از رابطه صفر استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توان با توجه به پیوسته بودن ولتاژ خازن و جریان سلف، با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت در لحظه‌ی $t = t_0^-$ مدار را تحلیل نموده و مقادیر به دست آمده را برای زمان $t = t_0^+$ بکار برد.

نکته: در مدارهای مرتبه‌ی اول، هنگامی که سیگنالی را بلافاصله پس از کلیدزنی (مثلاً در $t = 0^+$) می‌خواهیم، در مرحله اول مدار را در $t = 0^-$ رسم می‌کنیم (با استفاده از رابطه‌ی بی‌نهایت) و مقادیر $V_C(0^-)$ یا $I_L(0^-)$ را به دست می‌آوریم.

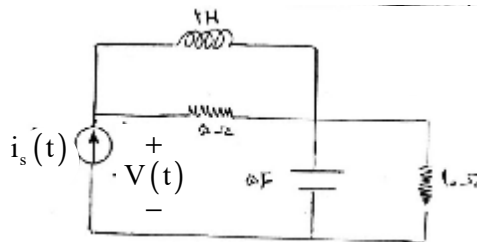
سپس با استفاده از قضیه پیوستگی می‌توان گفت:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

و در مرحله دوم مدار را در $t = 0^+$ رسم می‌کنیم (با استفاده از رابطه صفر) و سپس با تحلیل مدار، هر سیگنالی را در $t = 0^+$ به دست می‌آوریم.

مثال ۳: در مدار شکل زیر، اگر $i_s(t) = 50u(-t)$ باشد، ولتاژ دو سر منبع جریان را در $t = 0^+$ به دست آورید.

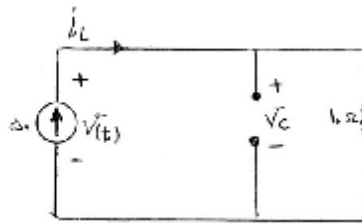


مدار فوق یک مدار مرتبه دوم می‌باشد ولی با اطلاعات مدارهای مرتبه اول نظیر رابطه‌ی صفر و رابطه‌ی بی‌نهایت، می‌توان این مدار را تحلیل نمود.

در حالت کلی روابط صفر و بی‌نهایت برای هر مدار مرتبه‌ی n صادق است.

با توجه به ورودی، مدار از زمان ∞ فعال است. پس برای بررسی آن در $t = 0^-$ از رابطه‌ی بی‌نهایت بهره می‌گیریم. در این حالت خازن اتصال باز و سلف اتصال کوتاه است.

$$V_C(0^-) = V(0^-) = 50 \times 10 = 500 \text{ V}$$



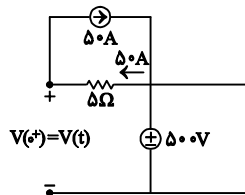
$$i_L(\cdot^-) = 50 \text{ A}$$

بنابراین داریم:

$$V_C(\cdot^+) = 500 \text{ V}$$

$$i_L(\cdot^+) = 50 \text{ A}$$

و حالا برای بررسی مدار در لحظه‌ی $t = \cdot^+$ با استفاده از رابطی صفر خواهیم داشت:



$$\text{KVL: } V(\cdot^+) = -250 + 500 \rightarrow V(\cdot^+) = 250 \text{ V}$$

۴-۴- انواع پاسخ در مدارهای مرتبه اول

هر پاسخی در مدارهای مرتبه اول به صورت نمایی است. از دو دیدگاه می‌توان پاسخ در مدارهای مرتبه اول را بررسی نمود:

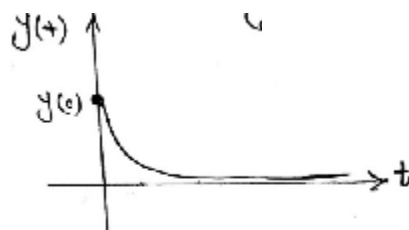
۱- دیدگاه اول

در این حالت پاسخ به سه دسته پاسخ ورودی صفر، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل تقسیم می‌شوند.

الف) پاسخ ورودی صفر: در این حالت کلیه منابع را صفر می‌کنیم، پس $y(\infty) = 0$ می‌شود. بنابراین پاسخ ورودی

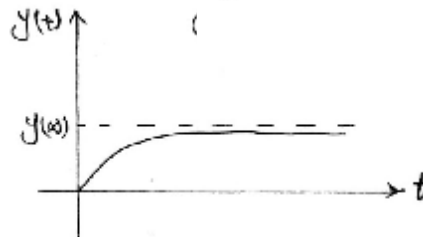
صفر برابر است با:

$$y(t) = y(\cdot) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



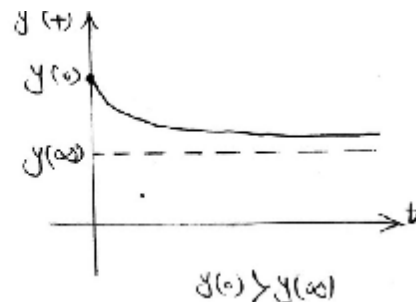
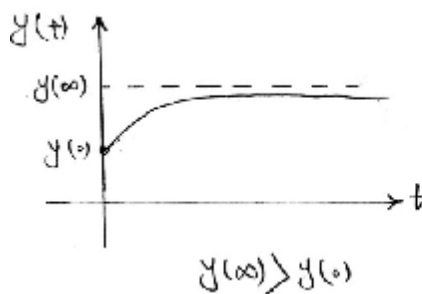
ب) پاسخ حالت صفر: در این حالت شرایط اولیه صفر است، پس $y(0) = 0$ است. بنابراین:

$$y(t) = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



ج) پاسخ کامل: مجموع دو پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر است.

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$



۲- دیدگاه دوم

در این حالت پاسخ به سه دسته پاسخ گذرا، پاسخ ماندگار و پاسخ کامل دسته‌بندی می‌شود.

الف) پاسخ گذرا: قسمتی از پاسخ که وقتی $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند، صفر می‌شود.

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ب) پاسخ ماندگار: حد پاسخ وقتی که $t \rightarrow \infty$ میل می‌کند.

$$y(t) = y(\infty)$$

ج) پاسخ کامل: مجموع دو پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار را گویند.

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty)$$

باید توجه داشت که پاسخ گذرا ناشی از ورودی و شرایط اولیه است و پاسخ ماندگار فقط ناشی از ورودی می‌باشد.

نکته: زمانی که $y(0) = y(\infty)$ باشد، در این حالت پاسخ گذرا وجود ندارد و برای پاسخ کامل خواهیم داشت:

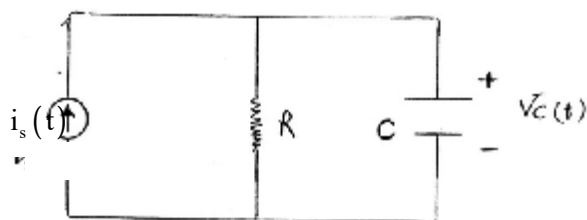
$$y(t) = y(\infty)$$

۴-۵- پاسخ پله در مدارهای مرتبه اول

در این حالت ورودی مدار را $u(t)$ در نظر می‌گیریم و پاسخ به ورودی پله را در حالت صفر، به دست می‌آوریم. پاسخ پله را با $S(t)$ نمایش می‌دهند.

مثلاً در مدار شکل زیر، برای پاسخ پله ولتاژ دو سر خازن داریم:

$$i_s(t) = u(t)$$



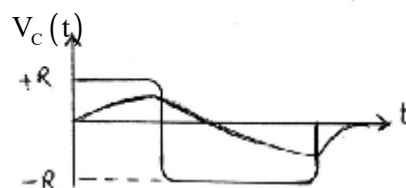
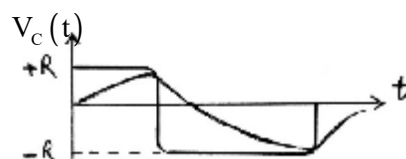
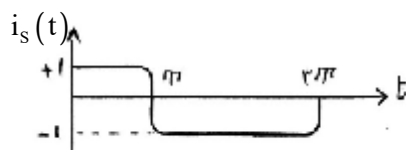
$$S(t) = V_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$

نکته: زمان کافی برای شارژ و دشارژ خازن (یا سلف) زمانی است که مدت زمان اعمال پالس T به مدار، از 5τ (پنج

برابر ثابت زمانی مدار) بزرگتر باشد. در غیر این صورت خازن (یا سلف) به صورت ناقص شارژ و دشارژ می‌شوند.

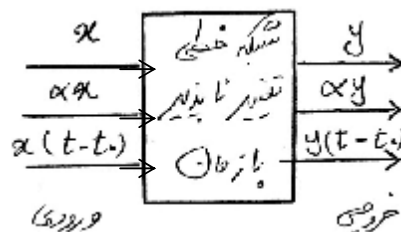
مثلاً اگر به مدار شکل قبل، ورودی زیر که ترکیبی از توابع پله است اعمال شود، خروجی می‌تواند به دو صورت ظاهر

شود:



در حالت اول با استفاده از قضیه جمع آثار، در T ثانیه اول عمل شارژ خازن و بعد تغییر پلاریته ولتاژ از $+R$ به $-R$ و در نهایت پس از زمان $3T$ خازن دشارژ می‌شود. در این حالت $T \geq 5\tau$ است. ولی در حالت دوم $T \leq 5\tau$ است و عمل شارژ و دشارژ خازن به طور کامل انجام نمی‌شود.

نکته: در مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (شبکه‌های LTI که بعداً مفصلاً توضیح داده می‌شوند)، با اعمال هر تغییر خطی در ورودی (نظیر ضریب یک عدد، شیفت زمانی، مشتق، انتگرال، فوریه و ...)، همان تغییر عیناً در خروجی نیز اعمال می‌شود.



مثال ۴: در یک مدار RC ، به ازای دریافت سیگنال پله واحد، ولتاژ خازن برابر $V_C(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ است. اگر ولتاژ اولیه خازن یک ولت باشد و سیگنال ورودی $3u(t)$ اعمال شود، پاسخ $V_C(t)$ را به دست آورید.

حل: پاسخ ناشی از ورودی $3u(t)$ برابر شده است، پس خروجی نیز 3 برابر می‌شود، یعنی:

$$V_C(t) = 3(1 - e^{-t/\tau}) = 3 - 3e^{-t/\tau}$$

پاسخ ناشی از شرایط اولیه $V_0 = 1V$: برای خروجی ناشی از شرایط اولیه داریم:

$$V_C(t) = 1e^{-t/\tau}$$

و در نتیجه پاسخ کامل برابر است با:

$$V_C(t) = 3 - 3e^{-t/\tau} + 1e^{-t/\tau} = 3 - 2e^{-t/\tau}$$

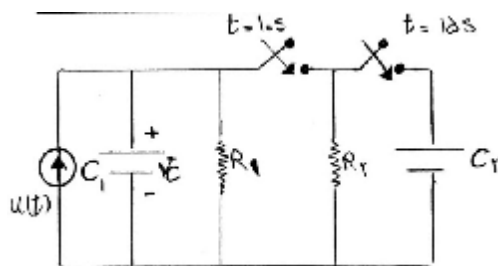
۴-۶- مدارهای مرتبه اول با چند ثابت زمانی

در این گونه مدارهای مرتبه اول، در لحظه‌های کلیدزنی، مقاومت یا خازنی (و یا سلفی) به مدار اضافه و یا از مدار کم می‌شود که این حالت باعث تغییر ثابت زمانی در زمان‌های بعد از کلیدزنی می‌شود.

شایان ذکر است که در معادلات مربوطه بعد از کلیدزنی باید به جای t مقدار $t = t_0$ را قرار دهیم (t_0 لحظه‌ی کلیدزنی)، به عبارت دیگر شیفت زمانی پاسخ را در نظر داشته باشیم.

با تحلیل یک مثال مفهوم مدارهای مرتبه اول با چند ثابت زمانی را بیش‌تر بررسی می‌کنیم.

مثال ۵: در مدار شکل زیر، ولتاژ خازن C_1 را به دست آورید و رسم نمائید. (به زمان قطع و وصل کلیدها دقت کنید).

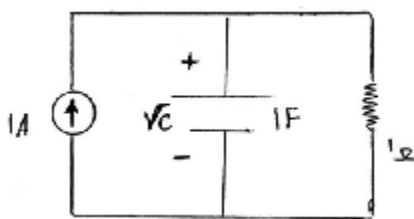


$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 1\Omega \\ C_1 = C_2 = 1F \\ V_{C1}(\cdot^-) = V_{C2}(\cdot^-) = 0 \end{cases}$$

در هر بازه زمانی، مسأله را به صورت مجزا بررسی می‌کنیم. در هر قسمت مدار مرتبه اول است ولی ثابت زمانی تغییر می‌کند.

$$0 < t < 1s$$

(الف)

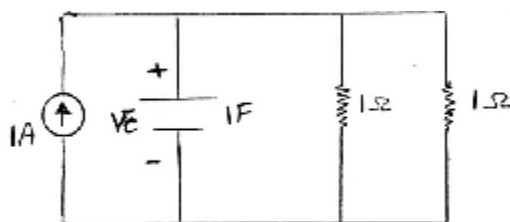


$$\begin{cases} \tau_1 = 1 \quad 1 = 1s \\ V_C(0) = 0 \rightarrow V_C(t) = 1 - e^{-t} \\ V_C(\infty) = 1V \end{cases}$$

با توجه به این که $10s > 5\tau_1$ است، پس ولتاژ خازن به مقدار نهایی‌اش می‌رسد و کامل شارژ می‌شود.

$$1s < t < 15s$$

(ب)



$$\begin{cases} R_{eq} = 1 \parallel 1 = \frac{1}{2}\Omega \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2}s \\ C = 1F \end{cases}$$

در این قسمت، مقدار اولیه این بازه از مقدار نهایی بازه قبل به دست می‌آید. (پیوستگی ولتاژ خازن)

$$V_C(1 \cdot s) = 1 - e^{-t} \Big|_{t=1 \cdot s} = 1 - e^{-1} ; 1V$$

$$V_C(\infty) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V$$

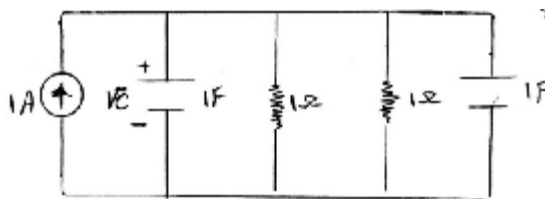
و در نتیجه داریم:

$$V_C(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t-1}{\Delta}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{-2(t-1)} + \frac{1}{2}$$

در این بازه زمانی نیز $\Delta t_1 < \Delta t$ و زمان برای رسیدن ولتاژ به مقدار نهایی $\frac{1}{2} V$ کافی است.

$$t > 1 \Delta s$$

(ج)



در این حالت به دلیل کلیدزنی، دو خازن C_1 و C_2 موازی می‌شوند.

یکی از این خازن‌ها دارای ولتاژ اولیه $0.5V$ (خازن C_1) و دیگری بدون ولتاژ اولیه می‌باشد. برای ولتاژ اولیه‌ی خازن

معادل می‌توان گفت:

$$V_C(0) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{4} V$$

بنابراین ولتاژ خازن معادل یا V_C در لحظه‌ی $t = 1 \Delta s$ برابر $\frac{1}{4} V$ است.

پس داریم:

$$R_{eq} = 1 \parallel 1 = \frac{1}{2} \Omega \rightarrow \tau_r = \frac{1}{2} \quad \tau = 1s$$

$$C_{eq} = 1 + 1 = 2F$$

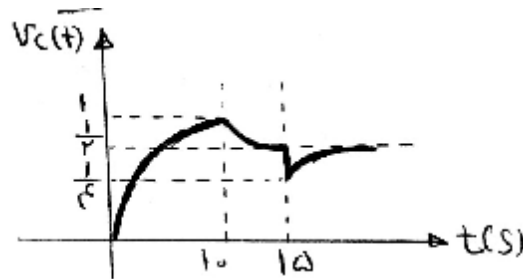
$$V_C(\infty) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V$$

$$V_C(t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t-1}{1}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}$$

بنابراین می‌توان بیان کرد که:

$$V_C(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & , \quad 0 < t < 10s \\ \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} + \frac{1}{2} & , \quad 10s < t < 15s \\ -\frac{1}{4}e^{-(t-15)} + \frac{1}{2} & , \quad t > 15s \end{cases}$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



ملاحظه می‌شود که در $t = 15s$ در ولتاژ خازن پیوستگی وجود ندارد.

پس استثناءهای قضیه پیوستگی به صورت زیر بیان می‌شود:

نکته: ولتاژ خازن و جریان سلف، سیگنال‌های پیوسته‌ای می‌باشند به جزء در موارد زیر:

۱- «سری شدن سلف‌های از قبل شارژ شده» و «موازی شدن خازن‌های از قبل شارژ شده».

۲- وجود منابع (ورودی) ضربه در مدار

۳- «حلقه شامل فقط خازن و منبع ولتاژ» و «گره شامل فقط سلف و منبع جریان»

۴-۷- پاسخ ضربه

در مدارهای مرتبه اول، پاسخ ضربه یعنی پاسخ حالت صفر به ورودی ضربه.

در عمل با اعمال ورودی ضربه، در شرایط اولیه یک جهش ایجاد می‌شود و سپس ورودی از بین می‌رود. به عبارت دیگر،

پاسخ ضربه یک نوع پاسخ ورودی صفر است.

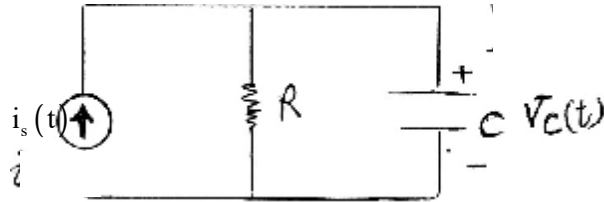
می‌توان گفت: پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله است.

مثلاً پاسخ ضربه در مدار شکل زیر برابر است با:

±

$$i_s(t) = \delta(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



در این مدار مشاهده می شود که:

$$V_C(\cdot^-) = 0$$

$$V_C(\cdot^+) = \frac{1}{C}$$

یعنی در اثر ورودی ضربه، در ولتاژ خازن یک جهش (ناپیوستگی) به میزان $\frac{1}{C}$ ایجاد شده است.

۴-۸- مدارهای مرتبه اول غیرخطی یا متغیر با زمان

برای تحلیل این دسته از مدارهای مرتبه اول، در ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر متغیر موردنظر را می نویسیم و سپس معادله دیفرانسیل را حل می کنیم. معمولاً معادله دیفرانسیل از نوع جدایی پذیر است.

مثال ۶: در مدار شکل زیر $V_C(t)$ را به گونه ای پیدا کنید که:

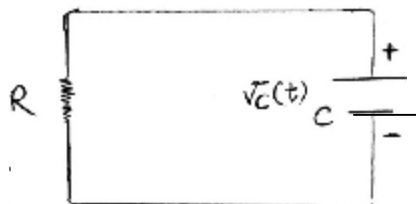
الف) $R = 1\Omega$ و خطی باشد.

ب) $R(t) = \frac{1}{1 + 2 \cos t}$ و تغییرپذیر با زمان باشد.

ج) R یک مقاومت غیرخطی باشد به گونه ای که: $i_R = V_R^2$

$$C = 1F$$

$$V_C(\cdot) = V_0$$



$$\tau = RC = 1 \quad 1 = 1s$$

(الف)

$$V_C(0) = V_0 \quad , \quad V_C(\infty) = 0 \rightarrow V_C(t) = V_0 e^{-t}$$

ب) با نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار:

$$i_C + i_R = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + (1 + r \cos t) V_C = 0 \rightarrow \int_{V_0}^{V_C} \frac{dV_C}{V_C} = \int_0^t -(1 + r \cos t) dt$$

$$\rightarrow \ln \frac{V_C}{V_0} = -(t + r \sin t) \rightarrow V_C(t) = V_0 e^{-(t + r \sin t)}$$

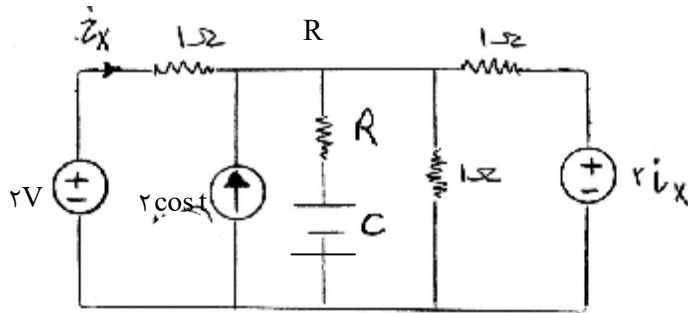
ج) با نوشتن معادله دیفرانسیل مربوطه داریم:

$$i_C + i_R = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + V_R^r = 0 \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + V_C^r = 0 \rightarrow \int_{V_0}^{V_C} -\frac{dV_C}{V_C^r} = \int_0^t dt \rightarrow \frac{1}{V_C} - \frac{1}{V_0} = t \rightarrow V_C(t) = \frac{V_0}{1 + V_0 t}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای مرتبه‌ی اول

۱- در مدار شکل زیر، مقاومت مثبت R را چنان بیابید که اگر به جای خازن C ، سلف $L = C$ قرار دهیم

ثابت زمانی مدار تغییری نکند.



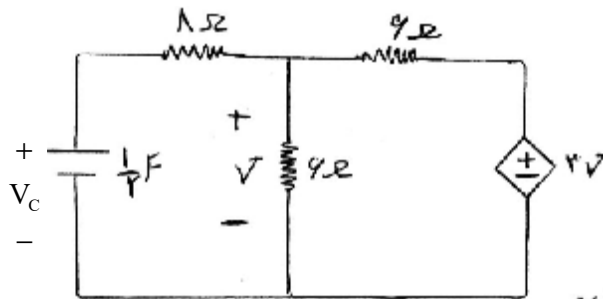
(۱) 8Ω

(۲) 6Ω

(۳) 2Ω

(۴) 5Ω

۲- در مدار شکل زیر، در لحظه‌ی $t = t_0$ ولتاژ خازن ۲ ولت است. چند ثانیه بعد از $t = t_0$ ولتاژ V نصف می‌شود؟



(۱) $2\ln 2$

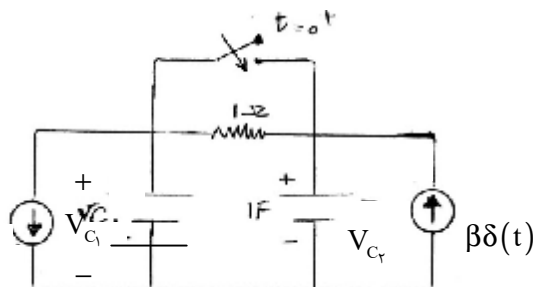
(۲) $t_0 + 2\ln 2$

(۳) $\ln 2$

(۴) $\sqrt{2}\ln 2$

۳- در مدار شکل زیر، کلید در $t = 0^+$ وصل می‌شود. بین ∞ و β چه رابطه‌ای برقرار باشد تا بلافاصله بعد از

وصل کلید ولتاژ خازن ۱F، برابر یک ولت شود؟ (ولتاژ هر دو خازن در $t = 0^-$ برابر صفر است.)



(۱) $\beta = \frac{3}{2}\alpha + 1$

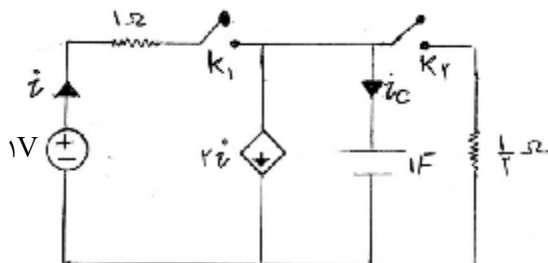
(۲) $\beta = \frac{3}{2}\alpha - 1$

(۳) $\beta = \alpha - \frac{3}{2}$

(۴) $\beta = \alpha + \frac{3}{2}$

۴- در مدار شکل زیر، خازن بدون ولتاژ اولیه بوده و کلید K_1 در $t = 0$ بسته می‌شود. پس از یک ثانیه، کلید

K_2 را نیز می‌بندیم. میزان تغییر i_C در لحظه‌ی $t = 1 \text{ sec}$ چند آمپر است؟



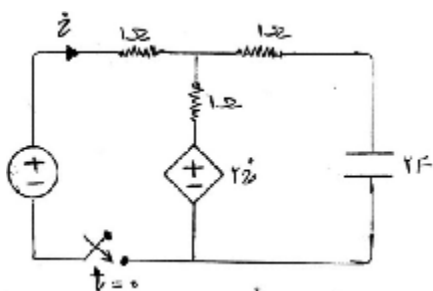
(۱) $-2(e-1)$

(۲) $-2e$

(۳) $2(e-1)$

(۴) $2e$

۵- در مدار شکل مقابل، کلید در $t = 0$ بسته می‌شود. $i(t)$ کدام است؟



(۱) $i(t) = 1 + 0.6e^{-t/4}$

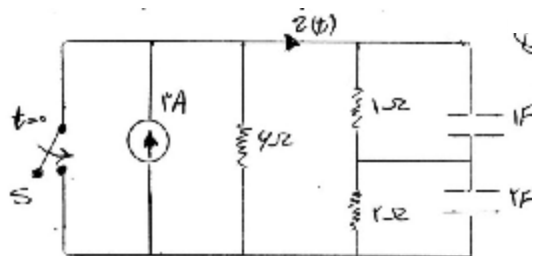
(۲) $i(t) = 0.6 + e^{-t/4}$

(۳) $i(t) = 1 + 0.6e^{-t/4}$

(۴) $i(t) = 0.6 + e^{-t/4}$

۶- در مدار شکل زیر کلید S برای مدت زمان طولانی باز بوده و در $t = 0$ بسته می‌شود. $i(t)$ برای زمان‌های

$t \geq 0$ مطابق کدام گزینه است؟



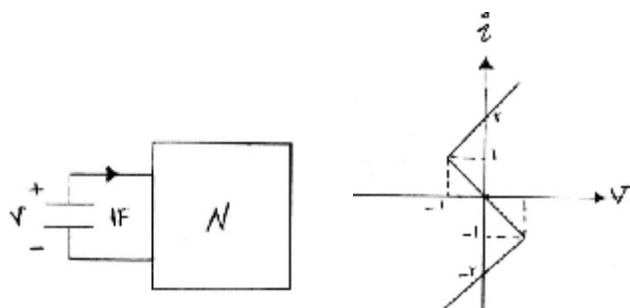
(۱) $-4\delta(t) - e^{-t}$

(۲) $-2\delta(t) - e^{-\frac{t}{2}}$

(۳) $-2\delta(t) - e^{-t}$

(۴) $-4\delta(t) - e^{-\frac{t}{2}}$

۷- در مدار شکل زیر، N یک قطبی مقاومتی غیرخطی است که مشخصه $V-i$ آن داده شده است. اگر ولتاژ اولیه خازن برابر -1 ولت باشد، چه مدت طول می کشد تا ولتاژ خازن صفر شود؟



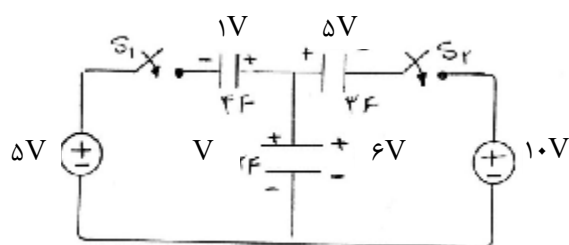
(۱) $\ln \frac{4}{3} \text{ sec}$

(۲) $\ln \frac{3}{2} \text{ sec}$

(۳) $\ln 2 \text{ sec}$

(۴) $\ln 3 \text{ sec}$

۸- کلیدهای S_1 و S_2 در مدار شکل زیر به طور همزمان بسته می شوند. ولتاژ V دو سر خازن 2 فارادی بعد



از بسته شدن کلیدها کدام است؟

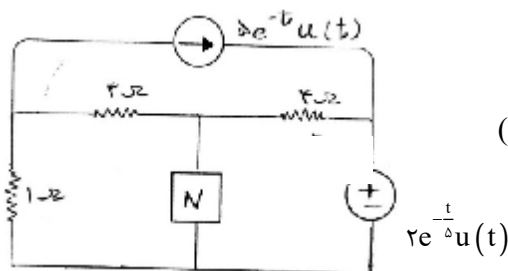
(۱) 3

(۲) 4

(۳) 6

(۴) 9

۹- در مدار شکل زیر، همه ی ولتاژها و جریان ها بعد از مدت زمان طولانی 20 ثانیه تقریباً صفر می شوند. اگر مدت زمان طولانی چهار برابر بزرگترین ثابت زمانی ولتاژها و جریان ها باشد، آنگاه:



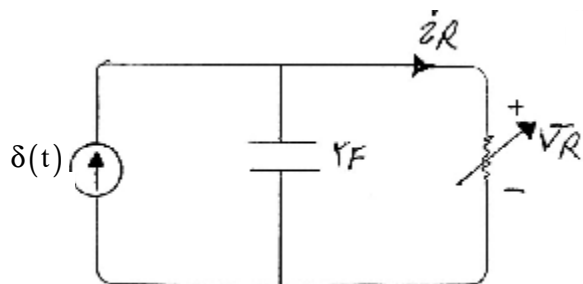
(۱) N یک خازن با مقدار حداکثر $\frac{5}{2} F$ است.

(۲) N یک مقاومت خطی با مقدار دلخواه R اهم است. ($R \neq -2$)

(۳) N یک سلف با مقدار مینیمم $10 H$ است.

(۴) مورد ۱ و ۲.

۱۰- در مدار شکل زیر، مقاومت غیرخطی با معادله‌ی $i_R = V_R + 2V_R$ توصیف می‌شود. پاسخ ضربه V_R این



مدار کدام است؟

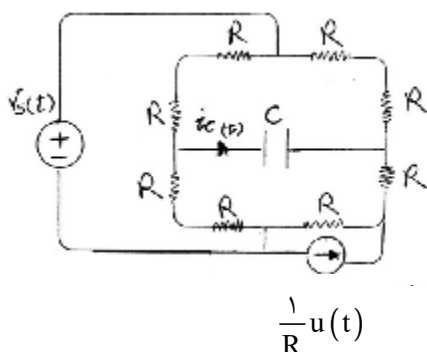
$$(1) \frac{2}{e^{t+Ln\Delta} + 1}$$

$$(2) \frac{2}{e^{t+Ln\Delta} - 1}$$

$$(3) \frac{2}{e^{t-Ln\Delta} - 1}$$

$$(4) \frac{2}{e^{t-Ln\Delta} + 1}$$

۱۱- مدار شکل زیر در $t = 0$ در حالت صفر فرض می‌شود. جریان $i_C(t)$ گذرنده از خازن در این مدار عبارت



است از:

$$(1) -\frac{1}{4R} e^{\frac{t}{RC}} u(t)$$

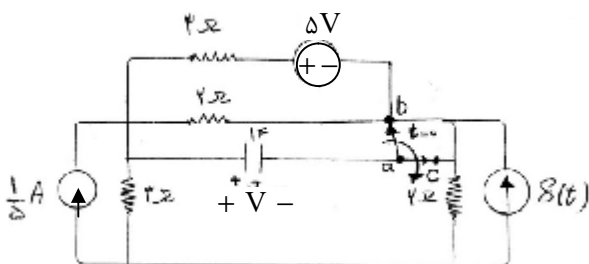
$$(2) -\frac{1}{2R} e^{\frac{t}{2RC}} u(t)$$

$$(3) -\frac{1}{4R} e^{\frac{t}{2RC}} u(t)$$

(4) بدون داشتن ورودی $V_s(t)$ این جریان قابل محاسبه نیست.

۱۲- در مدار شکل زیر کلید S برای مدت طولانی در وضعیت ab قرار دارد. در لحظه $t = 0$ کلید را به

وضعیت ac می‌چرخانیم. ولتاژ $V(t)$ برای $t > 0$ برابر است با:



$$(1) e^{\frac{t}{\Delta}} + \frac{3}{\Delta}$$

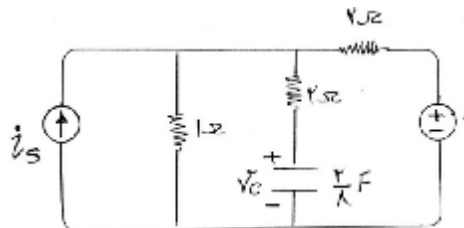
$$(2) \frac{12}{\Delta} e^{\frac{t}{\Delta}} + \frac{3}{\Delta}$$

$$(3) 2e^{\frac{t}{\Delta}} + \frac{3}{\Delta}$$

$$(4) \frac{7}{\Delta} e^{\frac{t}{\Delta}} + \frac{3}{\Delta}$$

۱۳- در مدار شکل زیر اگر ولتاژ اولیه خازن چهار ولت ($V_c(0^-) = 4V$) باشد به ازای چه رابطه‌ای بین منابع

ثابت V_s, i_s ، خازن در $t > 0^-$ هرگز شارژ و دشارژ نمی‌شود؟



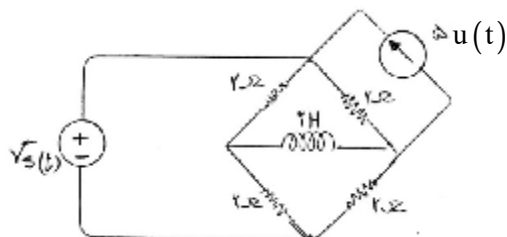
$$V_s = -2i_s \quad (1)$$

$$V_s + 2i_s > 4 \quad (2)$$

$$V_s + 2i_s > 12 \quad (3)$$

$$V_s + 2i_s = 12 \quad (4)$$

۱۴- در مدار شکل زیر $i_L(t)$ برای زمان‌های $t \geq 0$ از کدام گزینه به دست می‌آید؟



$$i_L(t) = 7/5 e^{-t} u(t) \quad (1)$$

$$i_L(t) = 2/5 (1 - e^{-t}) u(t) \quad (2)$$

$$i_L(t) = (7/5 - 5e^{-t}) u(t) \quad (3)$$

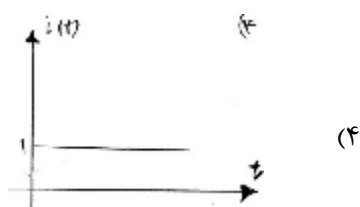
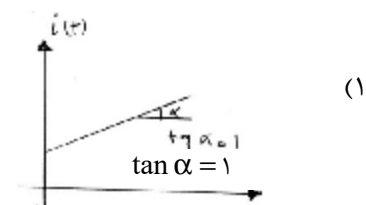
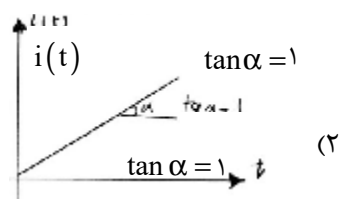
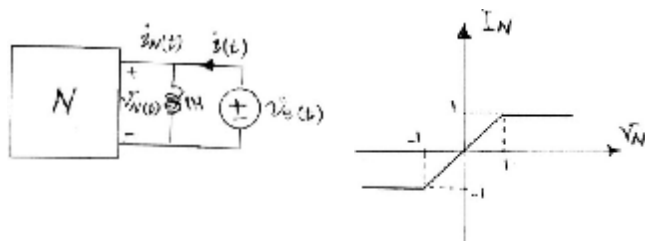
$$V_s(t) = 5 + 5u(t)$$

$$i_L(t) = (7/5 - 2/5 e^{-t}) u(t) \quad (4)$$



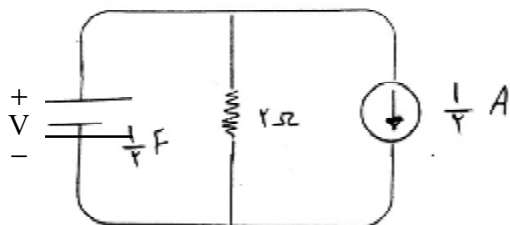
۱۵- منحنی مشخصه شبکه یک قطبی N به صورت زیر است. چنانچه ولتاژ ورودی $V_s(t)$ پله واحد باشد،

مقدار $i(t)$ به کدام صورت خواهد بود؟



۱۶- انرژی منبع جریان مدار شکل زیر در مدتی که ولتاژ خازن از مقدار اولیه ۴ ولت به مقدار ۱ ولت می‌رسد

کدام است؟ ($\ln 25$; ۰/۹۲)



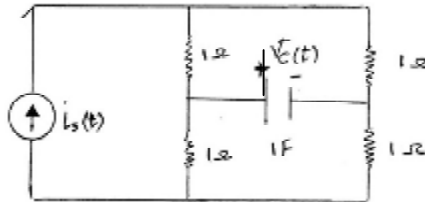
(۱) ۲/۷۱ ژول می‌دهد.

(۲) ۱/۰۴ ژول می‌دهد.

(۳) ۳/۷۵ ژول می‌گیرد.

(۴) ۱/۰۴ ژول می‌گیرد.

۱۷- معادله دیفرانسیل $V_C(t)$ در مدار شکل زیر کدام است؟ (خازن دارای ولتاژ اولیه است)



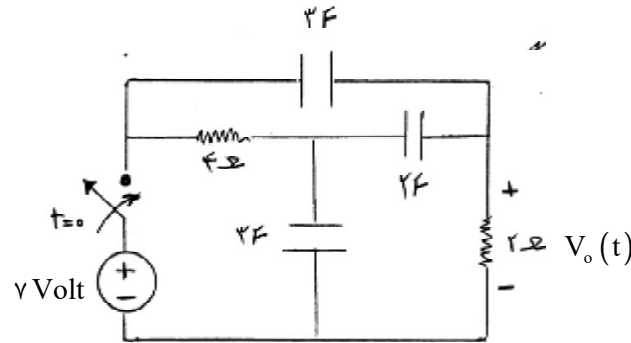
$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{2} V_C(t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{2} V_C(t) = i_s(t) \quad (3)$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = i_s(t) \quad (4)$$

۱۸- در مدار شکل زیر کلید S در $t=0$ بسته می‌شود مقدار $V_o(+)$ کدام است؟ (خازن‌ها بدون ولتاژ اولیه هستند)



هستند)

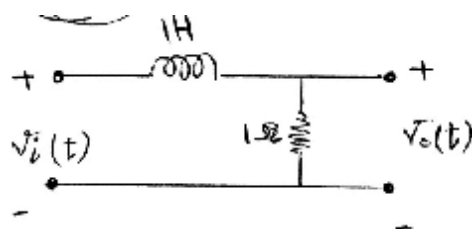
$$(1) \quad 3$$

$$(2) \quad 4/5$$

$$(3) \quad 5$$

$$(4) \quad 6$$

۱۹- در مدار شکل زیر، مقدار $V_o(t)$ کدام است؟

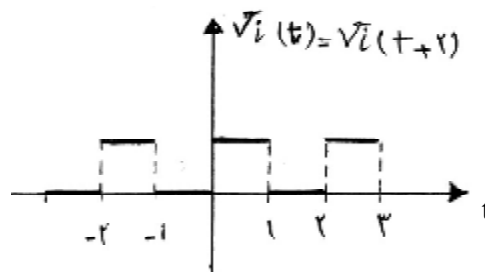


$$V_o(t) = \begin{cases} (1-e^{-1})e^{-t} & , \quad t > 0 \\ (1-e^{-\tau})e^{-\tau t} & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

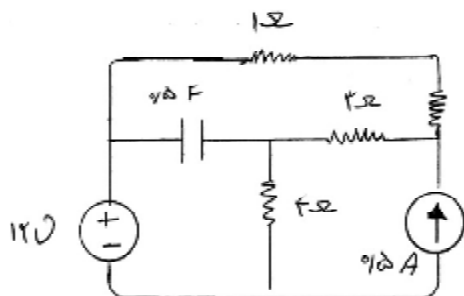
$$V_o(t) = \begin{cases} (1-e^{-1})e^{-t} & , \quad 0 < t < 1 \\ (1-e^{-\tau})e^{-t} & , \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$V_o(t) = \begin{cases} \frac{e-1}{e^{\tau}-1} e^{-t} & , \quad 0 < t < 1 \\ 1 - \frac{e-1}{1-e^{\tau}} e^{-t} & , \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$V_o(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1-e^{-1}}{1-e^{-\tau}} e^{-t} & , \quad 0 < t < 1 \\ \frac{e-1}{1-e^{-\tau}} e^{-t} & , \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad (4)$$



۲۰- ثابت زمانی مدار شکل زیر چند ثانیه است؟



(۱) $1/2$

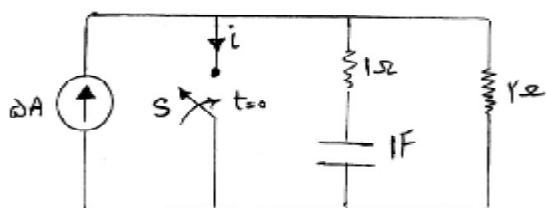
(۲) 2

(۳) $2/4$

(۴) 5

۲۱- کلید S در مدار شکل زیر بعد از مدتی طولانی در $t = 0$ بسته می‌شود. جریان گذرنده از این کلید در

$t = 1\text{sec}$ چقدر است؟



(۱) $5(1 - e^{-1})$

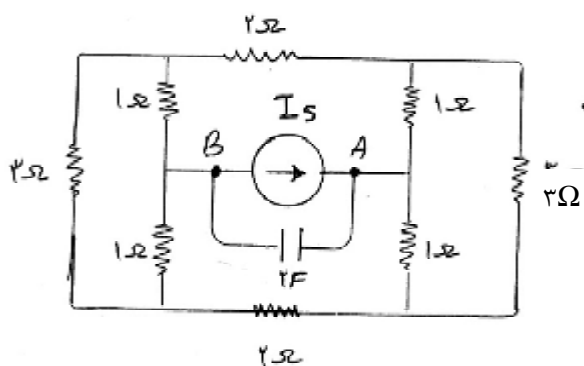
(۲) $5(1 + e^{-1})$

(۳) $5(1 - 2e^{-1})$

(۴) $5(1 + 2e^{-1})$

۲۲- در مدار شکل زیر ورودی I_s پله واحد بوده و خازن ۲ فارادی دارای ولتاژ اولیه صفر است. ولتاژ V_{AB} دو

سر خازن چقدر است؟



(۱) $\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) u(t)$

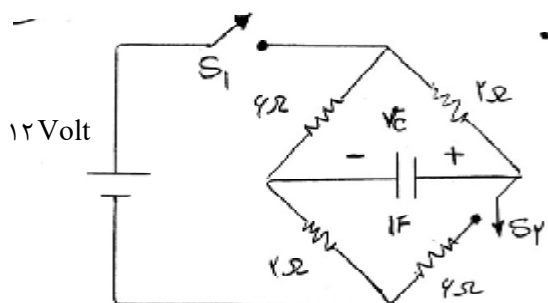
(۲) $\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) u(t)$

(۳) $2 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) u(t)$

(۴) $2 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) u(t)$

۲۳- کلید S_1 در $t = 0$ بسته می‌شود و کلید S_2 وقتی ولتاژ دو سرش ۹ ولت می‌شود، بسته خواهد شد. ولتاژ

$V_C(t)$ بعد از بسته شدن کلید S_2 کدام است؟ $(V_C = 0)$



$$(1) \quad 6 + 1/8 e^{\frac{t-2/2}{2}}$$

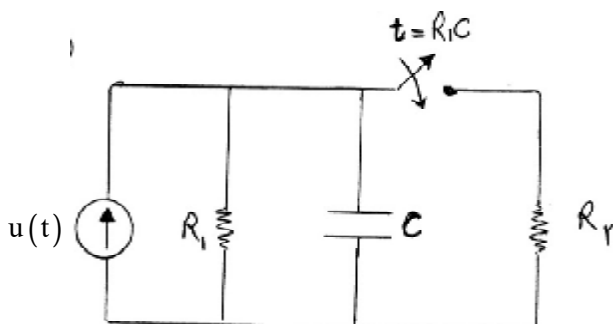
$$(2) \quad 6 + 2/25 e^{\frac{t-1/89}{2}}$$

$$(3) \quad 6 + 1/8 e^{\frac{t-2/2}{-0.75}}$$

$$(4) \quad 6 + 2/25 e^{\frac{t-1/89}{-0.75}}$$

۲۴- R_1 چقدر باشد تا پس از وصل کلید در $t = R_1 C$ ، ولتاژ دو سر منبع جریان ثابت بماند؟ (ولتاژ اولیه

خازن صفر است)



$$(1) \quad \frac{R_1}{e-1}$$

$$(2) \quad \frac{R_1}{e}$$

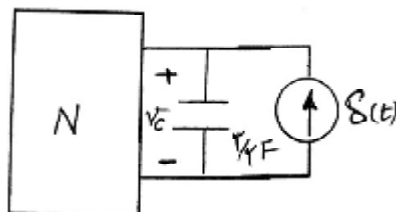
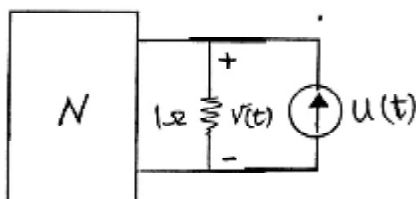
$$(3) \quad e R_1$$

$$(4) \quad (e-1) R_1$$

۲۵- در مدار شکل زیر N شامل عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان غیرفعال است. اگر ورودی منبع جریان

پله اعمال شود، پاسخ ولتاژ $V(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\tau t})u(t)$ حاصل می‌شود. حال اگر مقاومت یک اهمی را با خازن

$\frac{3}{4}F$ تعویض کرده و ورودی ضربه اعمال کنیم، ولتاژ دو سر خازن برابر کدام خواهد بود؟



$$(1) \quad e^{-t}u(t)$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

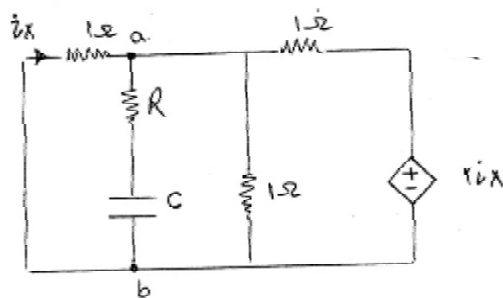
$$(3) \quad e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

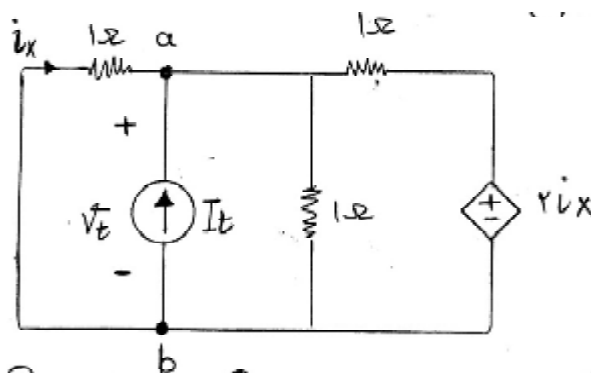
پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای به دست آوردن ثابت زمانی مدار می‌توان منابع مستقل را برابر صفر قرار داد. در نتیجه شکل زیر به دست می‌آید:



برای یافتن مقاومت دیده شده از دو سر خازن می‌توان مقاومت معادل از دو سر a و b را به دست آورده و با مقاومت R جمع کرد. در نتیجه داریم:



$$\text{KCL}(a): I_t = \frac{V_t}{1} + \frac{V_t}{1} + \frac{V_t - 2i_x}{1} \xrightarrow{V_t = -i_x} I_t = 5V_t \rightarrow R_t = \frac{V_t}{I_t} = 0.2$$

بنابراین مقاومت معادل از دو سر خازن برابر است با:

$$R_{eq} = R + 0.2$$

ثابت زمانی مدار با خازن $\tau_1 = R_{eq}C$ و ثابت زمانی مدار با سلف $\tau_r = \frac{L}{R_{eq}}$ است. چون $L = C$ می‌باشد، برای ثابت

ماندن ثابت زمانی باید:

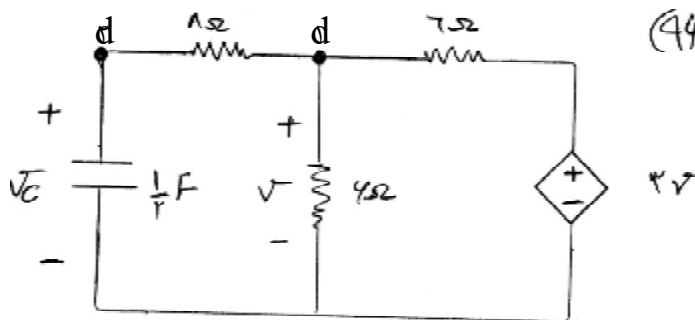
$$\tau_1 = \tau_r \rightarrow R_{eq}C = \frac{L}{R_{eq}} \xrightarrow{L=C} R_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

بنابراین مقاومت R برابر است با:

$$R_{eq} = R + 0.5 = 1 \rightarrow R = 0.5 \Omega$$

۲- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با KCL زدن در گره‌های مدار داریم:



$$KCL(1): \frac{V - V_C}{1} + \frac{V}{6} + \frac{V - 2V}{6} = 0 \rightarrow V = -3V_C$$

یعنی V و V_C دارای رابطه‌ی خطی هستند، پس می‌توان به جای V، نصف شدن V_C را در نظر گرفت. با KCL در گره

۲ داریم:

$$KCL(2): \frac{1}{2} \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C - V}{1} = 0 \xrightarrow{V = -3V_C} \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

اگر فرض کنیم t = 0 است داریم:

$$V_C(t) = Ke^{-t} \rightarrow K = V_C(t=0) = 2 \rightarrow V_C(t) = 2e^{-t}$$

$$V_C(t=0) = 2$$

اگر t₁ زمانی باشد که V_C(t) نصف می‌شود، یعنی:

$$V_C(t_1) = \frac{V_C(t=0)}{2} = 1 \rightarrow 2e^{-t_1} = 1 \rightarrow e^{-t_1} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\ln} t_1 = \ln 2$$

۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به جهت منابع جریان، تغییر ولتاژ اولیه‌ی خازن‌ها برابر است با:

$$V_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} i_{C_1}(t) dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} -\alpha \delta(t) dt = -2\alpha$$

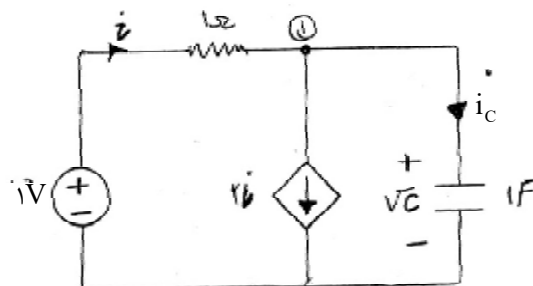
$$V_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^{+\infty} i_{C_2}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \delta(t) dt = \beta$$

پس از بستن کلید دو خازن موازی می‌شوند و ولتاژ آن‌ها یکسان می‌شود. بنابراین:

$$V_{C_t} = \frac{C_1 V_{C_1} + C_2 V_{C_2}}{C_1 + C_2} = \frac{-\alpha + \beta}{0.5 + 1} = 1 \text{ Volt} \rightarrow \beta = \alpha + \frac{3}{2}$$

۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

در $t = 0$ کلید K_1 بسته می‌شود و مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$\text{KCL}(1): i_c + 1i - i = 0 \rightarrow C \frac{dV_c}{dt} + i = 0 \quad (I)$$

$$i = \frac{1 - V_c}{1} = 1 - V_c \xrightarrow{(I)} \frac{dV_c}{dt} + 1 - V_c = 0 \rightarrow \frac{dV_c}{dt} - V_c = -1$$

جواب این معادله با توجه به صفر بودن ولتاژ اولیه خازن به صورت زیر است:

$$V_c(t) = -e^t + 1$$

پس جریان گذرنده از خازن برابر است با:

$$i_c = C \frac{dV_c(t)}{dt} = -e^t$$

و در لحظه $t = 1^-$ مقدار آن $i_c(1^-) = -e^1$ است.

در $t = 1^+$ کلید K_2 بسته می‌شود. با توجه به پیوسته بودن ولتاژ خازن می‌توان گفت:

$$V_c(1^+) = 1 - e^1 = 1 - e$$

بنابراین جریان عبوری از مقاومت $\frac{1}{2}$ اهمی برابر است با:

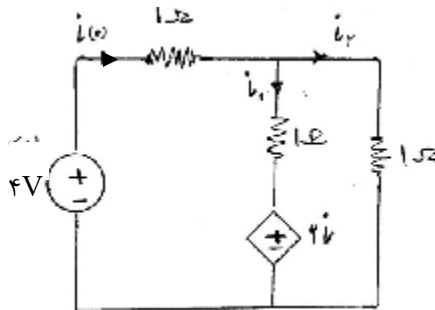
$$i_1 = \frac{V_c(1^+)}{\frac{1}{2}} = 2(1 - e)$$

این جریان فقط جریان خازن را تغییر می‌دهد. به عبارت دیگر، با توجه به ثابت ماندن ولتاژها، جریان شاخه‌های دیگر تغییر نمی‌کند. بنابراین جریان خازن به مقدار $2(e-1)$ کم می‌شود، یعنی:

$$i_C(1^+) - i_C(1^-) = -i_1 = 2(e-1)$$

۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

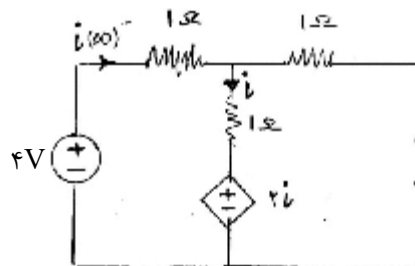
برای استفاده از رابطه‌ی پاسخ کامل در مدارهای مرتبه‌ی اول باید مقدار اولیه، مقدار نهایی و ثابت زمانی مدار را به دست آوریم. برای مقدار اولیه در $t = 0$ ، خازن اتصال کوتاه است، پس داریم:



$$\begin{cases} \text{KCL: } i = i_1 + i_2 \\ \text{KVL: } i_2 = i_1 + 2i_1 = 3i_1 + 2i_2 \rightarrow i_2 = -3i_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = -\frac{1}{2}i \\ i_2 = \frac{3}{2}i \end{cases}$$

$$\text{KVL: } 4 = i + i_2 = \frac{5}{2}i \rightarrow i(0) = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ A}$$

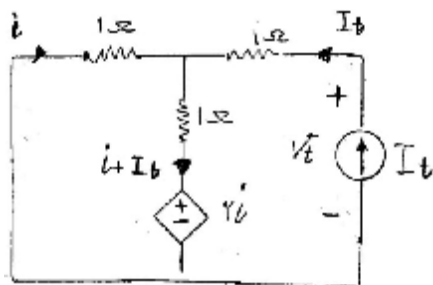
برای مقدار نهایی که خازن مدار باز است داریم:



$$\text{KVL: } 4 = i + i + 2i = 4i \rightarrow i(\infty) = 1 \text{ A}$$

برای ثابت زمانی هم مقاومت معادل از دو سر خازن را به دست می‌آوریم که برای این منظور از منبع تست I_1 استفاده

می‌کنیم. در ابتدا منابع مستقل را صفر می‌کنیم، در نتیجه:



KVL در مش سمت چپ: $i + i + I_t + 2i = 0 \rightarrow i = -\frac{I_t}{4}$

KVL در مش بیرونی: $V_t = I_t - i = \frac{5}{4}I_t \rightarrow R_{eq} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{5}{4}\Omega$

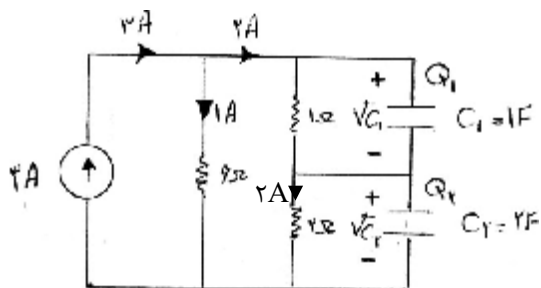
بنابراین:

$$\tau = R_{eq}C = \frac{5}{4} \quad \gamma = 2/5s \rightarrow i(t) = (1/6 - 1)e^{-\frac{t}{2/5}} + 1 = 1 + 0/6e^{-5/2t}$$

۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

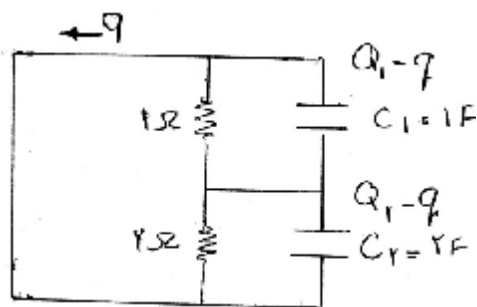
برای $t < 0$ مدار به صورت زیر است:

در این حالت خازن‌ها اتصال باز هستند.



$$\begin{cases} V_{C_1} = 2 \quad 1 = 2V \rightarrow Q_1 = C_1 V_{C_1} = 1 \quad 2 = 2C \\ V_{C_2} = 2 \quad 2 = 4V \rightarrow Q_2 = C_2 V_{C_2} = 2 \quad 4 = 2C \end{cases}$$

و در $t = 0$ با بسته شدن کلید S داریم:



بار q ، مقدار باری است که در $t = 0$ بین دو خازن C_1 و C_2 جابه‌جا می‌شود تا قانون ولتاژ کیرشهف برقرار شود. در این زمان $t = 0$ داریم:

$$\frac{Q_2 - q}{C_2} + \frac{Q_1 - q}{C_1} = 0 \rightarrow \frac{2 - q}{2} + \frac{1 - q}{1} = 0 \rightarrow q = 4C$$

گذشتن بار $q = 4C$ معادل جریان $i(t) = -4\delta(t)$ در لحظه صفر است. در نتیجه گزینه ۱ یا ۴ صحیح است.

برای $t > 0$ ثابت زمانی مدار با توجه به موازی شدن مقاومت‌ها و خازن‌ها برابر است با:

$$R_{eq} = 1 \parallel 2 = \frac{2}{3} \Omega \rightarrow \tau = R_{eq} C_{eq} = \frac{2}{3} \quad 3 = 2 \text{ sec}$$

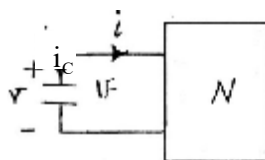
$$C_{eq} = 1 + 2 = 3F$$

بنابراین گزینه «۴» صحیح است.

نکته: عبور بار q کولن در یک لحظه در یک مسیر خاص، معادل جریان $q\delta(t)$ می‌باشد.

۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به شکل مدار مرتبه اول غیرخطی است، پس باید معادله دیفرانسیل آن را بنویسیم و حل کنیم:

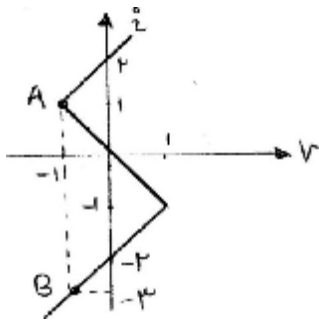


$$i_C + i = 0 \rightarrow \frac{dV}{dt} + i = 0 \rightarrow i = -\frac{dV}{dt}$$

براساس رابطه فوق می‌توان گفت، در جریان‌های مثبت، ولتاژ همواره کاهش می‌یابد و برای جریان‌های منفی، ولتاژ

افزایش می‌یابد. پس برای این که ولتاژ از مقدار ۱- ولت به صفر افزایش پیدا کند، باید جریان مقداری منفی داشته باشد.

بنابراین از روی نمودار داده شده، مقدار $V = -1 \text{ Volt}$ به ازای دو مقدار جریان به دست می‌آید:



$$V = -1V \rightarrow \begin{cases} \text{نقطه A: } i = 1A \\ \text{نقطه B: } i = -3A \end{cases}$$

لذا نقطه B با شرایط فوق قابل قبول است.

پس از نقطه $(-1V, -3A)$ به $(0V, -2A)$ حرکت می‌کنیم و رابطه ولتاژ - جریان بین این دو نقطه کار عبارت است از:

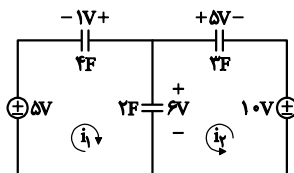
$$i = V - 2$$

بنابراین:

$$\frac{dV}{dt} + i = \frac{dV}{dt} + V - 2 = 0 \rightarrow \int_{V=-1}^{V=0} \frac{dV}{V-2} = \int_1^0 dt \rightarrow t = -\ln(V-2) \Big|_{V=-1}^{V=0} = \ln 3 - \ln 2 \rightarrow t = \ln \frac{3}{2} \text{ sec}$$

۸- گزینه ی «۴» صحیح است.

اگر جریان مش‌ها i_1 و i_r در نظر بگیریم و KVL را در آن‌ها بنویسیم داریم:



$$\text{KVL}(1): -1 + \frac{1}{4} \int_0^t i_1 dt + 6 + \frac{1}{4} \int_0^t (i_1 + i_r) dt = 0$$

$$\text{KVL}(2): -5 + \frac{1}{4} \int_0^t i_r dt + 6 + \frac{1}{4} \int_0^t (i_1 + i_r) dt = 0$$

با فرض $q_1 = \int_0^t i_1 dt$, $q_r = \int_0^t i_r dt$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{4} q_r = 0 \\ \frac{1}{4} q_r + \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{4} q_r = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{4} q_r = 0 \\ \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{2} q_r = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1 = -12 \\ q_r = 18 \end{cases}$$

بنابراین برای V داریم:

$$V = V(0) + \frac{1}{4} \int_0^t (i_1 + i_r) dt = 6 + \frac{1}{4} (q_1 + q_r) = 6 + 3 = 9 \text{ Volt}$$

روش دوم: استفاده از قانون بقای بار

قبل از اتصال کلیدها، مجموعه بار سه خازن برابر است با:

$$Q = q_{o1} + q_{or} + q_{or} = C_1 V_1(\cdot) + C_r V_r(\cdot) + C_r V_r(\cdot) = (4 \text{ } 1) + (2 \text{ } 6) + (3 \text{ } 5) = 4 + 12 + 15 = 31C$$

بعد از اتصال کلیدها، مجموع بار سه خازن عبارت است از:

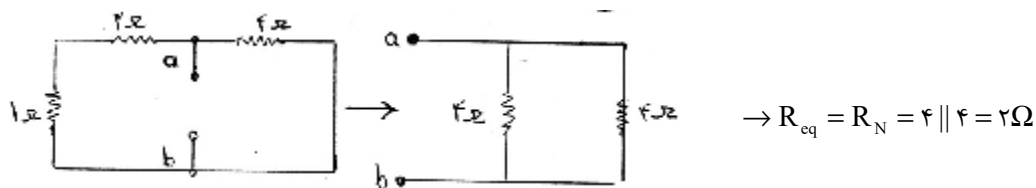
$$Q_r = C_1 V_1 + C_r V_r + C_r V_r = 4(V - 5) + 2V + 3(V - 10) = 9V - 50$$

با توجه به قانون بقای بار:

$$Q_1 = Q_r \rightarrow 9V - 50 = 31 \rightarrow 9V = 81 \rightarrow V = 9 \text{ Volt}$$

۹- گزینه ی «۴» صحیح است.

مقاومت معادل از دو سر N با صفر کردن منابع مستقل به صورت زیر به دست می آید:



مدت زمان طولانی ۲۰ ثانیه چهار برابر بزرگترین ثابت زمانی مدار است، پس بزرگترین ثابت زمانی مدار ۵ ثانیه است.

$$\tau_{\max} = 5 \text{ sec}$$

که این ثابت زمانی می تواند مربوط به مدار مرتبه اول خازنی یا سلفی باشد.

اگر مدار خازنی باشد:

$$\tau_{\max} = R_{eq} C_{\max} = 5 \rightarrow C_{\max} = \frac{5}{2} \text{ F}$$

$$\tau_{\max} = \frac{L_{\max}}{R_{eq}} = 5 \rightarrow L_{\max} = 10 \text{ H}$$

همچنین اگر هیچ سلف یا خازنی هم در کار نباشد، N یک مدار مقاومتی است که ثابت زمانی مدار به وسیله بزرگترین

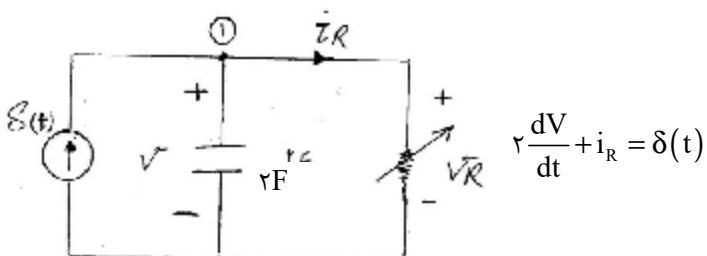
ثابت زمانی منابع ورودی تعیین می شود که منبع جریان دارای ثابت زمانی ۱ ثانیه و منبع ولتاژ دارای ثابت زمانی ۵ ثانیه

است در نتیجه بزرگترین ثابت زمانی مدار ۵ ثانیه است و پس از ۲۰ ثانیه (چهار برابر بزرگترین ثابت زمانی مدار) کلیه منابع مدار صفر می‌شوند و همه ولتاژها و جریان‌های مدار صفر خواهد شد.

در نتیجه موارد «۱» و «۲» صحیح است.

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

روش اول: با نوشتن KCL در گره ۱ داریم:



با توجه به این که $V = V_R$ است پس $i_R = V^r + 2V$ داریم:

$$2 \frac{dV}{dt} + V^r + 2V = \delta(t)$$

اثر ورودی ضربه، افزایش ولتاژ خازن در لحظه $t = 0^+$ است و پس از آن ورودی صفر می‌شود و پاسخ ضربه همان پاسخ ورودی صفر با شرایط اولیه $V(0^+)$ است.

با توجه به کران‌دار بودن ولتاژ خازن، اگر از طرفین رابطه فوق در فاصله 0^- تا 0^+ انتگرال بگیریم داریم:

$$2 \int_{-}^{+} \frac{dV}{dt} dt + \int_{-}^{+} V^r dt + \int_{-}^{+} 2V dV = \int_{-}^{+} \delta(t) dt$$

$$\rightarrow 2 \left(V(0^+) - V(0^-) \right) = 1 \rightarrow V(0^+) = \frac{1}{2}$$

و برای $t > 0$ معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} r \frac{dV}{dt} + V + rV = 0 \\ V(0) = \frac{1}{r} \end{cases} \rightarrow r \frac{dV}{V(V+r)} = -dt \rightarrow \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V+r} \right) dV = -dt$$

$$\xrightarrow{\int_0^t} \left[\ln V - \ln(V+r) \right]_{V(0)}^{V(t)} = -t \rightarrow \ln \frac{V}{V+r} \Big|_{\frac{1}{r}}^{V(t)} = -t \rightarrow \ln \frac{\Delta V(t)}{V(t)+r} = -t \rightarrow \frac{\Delta V(t)}{V(t)+r} = e^{-t}$$

$$\rightarrow V(t) = \frac{re^{-t}}{\Delta + e^{-t}} = \frac{r}{\Delta e^t - 1} = \frac{r}{e^{t+\ln \Delta} - 1}$$

روش دوم: جهش ولتاژ خازن به علت وجود ورودی ضربه برابر $\frac{1}{C}$ می باشد.

با توجه به $V_C(t) = V_R(t)$ می توان گفت:

$$V_R(t=0) = V_C(t=0) = \frac{1}{C} = \frac{1}{r} \text{ Volt}$$

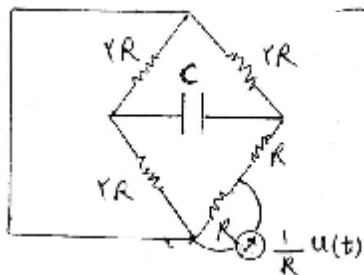
با قرار دادن $t=0$ در گزینه ها، فقط گزینه «۲» در این شرط صدق می کند.

۱۱- گزینه ی «۳» صحیح است.

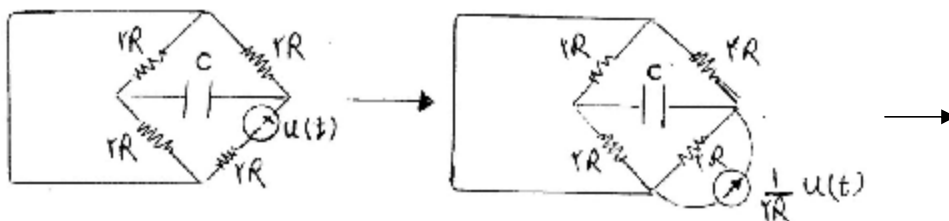
با استفاده از قضیه جمع آثار و باز کردن مدار جریان برای بررسی اثر منبع ولتاژ، به علت تقارن (پل وتستون) می توان

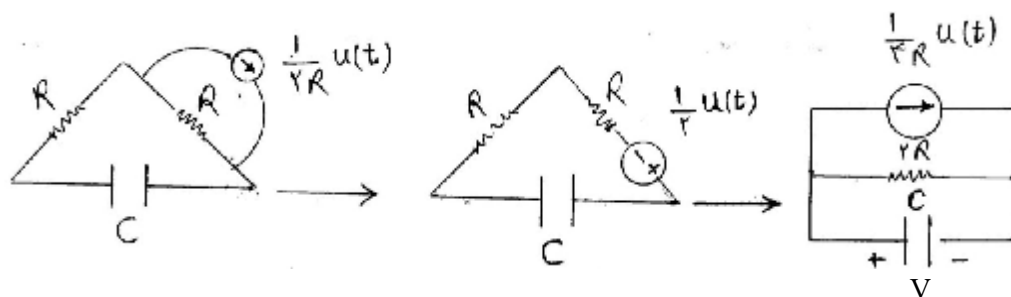
گفت منبع ولتاژ V_s سهمی در جریان خازن ندارد، پس می توان آن را حذف کرد (اتصال کوتاه نمود) و مدار به شکل زیر

در می آید:



با استفاده از تبدیل نورتن به تونن و بالعکس، مدار به صورت زیر ساده می شود:





در نهایت یک مدار RC داریم که ثابت زمانی آن τRC است و ورودی ثابت آن $\frac{1}{rR}u(t)$ می باشد، بنابراین ولتاژ V

دو سر خازن با توجه به جهت منبع جریان چنین به دست می آید:

$$V = -(\tau R) \left(\frac{1}{rR} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau RC}} \right) u(t) = -\frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau RC}} \right) u(t)$$

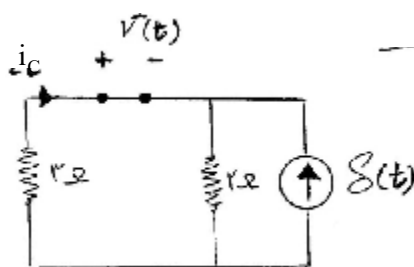
بنابراین جریان گذرنده از خازن برابر است با:

$$i_C(t) = C \frac{dV}{dt} = -\frac{C}{r} \left(\frac{1}{\tau RC} \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau RC}} \right) u(t) = -\frac{1}{rR} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau RC}} \right) u(t)$$

۱۲- گزینه ی «۱» صحیح است.

ورودی $\delta(t)$ شرایط پیوستگی ولتاژ خازن را ندارد، پس ورودی های غیر ضربه را صفر نموده و خازن را اتصال کوتاه

می کنیم تا جریانش را در $t = 0^+$ به دست آوریم:



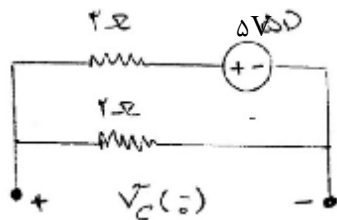
$$i_C(t = 0^+) = \frac{-r}{r+r} \delta(t) = -\frac{r}{\Delta} \delta(t)$$

بنابراین برای ولتاژ خازن در لحظه $t = 0^+$ داریم:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^+} i_C(t) dt = \left(\frac{r}{r+r} \Delta \right) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^+} -\frac{r}{\Delta} \delta dt = \frac{\Delta}{\Delta}$$

که با استفاده از گزینه ها برای $t = 0$ ، فقط در گزینه اول صادق است.

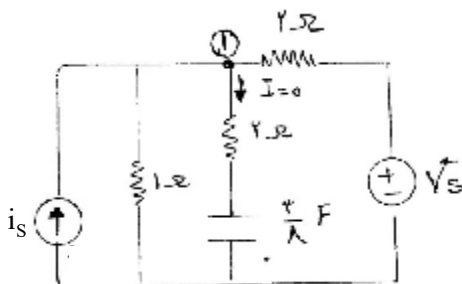
در محاسبات فوق، ولتاژ خازن در $t = 0^-$ با توجه به مدار باز بودن خازن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$V_C(0^-) = \frac{2}{2+3} \cdot 5 = 2 \text{ Volt}$$

۱۳- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

برای این که خازن شارژ و دشارژ نشود باید جریانی از آن نگذرد. برای این منظور ولتاژ نقطه ۱ در شکل زیر باید همواره برابر ولتاژ اولیه خازن یعنی ۴ ولت باشد. بنابراین با KCL زدن در گره ۱ داریم:



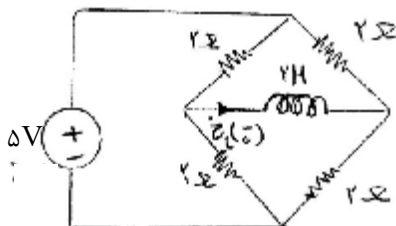
$$V_1 = 4 \text{ Volt}$$

$$\text{KCL: } -i_s + \frac{4}{1} + \frac{4 - V_s}{2} = 0 \rightarrow V_s + 2i_s = 12$$

۱۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

با توجه به گزینه‌ها دیده می‌شود به ازای $t = 0$ ، مقدار اولیه همه گزینه‌ها متفاوت است. پس می‌توان $i_L(0^+)$ را به دست آورد و در گزینه‌ها چک کرد.

به دلیل پیوسته بودن جریان سلف می‌توان گفت $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ پس مدار را در $t = 0^-$ رسم می‌کنیم:



با توجه به تقارن موجود در مدار (پل وتستون)، جریان گذرنده از سلف در $t = 0^-$ برابر صفر است $(i_L(0^-) = 0)$ و این

شرط فقط در گزینه «۲» صدق می‌کند.

۱۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

با توجه به مشخص نبودن جهت i_N ، طبق استاندارد جهت آن را به سمت چپ می‌گیریم. پس با KCL زدن در گره بالایی داریم:

$$i(t) = i_L(t) + i_N(t) = \left(i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t) dt \right) + i_N(t)$$

به علت این که قبل از $t = 0$ منبعی وجود نداشته تا سلف را شارژ کند پس $i_L(0) = 0$ است. سلف با V_S موازی است، در نتیجه برای $t \geq 0$ ، $V_L(t) = u(t)$ می‌باشد. همچنین V_N با V_S موازی می‌باشد پس برای $t \geq 0$ ، $V_N = 1V$ است و از روی مشخصه، به ازای $V_N = 1V$ ، $i_N = 1A$ می‌شود. بنابراین:

$$i(t) = 0 + \int_0^t u(t) dt + 1 = r(t) + 1$$

۱۶- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

انرژی منبع جریان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = \int_0^t V(t) \cdot i(t) dt = \int_0^t \frac{1}{\tau} V_C(t) dt$$

برای ولتاژ خازن با توجه به این مقدار اولیه آن ۴ ولت، مقدار نهایی ۱- ولت و ثابت زمانی $\tau = \frac{1}{\tau} = 1s$ است داریم:

$$V_C(t) = (4 - (-1))e^{-t} - 1 = 5e^{-t} - 1$$

مقدار نهایی ولتاژ خازن به صورت زیر به دست آمده است:



$$V_C(\infty) = -\frac{1}{\tau} \quad \tau = -1 \text{ Volt}$$

اگر زمانی که ولتاژ خازن به یک ولت می‌رسد را t_1 در نظر بگیریم داریم:

$$V_C(t_1) = 5e^{-t_1} - 1 = 1 \rightarrow e^{-t_1} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{Ln}} t_1 = \text{Ln} 2 / 5 = 0.693 \text{ sec}$$

بنابراین:

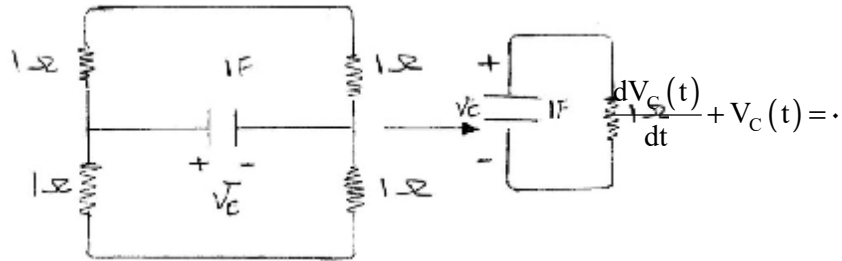
$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_1} \frac{1}{\tau} (5e^{-t} - 1) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{0.693} (5e^{-t} - 1) dt = \frac{1}{\tau} [-5e^{-t} - t]_0^{0.693} \\ &= -2/5 e^{-0.693} - \frac{0.693}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{2/5}{2/5} + 2/5 - 0.693/2 = 1.04 \text{ J} \end{aligned}$$

که چون مثبت است یعنی $1/0.4$ ژول انرژی گرفته است.

۱۷- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

اگر منبع جریان $i_s(t)$ را در نظر بگیریم، به علت متعادل بودن مدار مقاومتی (پل وتستون) هیچ سهمی از منبع جریان $i_s(t)$ از خازن نمی‌گذرد، پس تغییر ولتاژ دو سر خازن ناشی از ولتاژ اولیه آن است. بنابراین یک مدار RC به صورت

زیر داریم:



۱۸- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

در لحظه‌ی بسته شدن کلید S، خازن‌ها اتصال کوتاه می‌باشند پس در این لحظه خازن‌ها با منبع ولتاژ ۷ ولتی سری می‌شوند و بار یکسان q از تمام خازن‌ها می‌گذرد و موجب افزایش ولتاژ خازن‌ها می‌شود. با اعمال KVL برای حلقه‌ی شامل سه خازن و منبع ولتاژ داریم:

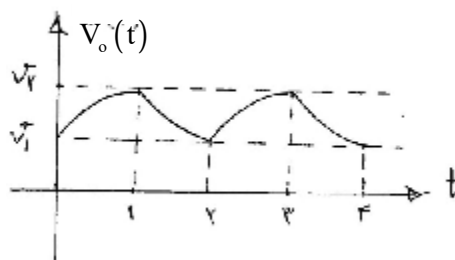
$$\text{KVL: } \frac{q}{3} + \frac{q}{2} + \frac{q}{3} = 7 \rightarrow \frac{7q}{6} = 7 \rightarrow q = 6$$

ولتاژ V_0 در لحظه‌ی $t = 0^+$ برابر مجموع ولتاژ دو خازن ۲ و ۳ فارادی است، در نتیجه:

$$V_0(0^+) = \frac{q}{3} + \frac{q}{2} = 2 + 3 = 5 \text{ Volt}$$

۱۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در حالت دائمی ولتاژ خروجی بین دو مقدار V_1 و V_2 نوسان می‌کند. اگر مبدأ زمان را در حالت دائمی وقتی که ولتاژ V_1 شروع می‌شود در نظر بگیریم داریم:



$$0 \leq t \leq 1 \rightarrow V_o(t) = (V_1 - 1)e^{-t} + 1 = V_1 e^{-t} + (1 - e^{-t})$$

$$1 \leq t \leq 2 \rightarrow V_o(t) = (V_2 - 0)e^{-(t-1)} = V_2 e^{-(t-1)}$$

با استفاده از پیوسته بودن شکل موج خروجی در زمان‌های $t=1$ و $t=2$ می‌توان گفت:

$$\begin{cases} V_o(t=1) = V_2 \rightarrow V_1 e^{-1} + 1 - e^{-1} = V_2 \\ V_o(t=2) = V_1 \rightarrow V_2 e^{-1} = V_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{e^{-1}(1 - e^{-1})}{1 - e^{-2}} \\ V_2 = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده در روابط اولیه داریم:

$$0 \leq t \leq 1: V_o(t) = \frac{e^{-1}(1 - e^{-1})}{1 - e^{-2}} e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 - \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} e^{-t}$$

$$1 \leq t \leq 2: V_o(t) = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} e^{-(t-1)} = \frac{e-1}{1 - e^{-2}} e^{-t}$$

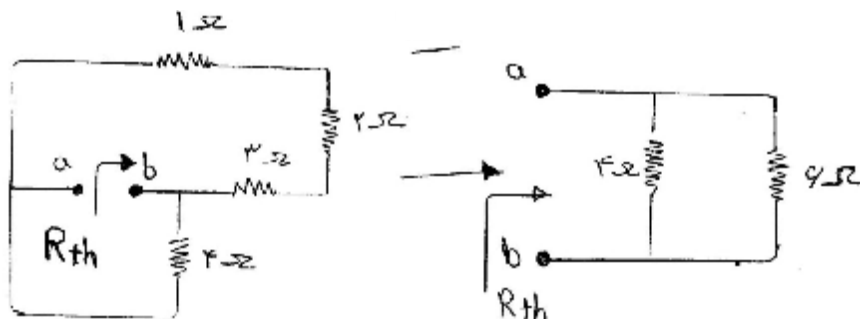
بنابراین:

$$V_o(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-2}} e^{-t} & , 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{e-1}{1 - e^{-2}} e^{-t} & , 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

۲۰- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای به دست آوردن مقاومت معادل از دو سر خازن، منبع ولتاژ را اتصال کوتاه و منبع جریان را اتصال باز می‌کنیم. در

نتیجه داریم:



$$R_{th} = 4 \parallel 6 = 2.4 \Omega$$

بنابراین ثابت زمانی برابر است با:

$$T = R_{th} C = 2.4 \cdot 10^{-5} = 24 \mu\text{sec}$$

۲۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

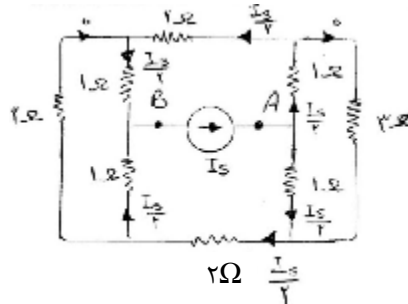
چون کلید برای مدت طولانی بسته بوده، پس مدار به حالت دائمی رسیده است و خازن با ولتاژ $5 = 10 \text{ Volt}$ پر شده و مدار باز می‌شود. در لحظه $t = 0$ که کلید بسته می‌شود، مقاومت ۲ اهمی اتصال کوتاه می‌شود. همچنین خازن سری با مقاومت یک اهمی نیز اتصال کوتاه می‌گردد، پس جریان منبع جریان ۵ آمپر از کلید می‌گذرد و خازن یک فارادی با ولتاژ اولیه ۱۰ ولتی نیز در آن دشارژ می‌شود. بنابراین جریان کلید S برابر است با:

$$i = 5 + 10e^{-t}$$

که در $t = 1$ مقدار آن برابر $5 + 10e^{-1}$ است.

۲۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

مقاومت معادل از دو سر خازن را به دست می‌آوریم. با توجه به تقارن مدار، جریان I_s به‌طور مساوی بین مقاومت‌های یک اهمی تقسیم می‌شود و از مقاومت‌های ۳ اهمی نیز جریانی نمی‌گذرد. در نتیجه:



$$\text{KVL در مش بالایی: } V_{AB} = \frac{I_s}{2} + 2 \left(\frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{2} \right) = 2I_s \rightarrow R_{th} = \frac{V_{AB}}{I_s} = 2\Omega$$

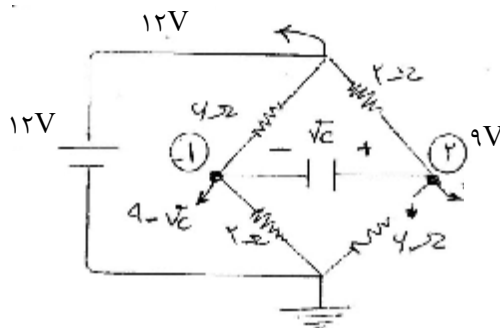
پس ثابت زمانی مدار $T = R_{th}C = 4 \text{ sec}$ است.

در این حالت مدار مانند یک مدار RC موازی با منبع جریان I_s است، پس:

$$V_{AB} = R_{th}I_s \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = 2 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right) = 2 \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \right)$$

۲۳- گزینه ی «۲» صحیح است.

به دلیل پیوستگی ولتاژ خازن، ولتاژ اولیه خازن بعد از بسته شدن کلید S_p برابر است با ولتاژ آن در لحظه ای قبل از بسته شدن کلید S_p و زمانی که ولتاژ دو سر کلید S_p برابر ۹ ولت است. پس در شکل زیر داریم:



$$\text{KCL در گره مرکب ۱ و ۲: } \frac{9 - V_C}{2} + \frac{9 - V_C - 12}{6} + \frac{9 - 12}{2} = 0 \rightarrow V_C = 3/75 \text{ Volt}$$

اگر $t = t_1$ زمانی باشد که کلید S_p بسته می شود، در این زمان توان e برابر صفر است و حاصل $V_C = 3/75 \text{ V}$ می باشد.

این شرط فقط در گزینه «۲» برای $t_1 = 1/89 \text{ sec}$ برقرار است.

$$V_C(t = t_1) = 6 - 2/25 e^{\frac{t-1/89}{\tau}} \Big|_{t=1/89 \text{ sec}} = 3/75 \text{ Volt}$$

۲۴- گزینه ی «۴» صحیح است.

این مدار دارای دو ثابت زمانی است. برای این که پس از وصل کلید در $t = R_1 C$ ، ولتاژ در سر منبع جریان که همان ولتاژ دو سر خازن است ثابت بماند، باید ولتاژ خازن در لحظه $t = R_1 C$ را با مقدار نهایی ولتاژ خازن برابر قرار دهیم، یعنی:

$$V_C(t = R_1 C) = V_\infty$$

ولتاژ دو سر خازن قبل از بسته شدن کلید برابر است با:

$$V_C(t) = [V(\cdot) - V(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + V(\infty) = V(\infty) \left[1 - e^{-\frac{t}{R_{eq} C}} \right] = R_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right)$$

در این حالت برای V_∞ می توان گفت:

$$V_\infty = (R_1 \parallel R_r) \cdot 1 = \frac{R_1 R_r}{R_1 + R_r}$$

بنابراین در لحظه $t = R_1 C$ داریم:

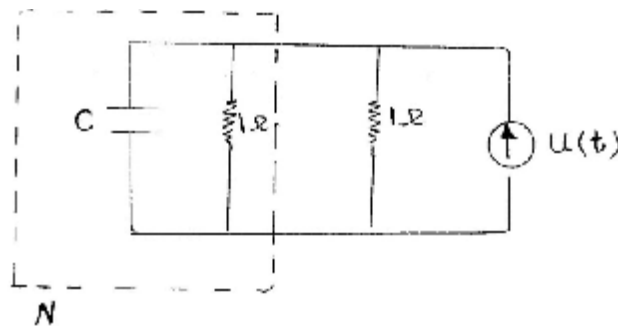
$$V(t = R_1 C) = R \left(1 - e^{-1}\right) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow R_2 = (e - 1) R_1$$

در این محاسبات V_∞ مربوط به زمان‌های بعد از بسته شدن کلید است ($t > R_1 C$) و با $V(\infty)$ حاصل از $t < R_1 C$ متفاوت می‌باشد.

۲۵- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در مدار اول، شبکه N باید فقط شامل مقاومت و خازن باشد. زیرا اگر شامل سلف نیز باشد، پاسخ مدار دوم به صورت معادله مرتبه دوم می‌شد در صورتی که گزینه‌ها به صورت پاسخ مدار مرتبه اول است.

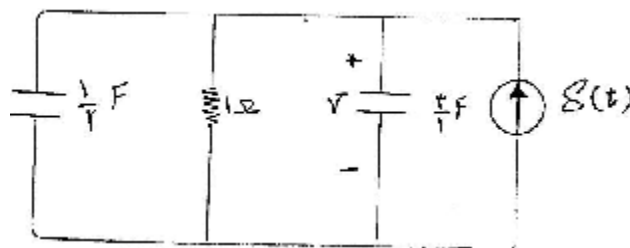
در مدار اولی، $V(t)$ در زمان بی‌نهایت که خازن مدار باز است برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود پس در شبکه N یک مقاومت یک اهمی وجود دارد که با مقاومت بیرونی موازی شده و حاصل $\frac{1}{4} \Omega$ می‌شود، یعنی:



با استفاده از ثابت زمانی ولتاژ $V(t)$ می‌توان نوشت:

$$\tau = R_{eq} C = \frac{1}{4} \text{ sec} \rightarrow \frac{1}{4} = C = \frac{1}{4} \rightarrow C = \frac{1}{4} \text{ F}$$

پس مدار دوم به صورت زیر است:



بنابراین ولتاژ دو سر خازن در اثر اعمال ورودی ضربه برابر است با:

$$\begin{cases} \tau = RC_{eq} = 1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \text{ sec} \\ V(\cdot^+) = \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ Volt} \end{cases} \rightarrow V_C(t) = 2 e^{-\frac{t}{1/2}}$$

فصل پنجم: مدارهای مرتبه دوم

در مدل سازی سیستم های الکتریکی، مکانیکی و... معمولاً از یک مدل ریاضی استفاده می شود که اغلب این مدل ریاضی توسط یک معادله دیفرانسیل بیان می گردد. سیستمی که از مرتبه n باشد دارای معادله دیفرانسیلی از مرتبه n است. پس می توان گفت مداری مرتبه دوم است که معادله دیفرانسیل توصیف کننده آن مرتبه دوم باشد.

به عبارت دیگر، هر مدار شامل یک خازن و یک سلف و هر تعداد مقاومت و منبع مستقل و وابسته یا دو سلف یا دو خازن (که غیرسری و غیرموازی هستند) و هر تعداد مقاومت و منبع، یک مدار مرتبه دوم است.

5-1- معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم

می توان نشان داد معادله دیفرانسیل حاکم بر هر مدار مرتبه دومی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \text{عبارتی بر حسب ورودی و مشتقاتش}$$

معادله مشخصه این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

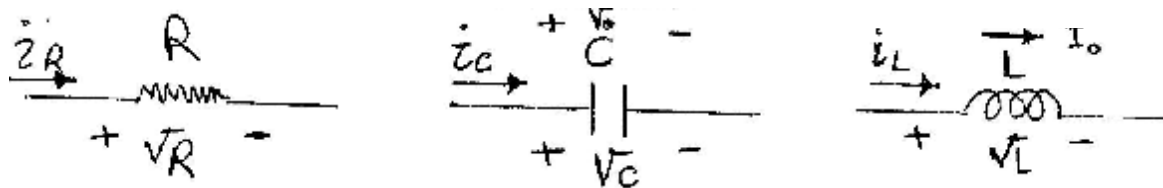
$$S^2 + 2\alpha S + \omega_0^2 = 0$$

که در آن α ضریب تضعیف و ω_0 فرکانس تشدید می باشد.

مانند مدارهای مرتبه اول، اساس کار در حل مدارهای مرتبه دوم، نوشتن معادله دیفرانسیل فوق و تحلیل آن به ازای شرایط و حالات مختلف است.

برای نوشتن معادله دیفرانسیل باید روابط ولتاژ و جریان عناصر را دانست و با استفاده از آنها و KCL و KVL زدن و حذف متغیرهای اضافی، به معادله دیفرانسیل رسید.

روابط حاکم بر ولتاژ و جریان عناصر مداری (مقاومت، خازن و سلف) را که بارها بیان کرده ایم به صورت خلاصه مرور می کنیم:



$$V_R = R i_R \quad V_C = V_o + \frac{1}{C} \int i_C dt \quad V_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_R = \frac{V_R}{R} \quad i_C = C \frac{dV_C}{dt} \quad i_L = I_o + \frac{1}{L} \int V_L dt$$

یکی از پارامترهایی که مستقیماً از معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم به دست می‌آید، ضریب کیفیت Q است.

۵-۱-۱- ضریب کیفیت Q

در حالت کلی برای ضریب کیفیت Q می‌توان گفت:

$$Q = 2\pi \frac{\text{توان راکتیو}}{\text{توان متوسط}}$$

طبق تعریف در هر مدار هر چه انرژی دیرتر تلف شود، Q یا ضریب کیفیت بالاتر است. برای مدارهای مرتبه دوم Q برابر است با:

$$Q = \frac{\omega_o}{2\alpha}$$

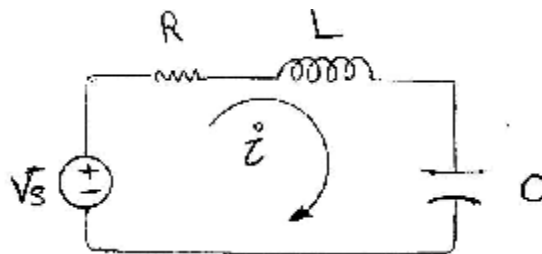
به عبارت دیگر، با تشکیل معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم و تعیین ضرایب ω_o و α ، ضریب کیفیت طبق رابطه فوق به دست می‌آید.

دو مدار خاص مرتبه دوم، مدار RLC سری و مدار RLC موازی، که همواره مورد توجه است را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

اساس تجزیه و تحلیل این مدارات (و کلاً هر مدار مرتبه دومی) نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر آن است.

۵-۱-۲- مدار RLC سری

با توجه به مدار شکل زیر داریم:



$$\text{KVL: } V_S = Ri + L \frac{di}{dt} + V_o + \frac{1}{C} \int i dt$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$\frac{dV_s}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i \rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{dV_s}{dt}$$

که معادله مشخصه آن برابر است با:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

براین اساس می‌توان گفت:

$$\gamma\alpha = \frac{R}{L} \rightarrow \alpha = \frac{R}{2L}$$

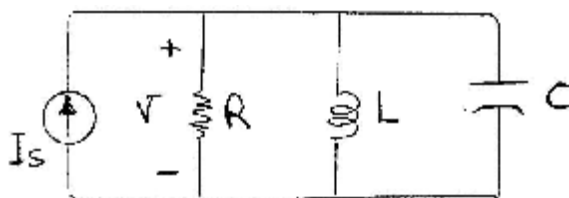
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

برای ضریب کیفیت داریم:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{R}{2L}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

۵-۱-۳- مدار RLC موازی

با توجه به مدار شکل زیر داریم:



$$\text{KCL: } I_s = \frac{V}{R} + I_o + \frac{1}{L} \int V \cdot dt + C \frac{dV}{dt} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dI_s}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{L} + C \frac{d^2 V}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{1}{C} \frac{dI_s}{dt}$$

$$\gamma\alpha = \frac{1}{RC} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{RC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

5-2- انواع پاسخ و روش‌های تحلیل در مدارهای مرتبه دوم

مانند هر معادله دیفرانسیلی، پاسخ کامل معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{پاسخ همگن}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{پاسخ خصوصی}} \quad \text{۵-۲-۱ پاسخ همگن (عمومی)}$$

(پاسخ حالت صفر) (پاسخ ورودی صفر)

برای یافتن پاسخ همگن یا پاسخ ورودی صفر، از ریشه‌های معادله مشخصه متناظر با معادله دیفرانسیل مدار مرتبه دوم استفاده می‌کنیم.

$$S^2 + 2\alpha S + \omega_n^2 = 0 \rightarrow S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2}$$

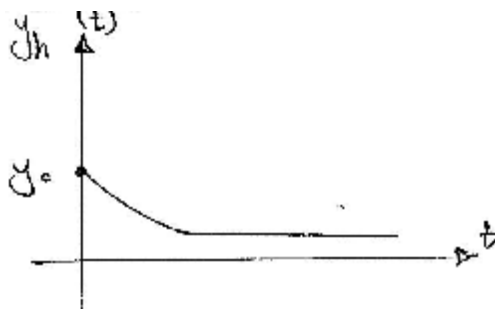
برحسب نوع ریشه‌ها، حالات مدار مرتبه دوم را نامگذاری می‌کنیم:

۱- اگر $\alpha > \omega_n$ باشد، دو ریشه حقیقی منفی متمایز داریم ($\Delta > 0$) و فرم پاسخ همگن به صورت زیر است:

$$(S_1, S_2 < 0) \rightarrow y_h(t) = K_1 e^{S_1 t} + K_2 e^{S_2 t}$$

که ضرایب K_1 و K_2 با توجه به شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ تعیین می‌شوند.

شکل پاسخ به صورت زیر است:



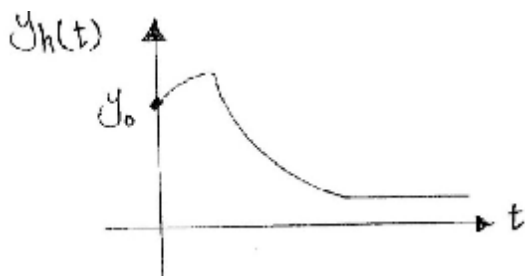
به این حالت، میرای شدید (over damped) گفته می‌شود.

۲- اگر $\alpha = \omega_n$ باشد، دو ریشه مضاعف حقیقی منفی داریم ($\Delta = 0$) و برای پاسخ داریم:

$$(S_1 = S_2 < 0) \rightarrow y_h(t) = (K_1 + K_2 t) e^{S_1 t}$$

در این حالت نیز ضرایب K_1 و K_2 با استفاده از شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ تعیین می‌شوند.

شکل پاسخ به صورت زیر است:



به این حالت، میرای بحرانی (critically damped) می‌گویند.

3- اگر $\alpha < \omega$ باشد، دو ریشه مزدوج مختلط ($\Delta < 0$) داریم. در این حالت روابط به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

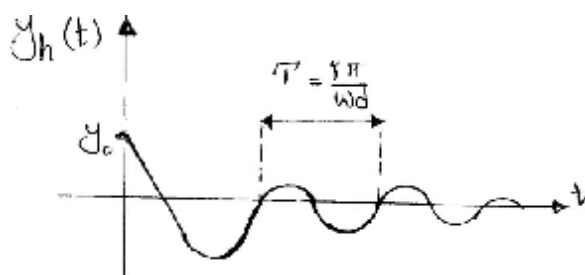
که ω_d را فرکانس میرا شونده می‌نامیم.

فرم کلی پاسخ به صورت زیر است:

$$y_h(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

در این حالت ضریب K و پارامتر θ یا ضرایب A و B با استفاده از شرایط اولیه $y(0)$ و $y'(0)$ تعیین می‌شوند.

شکل سیگنال خروجی در این حالت به صورت زیر است:

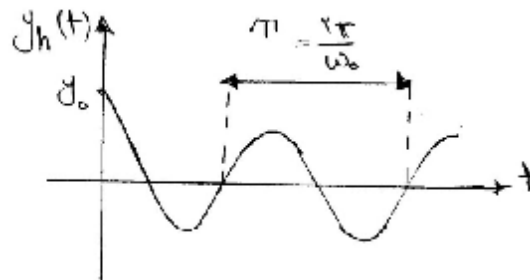


این حالت را میرای ضعیف (under damped) می‌گویند.

4- اگر $\alpha = 0$ باشد، دو ریشه مزدوج موهومی محض داریم. در این صورت:

$$S_{1,2} = \pm j\omega \rightarrow y_h(t) = K \cos(\omega t + \theta) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

نمودار در این حالت که به آن حالت نوسانی، بدون اتلاف یا Loss less می‌گویند به صورت شکل زیر است:



نکته: فرکانس نوسانات در حالت میرای ضعیف برابر ω_d است ولی در حالت نامیرا فرکانس نوسانات نامیرا برابر ω می‌باشد.

نکته: منابع مستقل ولتاژ و جریان تأثیری در نوع مدار مرتبه دوم ندارند، پس می‌توان آن‌ها را صفر کرد.

در چهار حالت بیان شده فوق برای ضریب کیفیت Q می‌توان گفت:

$$Q < \frac{1}{2} : \text{میرای شدید}$$

$$Q = \frac{1}{2} : \text{میرای بحرانی}$$

$$Q > \frac{1}{2} : \text{میرای ضعیف}$$

$$Q \rightarrow \infty : \text{نامیرا (نوسانی)}$$

* نوسان‌ساز

شرط نوسانی بودن (نامیرا بودن) یک مدار مرتبه دوم این است که:

$$1 - \alpha = 0 \text{ باشد.}$$

$$2 - \omega_d^2 > 0 \text{ باشد.}$$

یادتان باشد که هر دو این شرط‌ها لازم‌اند.

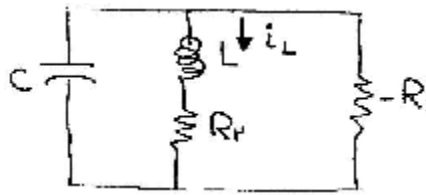
نکته: در مدارهای RLC سری و موازی در حالت میرای بحرانی ($\Delta = 0$)، مقاومت بحرانی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{RLC سری} : R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{RLC موازی: } R = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

برای درک بهتر مفاهیم مطرح شده به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: برای مدار شکل زیر، معادله دیفرانسیلی برای i_L بنویسید. سپس مقدار R_1 را طوری تعیین کنید که مدار زیر یک نوسان‌ساز باشد.



با توجه به شکل ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$V_C = L \frac{di_L}{dt} + R_r i_L$$

با استفاده از KCL داریم:

$$\text{KCL: } i_C + i_L + i_{R_1} = 0 \rightarrow C \frac{dV_C}{dt} + i_L + \frac{V_C}{-R_1} = 0 \rightarrow CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} + CR_r \frac{di_L}{dt} + i_L - \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} - \frac{R_r}{R_1} i_L = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \underbrace{\left(R_r C - \frac{L}{R_1}\right)}_{\gamma \alpha} \frac{1}{LC} \frac{di_L}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_r}{R_1}\right)}_{\omega_0^2} i_L = 0$$

و برای نوسان‌ساز بودن:

$$\alpha = 0 \rightarrow \frac{1}{LC} \left(R_r C - \frac{L}{R_1}\right) = 0 \rightarrow R_r C = \frac{L}{R_1} \rightarrow R_1 = \frac{L}{R_r C}$$

$$\omega_0^2 > 0 \rightarrow \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_r}{R_1}\right) > 0 \rightarrow 1 - \frac{R_r}{R_1} > 0 \rightarrow R_1 > R_r$$

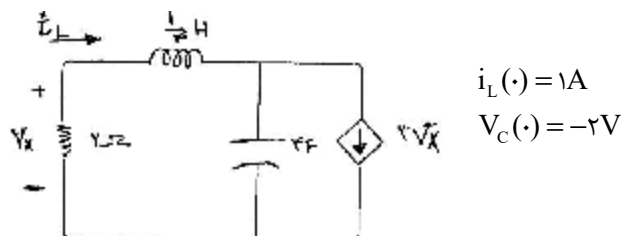
و پاسخ، اشتراک دو شرط بالا است.

مثلاً اگر قرار دهیم $C = 2F$ و $L = 1H$ و $R_r = 1\Omega$ ، آنگاه $R_1 = \frac{1}{2}\Omega$ و شرط دوم نقص می‌شود ($R_1 = \frac{1}{2} < R_r = 1$)

پس این مدار اصلاً نمی‌تواند یک نوسان‌ساز باشد.

بنابراین دو شرط فوق باید همزمان برقرار باشد.

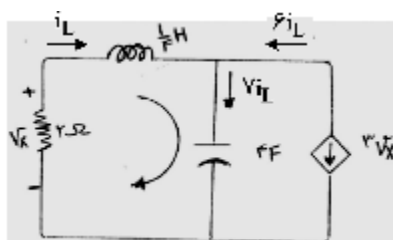
مثال ۲: در مدار شکل زیر، معادله دیفرانسیلی برای i_L تشکیل دهید و سپس پاسخ ورودی صفر $i_L(t)$ را به دست آورید.



با توجه به شکل می‌توان گفت:

$$V_x = -2i_L \rightarrow 3V_x = -6i_L$$

پس با KCL زدن روی شکل داریم:



مشتق $\rightarrow$ KVL: $2i_L + \frac{1}{4} \frac{di_L}{dt} + V_c(0) + \frac{1}{4} \int_0^t v_{i_L} dt = 0$

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} i_L = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

و برای شرایط اولیه داریم:

$$i_L(0) = 1$$

$$t = 0 \rightarrow 2i_L(0) + \frac{1}{4} \frac{di_L(0)}{dt} + V_c(0) + \frac{1}{4} \int_0^0 v_{i_L}(t) dt = 0 \rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

پس معادله دیفرانسیل را با شرایط اولیه $i_L(0) = 1$ و $\frac{di_L(0)}{dt} = 0$ حل می‌کنیم.

$$S^2 + \frac{1}{2}S + 1 = 0 \rightarrow S_1 = -1, S_2 = -1$$

پس مدار در حالت میرای شدید است.

$$i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t}$$

و برای ضرائب K_v و K_r داریم:

$$\begin{cases} i_L(\cdot) = 1 \\ \frac{di_L(\cdot)}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_v + K_r = 1 \\ -K_v - \gamma K_r = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_v = \frac{\gamma}{\epsilon} \\ K_r = -\frac{1}{\epsilon} \end{cases}$$

پس پاسخ نهایی برابر است با:

$$i_L(t) = \frac{\gamma}{\epsilon} e^{-t} - \frac{1}{\epsilon} e^{-\gamma t}$$

برای یافتن پاسخ در سؤالات تستی، نیاز به حل کامل و وقت گیر سؤال به صورتی که بیان شد نمی باشد. می توان با استفاده از «شرایط اولیه» و «شرایط اولیه مشتق»، پاسخ درست را پیدا کرد.

5-2-2- کاربرد شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق

معادله دیفرانسیل مدارهای مرتبه دوم دارای دو شرط اولیه می باشند، $y(\cdot)$ و $\frac{dy(\cdot)}{dt}$. در بسیاری از مسائل شرط اول به صورت $i_L(\cdot)$ یا $V_C(\cdot)$ داده می شود ولی معمولاً شرط دوم که به آن شرط اولیه مشتق گفته می شود، به صورت مستقیم بیان نمی شود.

بنابراین در بسیاری از تست ها و به خصوص برای رد گزینه، لازم است که $\frac{di_L(\cdot)}{dt}(\cdot)$ یا $\frac{dV_C(\cdot)}{dt}$ را به دست آوریم.

برای این منظور به روش زیر عمل می کنیم:

۱- رسم مدار در لحظه ی $t = 0^-$ به کمک رابطه ی بی نهایت و یافتن شرایط اولیه $i_L(0^-)$ و $V_C(0^-)$.

۲- با استفاده از قضیه پیوستگی می توان گفت: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ و $V_C(0^+) = V_C(0^-)$

۳- رسم مدار در لحظه ی $t = 0^+$ به کمک رابطه ی صفر و یافتن $i_C(0^+)$ و $V_L(0^+)$

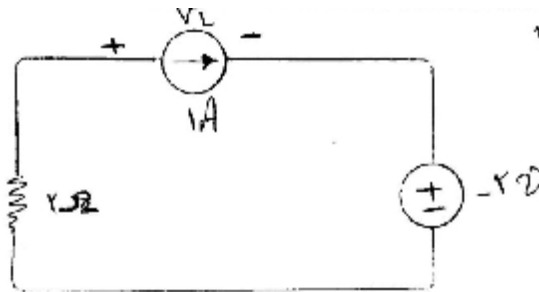
۴- استفاده از روابط اساسی سلف و خازن برای یافتن شرایط اولیه مشتق:

$$\begin{aligned} \frac{di_L(0^+)}{dt} &= \frac{V_L(0^+)}{L} = \frac{\text{ولتاژ اولیه سلف}}{L} \\ \frac{dV_C(0^+)}{dt} &= \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{\text{جریان اولیه خازن}}{C} \end{aligned}$$

۵- استفاده از شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق در حل مسأله و رد گزینه ها

در مثال قبل، برای یافتن شرایط اولیه مشتق به روش بیان شده می توان گفت:

رسم مدار در $t = 0^+$ به کمک رابطه صفر.

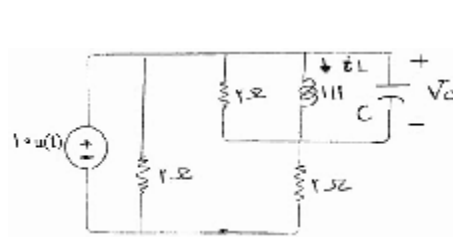


$$\text{KVL: } V_L = -2 - (2 \cdot -1) = 0 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{V_L(0^+)}{L} = 0$$

و با استفاده از شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق، می توان گزینه درست را انتخاب کرد.

اکنون به بررسی چند مثال می پردازیم.

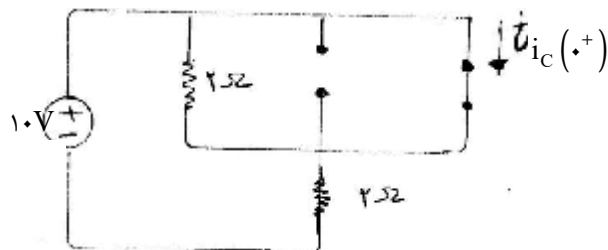
مثال ۳: در مدار شکل زیر، مقدار ظرفیت خازن چقدر است؟



$$\begin{cases} i_L(0^+) = V_C(0^+) = 0 \\ \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \\ \frac{dV_C(0^+)}{dt} = 10 \text{ V} \end{cases}$$

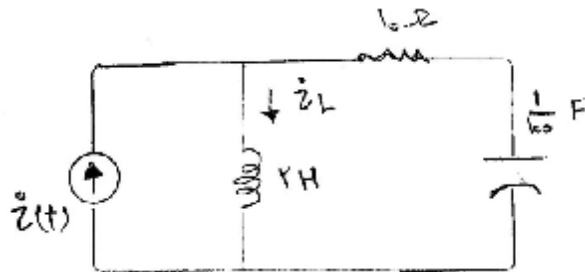
با توجه به شرایط اولیه داده شده، مدار را در $t = 0^+$ رسم می کنیم:

$$i_C(0^+) = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$



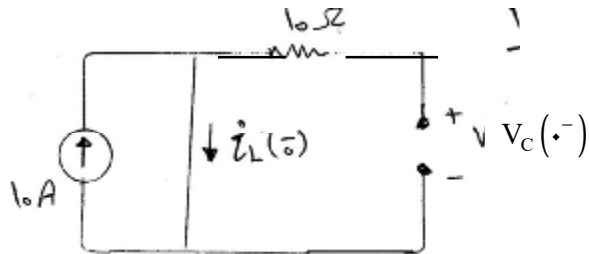
$$\frac{dV_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} \rightarrow C = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ F}$$

۴- در مدار شکل زیر، $\frac{di_L}{dt}(\cdot^+)$ را به دست آورید.



$$i(t) = 10 + 10 \cdot e^{-t} \cos t u(t)$$

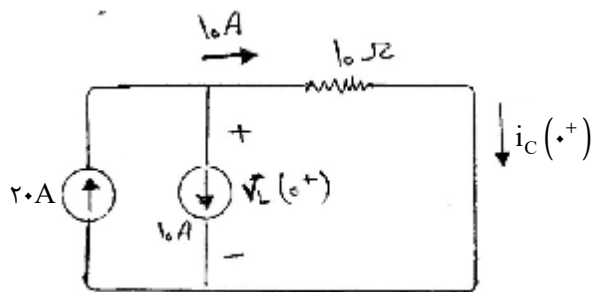
با توجه به معلوم نبودن شرایط اولیه، مدار را در $t = 0^-$ رسم می‌کنیم:



$$i_L(\cdot^-) = 10 \text{ A}$$

$$V_C(\cdot^-) = 0$$

اکنون مدار را در $t = 0^+$ رسم می‌کنیم:



$$V_L(\cdot^+) = 10 \cdot 10 = 100 \text{ V}$$

$$i_C(\cdot^+) = 10 \text{ A}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{di_L(\cdot^+)}{dt} = \frac{V_L(\cdot^+)}{L} = \frac{100}{2} = 50 \frac{\text{A}}{\text{S}}$$

$$\frac{dV_C(\cdot^+)}{dt} = \frac{i_C(\cdot^+)}{C} = \frac{10}{1} = 10 \dots \frac{V}{S}$$

نکته: اگر در یک مسأله سیگنالی غیر از V_C و i_L خواسته شده باشد می توان گفت:

در یک مدار مرتبه ی دوم می توان هر متغیری را برحسب V_C ها و i_L ها نوشت.

به عبارت دیگر هر سیگنالی به کمک روابط KCL و KVL قابل بیان به صورت ترکیبی خطی از V_C ها و i_L ها است.

پس اگر از این رابطه مشتق بگیریم، $\frac{dy}{dt}$ سیگنال موردنظر برحسب $\frac{dV_C}{dt}$ ها و $\frac{di_L}{dt}$ ها به دست می آید و از این طریق

می توان شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق را پیدا کرد و حل مسأله مانند روال گفته شده انجام می شود.

5-2-2- پاسخ خصوصی مدارهای مرتبه دوم

پاسخ خصوصی ناشی از ورودی است و هم جنس با عبارت سمت راست معادله دیفرانسیل است.

مهمترین پاسخ های مدارهای مرتبه دوم، پاسخ پله و پاسخ ضربه است.

در این حالت، منظور فقط ورودی است و دیگر خبری از شرایط اولیه نمی باشد.

می توان گفت پاسخ کامل شامل دو بخش پاسخ گذرا (میرا شونده) و پاسخ دائمی (ماندگار) است. در نتیجه می توان گفت:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) \text{ : پاسخ دائمی یا ماندگار}$$

یعنی پاسخ خصوصی همان پاسخ دائمی یا ماندگار است. این حالت خاص وقتی برقرار است که ورودی مدار فقط منابع

DC باشد.

به عبارت دیگر، می توان از روابط بی نهایت $(y(\infty))$ برای یافتن پاسخ خصوصی استفاده نمود.

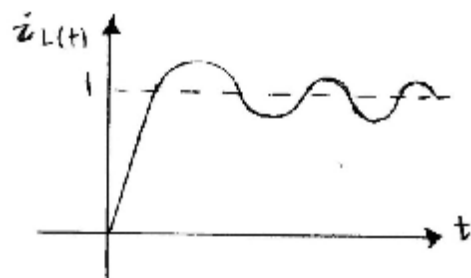
مثلاً برای مدار RLC موازی، پاسخ پله به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LC} u(t) \\ i_L(\cdot) = 0, \quad \frac{di_L(\cdot)}{dt} = 0 \end{cases}$$

پاسخ همگن (با فرض میرای ضعیف بودن مدار) و خصوصی برابرند با:

$$i_{Lh}(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$i_{LP}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_L(t) = 1$$

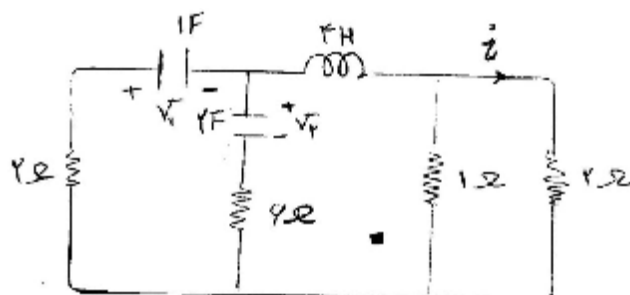


و برای پاسخ ضربه، می‌توان از پاسخ پله مشتق گرفت:

$$h(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای مرتبه‌ی دوم

۱- در مدار شکل زیر، اگر $i(0^-) = 2A$ و $V_1(0^-) = 3V$ و $V_2(0^-) = 1V$ باشد، $\frac{di(0^+)}{dt}$ چقدر است؟



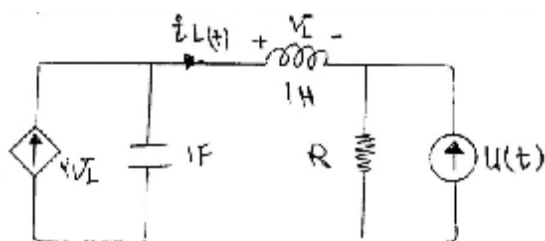
$$-\frac{5}{4} \quad (1)$$

$$-\frac{11}{2} \quad (2)$$

$$\frac{11}{12} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

۲- در مدار مرتبه‌ی دوم شکل زیر، پاسخ حالت صفر $i_L(t)$ به ورودی پله واحد کدام مشخصه زیر را دارد؟



(۱) به ازای $R = 2\Omega$ پاسخ مدار بی‌اتلاف خواهد بود.

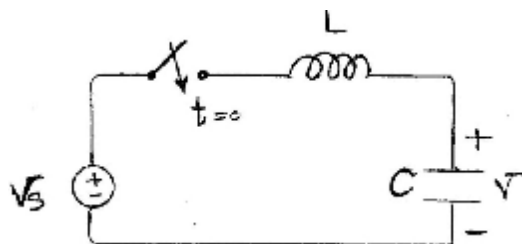
(۲) به ازای $R = 2\Omega$ پاسخ مدار میرای بحرانی خواهد بود.

(۳) به ازای $R = 4\Omega$ پاسخ مدار میرای شدید خواهد بود.

(۴) به ازای $R > 4\Omega$ پاسخ مدار میرای ضعیف خواهد بود.

۳- در مدار شکل زیر، V_s یک منبع ولتاژ DC است. در چه زمانی ولتاژ دو سر خازن دو برابر V_s می‌شود؟

(ولتاژ اولیه خازن صفر است.)



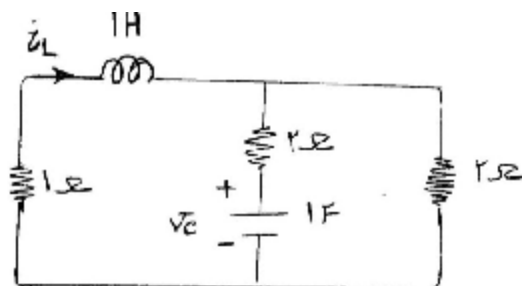
$$t = \pi\sqrt{LC} \quad (1)$$

$$t = 2\pi\sqrt{LC} \quad (2)$$

$$t = \frac{\sqrt{LC}}{\pi} \quad (3)$$

(۴) امکان ندارد ولتاژ دو سر خازن دو برابر ولتاژ ورودی باشد.

۴- اگر در مدار زیر $i_L(0^-) = \frac{4}{15} A$ و $i_L''(0^-) = 2$ باشد، $V_C(0^-)$ برابر چند ولت است؟



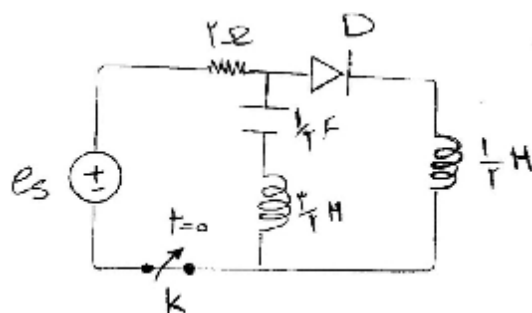
(۱) -۴

(۲) $\frac{8}{9}$

(۳) ۴

(۴) ۸

۵- در مدار شکل زیر $e_s = u(-t)$ است. برای زمان‌های $t \geq 0$ دیود D چه مدت زمانی هادی خواهد بود؟



(۱) π ثانیه

(۲) $\frac{\pi}{2}$ ثانیه

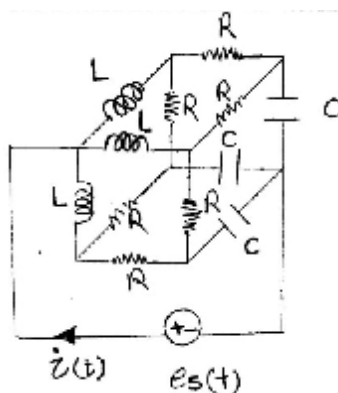
(۳) $\frac{\pi}{4}$ ثانیه

(۴) $\frac{2\pi}{3}$ ثانیه

۶- در مدار شکل زیر، سه سلف هر کدام به مقدار یک هانری، سه خازن هر کدام به مقدار دو فاراد و شش

مقاومت هر کدام به مقدار سه اهم روی یال‌های یک مکعب قرار دارند. پاسخ حالت صفر جریان i گذراننده از

منبع برای ورودی $e_s(t) = u(t)$ کدام است؟ ($C = 2F$, $L = 1H$, $R = 3\Omega$)



(۱) $i = (2e^{-t} - 2e^{\frac{-t}{2}})u(t)$

(۲) $i = (-2e^{-t} + 2e^{\frac{t}{2}})u(t)$

(۳) $i = (-6e^{-t} + 6e^{\frac{t}{2}})u(t)$

(۴) $i = (6e^{-t} - 6e^{\frac{t}{2}})u(t)$

۷- در مدار شکل زیر کلید S در $t = 0$ بسته می‌شود و مدار در حالت میرای بحرانی قرار می‌گیرد.

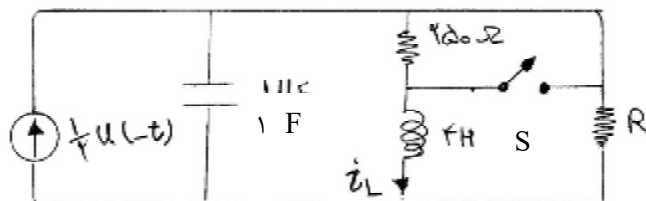
جریان $i_L(t)$ کدام است؟

(۱) $(0.4 + 2/25t)e^{-500t}u(t)$

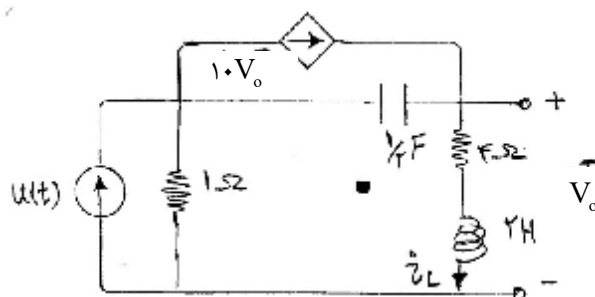
(۲) $(0.4 + 0.2/25t)e^{-200t}u(t)$

(۳) $(0.4 + 225t)e^{-1000t}u(t)$

(۴) $(0.4 + 225t)e^{-500t}u(t)$



۸- در مدار شکل زیر $V_o(+)$ و $\frac{di_L}{dt}(+)$ چقدر است؟ (جریان اولیه سلف و ولتاژ اولیه خازن را صفر فرض کنید).



(۱) ۸ و ۱

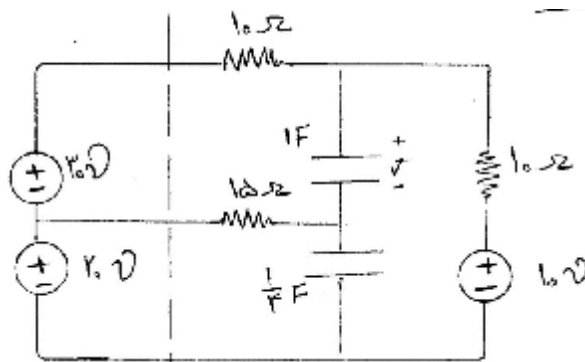
(۲) ۸/۷۵ و ۱

(۳) -۸ و -۱

(۴) -۹ و -۱

۹- مدار شکل زیر به مدت زیادی در این حالت بوده است. در لحظه $t = 0$ از محل خط چین قطع می‌شود.

ولتاژ V را محاسبه کنید.



(۱) $4e^{-\frac{t}{\tau}} + 6$

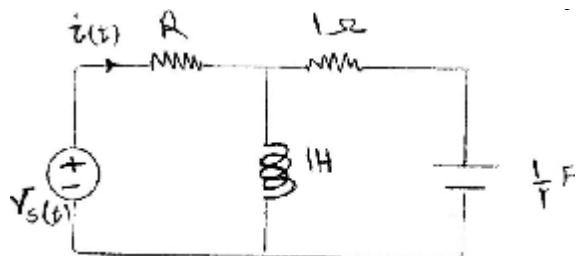
(۲) $4e^{-\tau t} + 6$

(۳) $8e^{-\tau t} + 2$

(۴) $8e^{-\frac{t}{\tau}} + 2$

۱۰- در مدار شکل زیر مقدار R چقدر باشد تا برای ورودی ضربه $V_s(t) = \delta(t)$ جریان $i(t)$ گذرانده از R

جمله‌ای به صورت $\frac{2}{3}\delta(t)$ داشته باشد؟



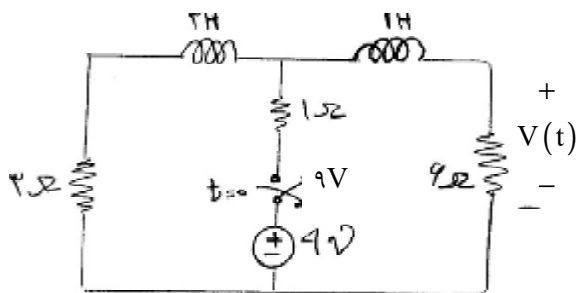
(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{3}$

۱۱- کلید S زمانی طولانی بسته بوده و در لحظه‌ی $t = 0$ باز می‌شود. $V(t)$ برای $t > 0$ کدام است؟



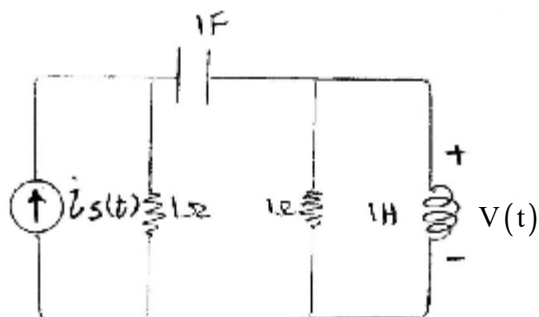
(۱) $12e^{-\frac{4}{9}t}$

(۲) $6e^{-\frac{4}{9}t}$

(۳) $-12e^{-\frac{4}{9}t}$

(۴) $-7/5e^{-\frac{4}{9}t}$

۱۲- در مدار زیر معادله دیفرانسیل مرتبط کننده $V(t)$ و $i_s(t)$ کدام است؟



(۱) $\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} + V = \frac{di_s}{dt}$

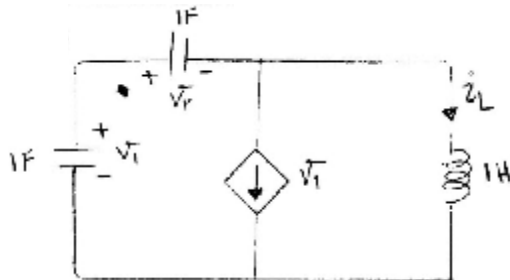
(۲) $2\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} + V = 2\frac{di_s}{dt}$

(۳) $2\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} + V = \frac{di_s}{dt}$

(۴) $\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{dV}{dt} + V = 2\frac{di_s}{dt}$

۱۳- در مدار شکل زیر شرایط اولیه $(V_1(0), V_2(0), i_L(0))$ را به نحوی تعیین کنید که هیچ متغیر شبکه

تحریک نگردد؟



(۱) $(1, 1, -1)$

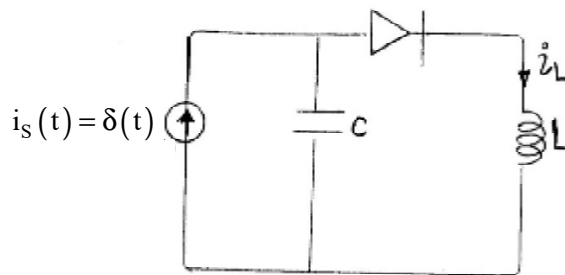
(۲) $(1, 0, -1)$

(۳) $(1, -1, 1)$

(۴) $(1, 0, 0)$

۱۴- دیود D در مدار شکل زیر ایده آل است. شکل موج جریان گذرنده از سلف کدام است؟

(شرایط اولیه مدار صفر می باشد. $P_{\Delta}(t)$ تابع پالس واحد و $\delta(t)$ تابع ضربه واحد است.)



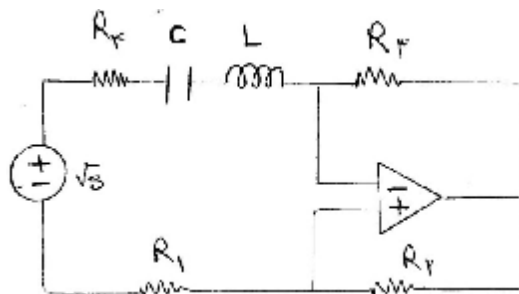
(۱) $i_L = P_1(t) \cdot \text{Sint}$

(۲) $i_L = P_1(t) \cdot \text{Cost}$

(۳) $i_L = \pi P_{\pi}(t) \cdot \text{Sint}$

(۴) $i_L = \pi P_{\pi}(t) \cdot \text{Cost}$

۱۵- مدار شکل زیر تحت چه شرایطی نوسان ساز می شود؟



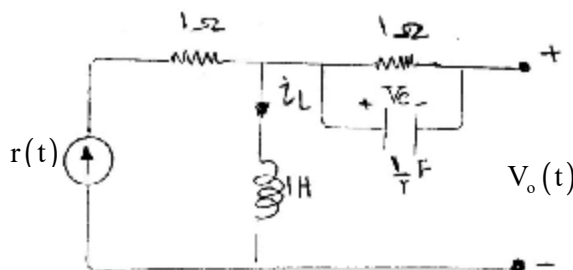
(۱) $R_1 R_f = R_f R_f$

(۲) $\frac{L}{R_1 R_f} = \frac{R_f C}{R_f}$

(۳) $R_1 R_f = R_f R_f$

(۴) این مدار هرگز نمی تواند نوسان ساز باشد.

۱۶- در شکل زیر با فرض $i_L(0^-) = 1A$ و $V_C(0^-) = 1V$ ، ولتاژ $V_o(t)$ برای $t \geq 0$ کدام است؟



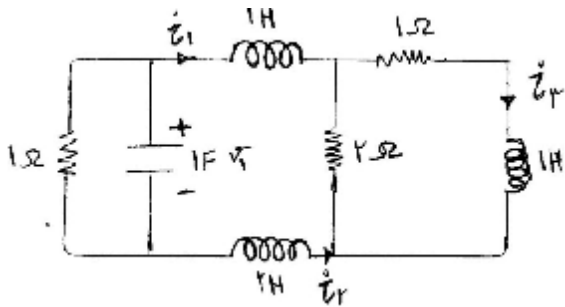
(۱) $1 + e^{-t}$

(۲) $1 - e^{-2t}$

(۳) $e^{-t} - e^{-2t}$

(۴) صفر

۱۷- در مدار شکل زیر مقدار $\frac{di_1(\cdot)}{dt}$ بر حسب جریان اولیه سلف‌ها و ولتاژ اولیه خازن کدام است؟



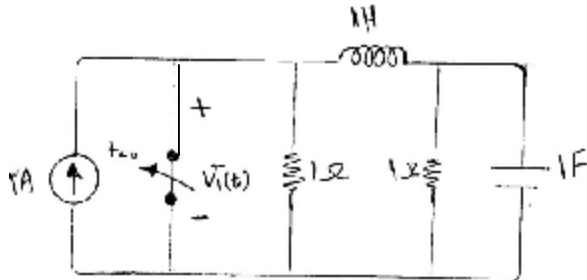
$$V(\cdot) - 2i_1(\cdot) + 2i_2(\cdot) \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}V(\cdot) + i_1(\cdot) - i_2(\cdot) \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}V(\cdot) - \frac{2}{3}i_1(\cdot) + \frac{2}{3}i_2(\cdot) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}V(\cdot) - i_1(\cdot) + i_2(\cdot) - i_2(\cdot) \quad (4)$$

۱۸- در مدار شکل زیر کلید در $t=0$ باز می‌شود و قبل از آن مدار به حالت دائمی رسیده است. $V_1(0^+)$ و



$$\frac{dV_1(0^+)}{dt} \text{ کدام‌اند؟}$$

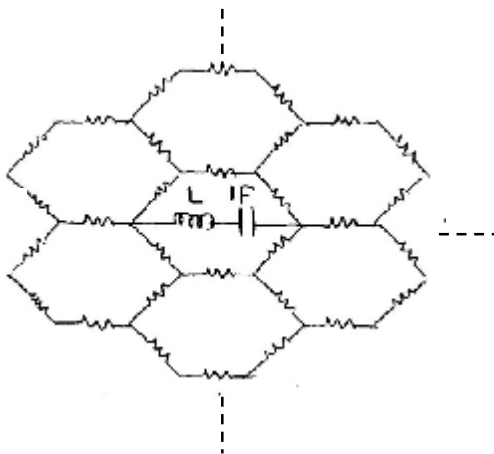
$$3 \text{ و } 0 \quad (1)$$

$$-3 \text{ و } 0 \quad (2)$$

$$3 \text{ و } 3 \quad (3)$$

$$-3 \text{ و } 3 \quad (4)$$

۱۹- تمام مقاومت‌ها یک اهم هستند و شبه از هر طرف به بی‌نهایت می‌رود. به ازای کدام مقدار L ، ضریب



کیفیت $Q = 1/2$ خواهد بود؟

$$0/\Delta H \quad (1)$$

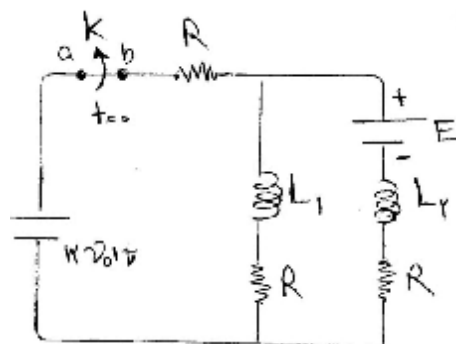
$$1H \quad (2)$$

$$1/2H \quad (3)$$

$$1/96H \quad (4)$$

۲۰- کلید K به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می‌شود. E چند ولت باشد تا در لحظه‌ی باز شدن

کلید، ولتاژ ضربه‌ای بین دو سر a و b ایجاد نشود؟



(۱) ۴

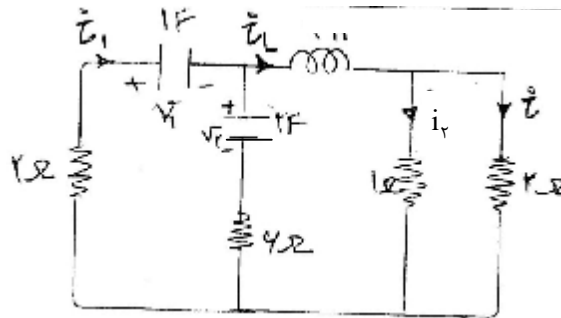
(۲) ۱۲

(۳) ۱۶

(۴) ۲۴

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۱» صحیح است.



در لحظه‌ی $t = 0$ با استفاده از تقسیم جریان داریم:

$$i = \frac{1}{1+2} i_L \rightarrow i_L(0^-) = 2i(0^-) = 3 \quad 2 = 6A$$

در لحظه‌ی $t = 0^+$ ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف تغییر نمی‌کند. پس با KVL زدن در مش سمت چپ داریم:

$$KVL: 2i_1 + V_1 + V_r + 6(i_1 - i_L) = 0 \rightarrow 2i_1 + 3 + 1 + 6(i_1 - 6) = 0 \rightarrow 8i_1 = 32 \rightarrow i_1 = 4A$$

با اعمال KVL در حلقه‌ی وسط داریم:

$$KVL: V_L + 1(i_L - i) + 6(i_L - i_1) - V_r = 0 \xrightarrow{t=0^+} 4 \frac{di_L(0^+)}{dt} + 4 + 12 - 1 = 0 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = -\frac{15}{4}$$

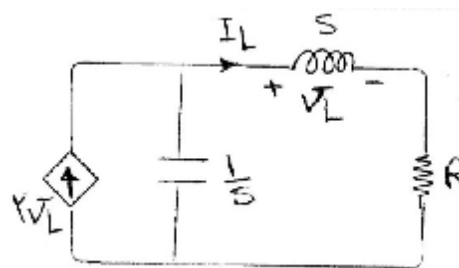
بنابراین:

$$i_L = 3i \rightarrow i = \frac{1}{3} i_L \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{3} \frac{di_L(0^+)}{dt} = -\frac{5}{4}$$

۲- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای مشخص کردن فرم پاسخ باید معادله مشخصه مدار را به دست آوریم. معادله‌ی مشخصه مستقل از ورودی است،

پس می‌توان منبع جریان $u(t)$ را صفر کرده و با انتقال مدار به حوزه لاپلاس داریم:



با KVL زدن در مش سمت راست داریم:

$$\text{KVL: } SI_L + RI_L + \frac{1}{S}(I_L - 2V_L) = 0$$

با قرار دادن $V_L = SI_L$ خواهیم داشت:

$$I_L(S + R + \frac{1}{S} - 2) = 0 \xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} S^2 + (R - 2\frac{1}{S})S + 1 = 0$$

بنابراین اگر $R = 2\Omega$ باشد، $2\alpha = 0$ و پاسخ مدار بی‌اتلاف خواهد بود.

۳- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

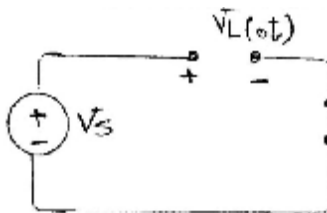
با توجه به شکل دیده می‌شود مدار LC سری و بی‌تلف است، پس فرم کلی پاسخ متغیرهای آن در حوزه زمان به صورت

$$A \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi) \text{ است.}$$

استفاده از ولتاژ دو سر سلف راحت‌تر است (چرا؟). در زمان $t = 0^+$ با بسته شدن کلید، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار

باز است، پس برای ولتاژ سلف در $t = 0^+$ داریم:

$$V_L(t) = A \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi) \xrightarrow{t=0^+} V_L(0^+) = A \cos \varphi = V_S$$



در لحظه‌ی t که ولتاژ دو سر خازن دو برابر V_S است با اعمال KVL در مدار داریم:

$$\text{KVL: } V_S = V_L(t) + V_C(t) \rightarrow V_L(t) = -V_S = A \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi)$$

در نتیجه با استفاده از دو رابطه به دست آمده خواهیم داشت:

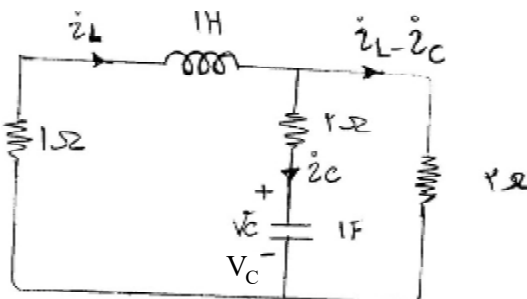
$$\begin{cases} A \cos \varphi = V_S \\ A \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi) = -V_S \end{cases} \rightarrow \cos \varphi = -\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}t = \pi \rightarrow t = \pi\sqrt{LC}$$

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

ولتاژ خازن و جریان سلف پیوسته هستند، یعنی:

$$i_L(\cdot^+) = i_L(\cdot^-) = I_0 = \frac{4}{15} \text{ A و } V_C(\cdot^+) = V_C(\cdot^-) = V_0$$

با KVL زدن در مدار شکل زیر و سپس اعمال KVL داریم:



KVL در مش سمت راست: $2i_C + V_C - 2(i_L - i_C) = 0 \rightarrow i_C = \frac{1}{4}(2i_L - V_C)$

KVL در مش بیرونی: $i_L + \frac{di_L}{dt} + 2(i_L - i_C) = 0$

با جایگذاری دو معادله‌ی فوق در یکدیگر داریم:

$$\frac{di_L}{dt} + 2i_L + \frac{1}{4}V_C = 0 \quad (1)$$

با مشتق‌گیری از معادله‌ی فوق و منظور کردن $i_C = \frac{dV_C}{dt}$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} \frac{dV_C}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} i_C = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} (2i_L - V_C) \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2 \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{4} i_L - \frac{1}{8} V_C = 0 \quad (2)$$

با محاسبه‌ی روابط (1) و (2) در $t = 0^+$ داریم:

رابطه (1) در $t = 0^+$: $\frac{di_L(0^+)}{dt} = -2i_L(0^+) - \frac{1}{4}V_C(0^+) = -2I_0 - \frac{1}{4}V_0$

رابطه (2) در $t = 0^+$: $\frac{d^2 i_L(0^+)}{dt^2} + 2 \frac{di_L(0^+)}{dt} + \frac{1}{4}i_L(0^+) - \frac{1}{8}V_C(0^+) = 0$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L(0^+)}{dt^2} + 2(-2I_0 - \frac{1}{4}V_0) + \frac{1}{4}I_0 - \frac{1}{8}V_0 = 0$$

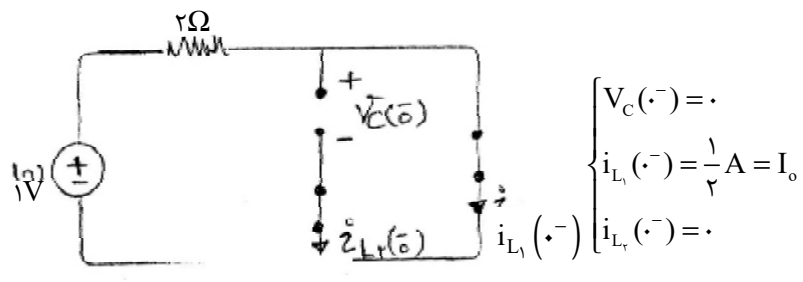
با قرار دادن $I_o = \frac{4}{15} A$ و $i''(0^+) = 2$ داریم:

$$2 + 2\left(-\frac{1}{15} - \frac{1}{2} V_o\right) + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} V_o = 0 \rightarrow V_o = V_C(0^-) = \frac{1}{9} \text{ Volt}$$

۵- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

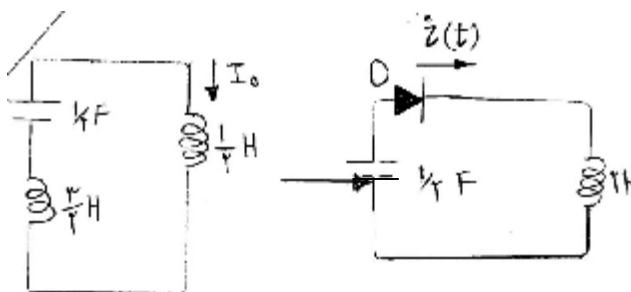
قبل از باز شدن کلید مدار در حالت دائمی قرار دارد، پس سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. در نتیجه برای

$t = 0^-$ داریم:



پس از باز شدن کلید، سلف‌ها سری می‌شوند و با توجه به متفاوت بودن جریان اولیه آن‌ها با استفاده از قانون بقای شار

داریم:



$$i(0^+) = i_L(0^+) = \frac{L_1 i_{L_1}(0^+) + L_2 i_{L_2}(0^+)}{L_1 + L_2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} \quad 0\right)}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2} A$$

بنابراین در $t = 0^+$ دیود روشن و اتصال کوتاه است و هر وقت جریانش صفر شود، خاموش می‌شود، یعنی:

$$i_D(t) = i_L(t) = i(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -2 \sin(t + \theta) \xrightarrow{t=0} V_L(t=0) = 0 \rightarrow \theta = 0$$

اگر t_* زمان خاموش شدن دیود باشد داریم:

$$i_D(t_*) = A \cos(t) = 0 \rightarrow \cos t_* = 0 \rightarrow t_* = \frac{\pi}{2}$$

۶- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مقدار اولیه و نهایی همه‌ی گزینه‌ها برابر صفر است، پس باید از شرایط اولیه مشتق استفاده کنیم.

با توجه به تقارن مدار، $\frac{1}{3}i(t)$ وارد هر سلف می‌شود و چون $L = 1H$ است، مشتق جریان سلف برابر ولتاژ سلف می‌شود.

به عبارت دیگر:

$$i_L(t) = \frac{1}{3}i(t) \rightarrow i(t) = 3i_L(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{di(t)}{dt} = 3 \frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{V_L = L \frac{di_L}{dt}} \frac{di(t)}{dt} = 3V_L(t)$$

در لحظه‌ی صفر، خازن‌ها اتصال کوتاه هستند و چون جریان سلف نیز صفر است، در نتیجه جریان مقاومت هم صفر

می‌شود و کل ولتاژ $u(t) = 1V$ دو سر سلف می‌افتد، پس داریم:

$$\frac{di(\cdot^+)}{dt} = 3V_L(\cdot^+) = 3 \quad 1 = 3$$

که با چک کردن مشتق گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی ۳ در این شرط صدق می‌کند.

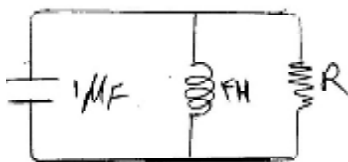
۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به گزینه‌ها، مقدار اولیه در همه‌ی آن‌ها یکسان و برابر 0.4 است، پس:

$$i_L(\cdot^+) = i_L(\cdot^-) = 0.4A$$

در حالت میرایی بحرانی جواب به صورت $(K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}$ و $\alpha\omega_0$ است.

وقتی کلید بسته می‌شود مقاومت 25Ω اهمی اتصال کوتاه شده و مدار به یک مدار RLC موازی تبدیل می‌شود، پس:



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 500 \rightarrow \alpha = \omega_0 = 500$$

پس گزینه‌ی ۱ یا ۴ درست است.

حال $\frac{di_L}{dt}(\cdot^+)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{di_L(\cdot^+)}{dt} = \frac{1}{L} V_L(\cdot^+) = \frac{1}{L} V_C(\cdot^+) = \frac{1}{L} V_C(\cdot^-) = \frac{1}{4} V_C(\cdot^-)$$

در $t = 0^-$ مدار در حالت دائمی قرار دارد و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه است، در نتیجه:

$$V_C(\cdot^-) = 25 \cdot i_L(\cdot^-) = 25 \cdot 0.4 = 10 \text{ V} \rightarrow \frac{di_L(\cdot^+)}{dt} = \frac{10}{4} = 2.5$$

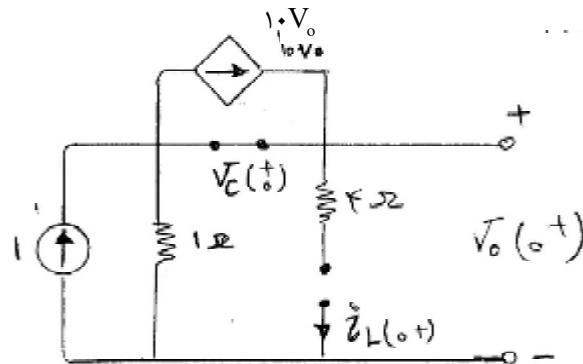
با مشتق‌گیری از گزینه‌ی ۱ و ۴، دیده می‌شود فقط در گزینه‌ی ۴، $\frac{di_L(\cdot^+)}{dt} > 0$ است.

۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

در لحظه‌ی $t = 0$ سلف مدار باز و خازن اتصال کوتاه است، پس تمام جریان $u(t) = 1$ از مقاومت یک اهمی می‌گذرد و

داریم:

$$\begin{cases} V_C(\cdot^+) = 0 \\ i_L(\cdot^+) = 0 \\ V_o(\cdot^+) = 1 \end{cases}$$



از طرفی با توجه به شکل مدار می‌توان گفت:

$$V_o(t) = 4i_L(t) + 2 \frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{t=0^+} 1 = 0 + 2 \frac{di_L(\cdot^+)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(\cdot^+)}{dt} = \frac{1}{2}$$

با اعمال KVL در مش وسطی داریم:

$$4i_L + 2 \frac{di_L}{dt} + (i_L - u(t)) + 2 \int_{-\infty}^+ (i_L - 1 \cdot V_o) dt = 0$$

با مشتق‌گیری از معادله فوق:

$$5 \frac{di_L}{dt} + 2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} - \delta(t) + 2i_L - 2 \cdot V_o = 0$$

برای لحظه‌ی $t = 0^+$ داریم:

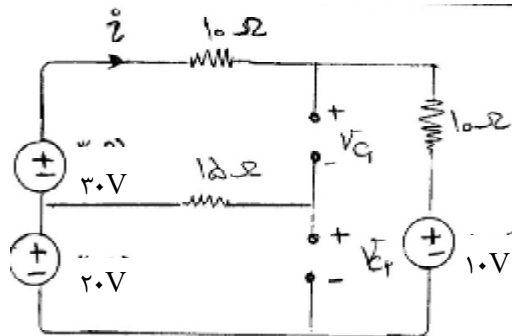
$$\left(5 \frac{1}{2}\right) + 2 \frac{di_L(t^+)}{dt} - (20 - 1) = 0 \rightarrow \frac{di_L(t^+)}{dt} = \frac{17/5}{2} = 8.5$$

۹- گزینه ی «۱» صحیح است.

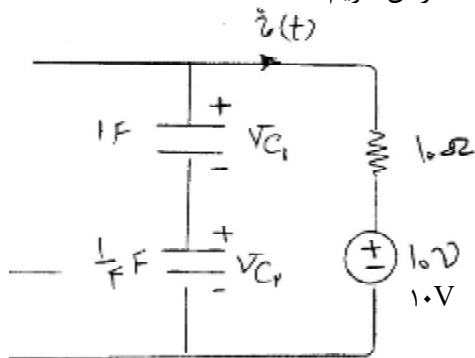
روش اول:

برای مدت طولانی مدار به حالت دائمی رسیده و مخازن ها پر شده اند و به صورت مدار باز در می آیند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} i(t=0) = \frac{20 + 30 - 10}{10 + 10} = 2A \\ V_{C_1}(0) = 10V \\ V_{C_2}(0) = 20V \end{cases}$$



در $t = 0^+$ که مدار از محل نقطه چین قطع می شود با اعمال KVL در آن داریم:



$$i(t) = -i_{C_1}(t)$$



$$\text{KVL: } 1 \cdot i(t) + 10 + (-20 + \int_{-}^{t} i(t) dt) + (-10 + \int_{-}^{t} i(t) dt) = 0$$

$$\rightarrow 1 \cdot i(t) + 5 \int_{-}^{t} i(t) dt = 20 \cdot \frac{d}{dt} \rightarrow 2 \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$$

با در نظر گرفتن $i(t=0) = 2A$ به معادله ی مرتبه اول زیر می رسیم:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{2}i(t) = 0 \rightarrow i(t) = K e^{-\frac{t}{2}} = 2e^{-\frac{t}{2}} \\ i(t=0) = 2A \end{cases}$$

بنابراین برای $V(t) = V_{C_1}(t)$ داریم:

$$V_{C_1}(t) = V_{C_1}(0) + \int_0^t i_{C_1}(t) dt = 10 - \int_0^t 2e^{-\frac{t}{2}} dt = 10 - (-2e^{-\frac{t}{2}}) \Big|_0^t \rightarrow V_{C_1}(t) = 6 + 4e^{-\frac{t}{2}}$$

روش دوم:

پس از قطع شدن مدار از روی خط چین، مداری مرتبه اول داریم که خازن‌ها سری می‌شوند، در نتیجه:

$$\begin{cases} C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} F \rightarrow \tau = R_{eq} C_{eq} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ sec} \\ R_{eq} = 10 \Omega \end{cases}$$

با استفاده از شرایط اولیه مشتق داریم:

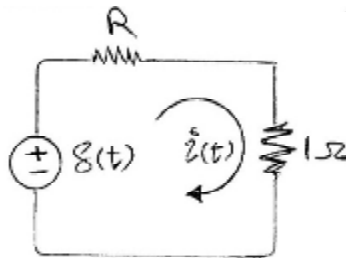
$$\frac{dV(\cdot^+)}{dt} = i_{C_1}(\cdot^+)$$

$$i_{C_1}(\cdot^+) = \frac{10 - (V_{C_1}(\cdot^+) + V_{C_2}(\cdot^+))}{10} = \frac{10 - (10 + 20)}{10} = -2 \text{ A} \rightarrow \frac{dV(\cdot^+)}{dt} = -2$$

بنابراین دو شرط $\tau = 2 \text{ sec}$ و $\frac{dV(\cdot^+)}{dt} = -2$ فقط در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

۱۰- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

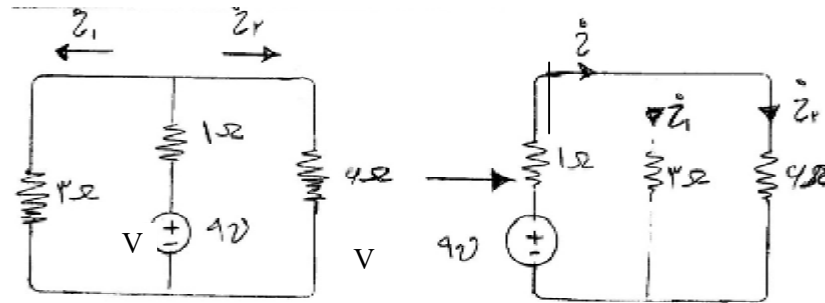
برای ورودی ضربه سلف رامدار باز و خازن را اتصال کوتاه می‌کنیم. در نتیجه داریم:



$$i(t) = \frac{\delta(t)}{R + 1} = \frac{2}{3} \delta(t) \rightarrow R + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow R = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

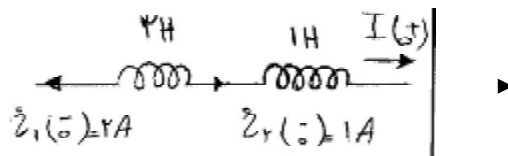
برای به دست آوردن شرایط اولیه، مدار را در $t = 0^-$ تحلیل می‌کنیم:



$$i = \frac{4}{2+1} = 3A, \quad i_1 = \frac{6}{3+6} = 2A, \quad i_2 = 1A$$

$$i_L(0^-) = i_1(0^-) = 2A \quad \text{و} \quad i_C(0^-) = i_2(0^-) = 1A$$

بعد از باز شدن کلید S، سلف‌ها با هم سری می‌شوند و مدار مرتبه اول است. چون جریان سلف‌ها متفاوت می‌باشد، از



قانون بقای شار جریان اولیه داریم:

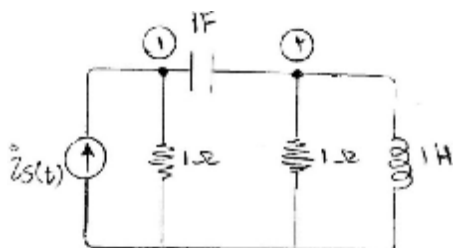
$$I(0^+) = \frac{L_1 i_1(0^-) + L_2 i_2(0^-)}{L_1 + L_2} = \frac{(2)(-2) + (1)(1)}{2+1} = -\frac{5}{3}$$

$$V(0^+) = 6I(0^+) = -6 \cdot \frac{5}{3} = -10 \text{ Volt}$$

که در گزینه‌ی «۴» صدق می‌کند.

۱۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

با نوشتن KVL در گره‌های d و e داریم:



$$V_r = V$$

$$\text{KVL}(l): V_l + \frac{d}{dt}(V_l - V_r) = i_s(t)$$

$$\text{KVL}(r): V_r + \frac{d}{dt}(V_r - V_l) + \int_0^t V_r dt = 0$$

از جمع این دو معادله داریم:

$$V_l + V_r + \int_0^t V_r dt = i_s(t) \rightarrow V_l = i_s(t) - V_r - \int_0^t V_r dt$$

با قرار دادن V_l به دست آمده در رابطه‌ی دوم داریم:

$$V_r + \frac{dV_r}{dt} - \frac{d}{dt}(i_s(t) - V_r - \int_0^t V_r dt) + \int_0^t V_r dt = 0 \rightarrow V_r + \frac{dV_r}{dt} - \frac{di_s(t)}{dt} + \frac{dV_r}{dt} + V_r + \int_0^t V_r dt = 0$$

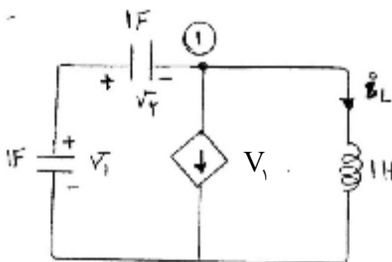
با مشتق‌گیری از این رابطه خواهیم داشت:

$$r \frac{d^2 V_r}{dt^2} + r \frac{dV_r}{dt} + V_r = \frac{d^2 i_s(t)}{dt^2}$$

۱۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

برای این که هیچ متغیر شبکه تحریک نشود لازم است $\frac{dV_l}{dt} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{di_L}{dt} = 0$ باشد یعنی مقدار تمام متغیرهای V_l ،

V_r و i_L ثابت بماند. با نوشتن KVL و KCL داریم:



$$\text{KCL}(1): \frac{dV_r}{dt} = V_l + i_L = 0 \rightarrow i_L = -V_l$$

$$\text{در مش بیرونی: } V_l = V_r + \frac{di_L}{dt} \rightarrow \frac{di_L}{dt} = V_l - V_r = 0 \rightarrow V_l = V_r$$

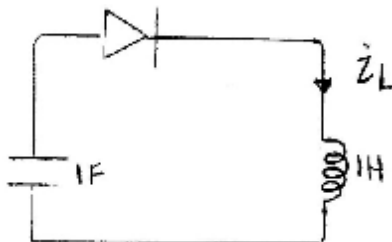
فقط گزینه‌ی ۱ است که در شرایط فوق صدق می‌کند.

۱۴- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

اعمال ورودی ضربه باعث افزایش ولتاژ اولیه خازن از صفر به $\frac{1}{C}$ می‌شود، یعنی ولتاژ خازن از صفر به یک ولت می‌رسد.

برای $t > 0$ منبع جریان ضربه حذف می‌شود و ولتاژ اولیه خازن باعث عبور جریان از مدار خازن، دیود و سلف می‌شود. با

اعمال KVL در این مدار داریم:



$$\text{KVL: } V_L + V_C = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) = 0$$

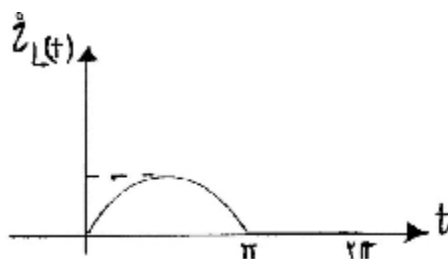
جواب کلی معادله به صورت $i_L(t) = A \sin t + B \cos t$ است که با استفاده از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} i_L(0^-) = 0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^-) = V_C(0^-) = 1V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_L(t) = \sin t \\ V_C(t) = \frac{di_L(t)}{dt} = \cos t \end{cases}$$

جریان گذرنده از سلف یعنی $\sin t$ ، در فاصله $0 < t < \pi$ مثبت است پس دیود اتصال کوتاه است و برای $\pi < t < 2\pi$ ،

جریان عبوری از سلف منفی شده و در نتیجه دیود اتصال باز است. بنابراین:

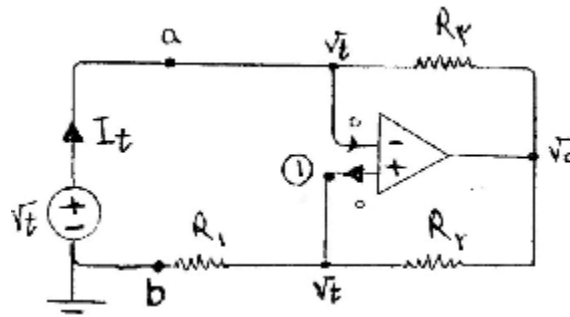
$$i_L(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$$i_L(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)] = \pi P_\pi(t) \sin t$$

۱۵- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

در ابتدا امپدانس ورودی مدار شکل زیر را با قرار دادن منبع ولتاژ تست V_t به دست می‌آوریم:



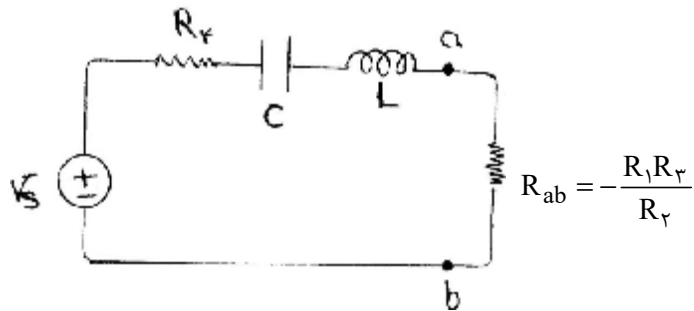
$$I_t = \frac{V_t - V_o}{R_f} \rightarrow V_t - V_o = R_f I_t$$

با KVL زدن در گره d داریم:

$$V_+ = V_- = V_t$$

$$\text{KCL()}: \frac{V_t - 0}{R_1} + \frac{V_t - V_o}{R_f} = 0 \rightarrow \frac{V_t}{R_1} + \frac{R_f I_t}{R_f} = 0 \rightarrow V_t = \frac{R_1 R_f}{R_f} I_t \rightarrow R_{ab} = \frac{V_t}{I_t} = -\frac{R_1 R_f}{R_f}$$

در نتیجه برای مدار اصلی داریم:



برای این که مدار فوق نوسان کند باید مقاومت R_f برابر $\frac{R_1 R_f}{R_f}$ باشد تا کل مدار مانند یک مدار LC رفتار کند.

بنابراین:

$$R_f = \frac{R_1 R_f}{R_f} \rightarrow R_1 R_f = R_f R_f$$

۱۶- گزینه ی «۲» صحیح است.

این مدار در حقیقت دو مدار مرتبه ی اول است که به طور پشت سر هم وصل شده و هیچ ارتباطی با هم ندارند. برای

مدار RC در $t \geq 0$ داریم:

$$\begin{cases} \tau_1 = RC = 1 \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau} \text{ sec} \rightarrow V_C(t) = e^{-\tau t} \\ V_C(\cdot^-) = 1V \end{cases}$$

سلف یک هانری با منبع جریان $i(t)$ سری است، پس:

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} r(t) = u(t)$$

در نتیجه با KVL زدن داریم:

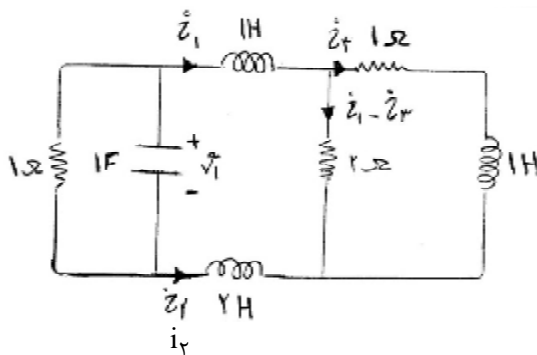
$$\text{KVL: } V_o(t) = -V_C(t) + V_L(t) = -e^{-\tau t} + u(t)$$

برای $t \geq 0$ خواهیم داشت:

$$V_o(t) = 1 - e^{-\tau t}$$

۱۷- گزینه ی «۳» صحیح است.

با توجه به شکل می توان گفت $i_1 = -i_2$ ، در نتیجه با نوشتن KVL در مش وسطی داریم:

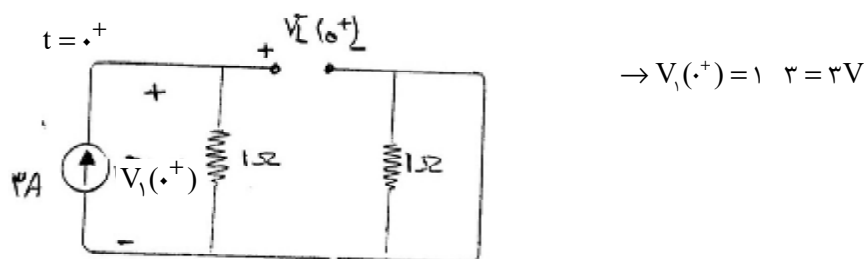
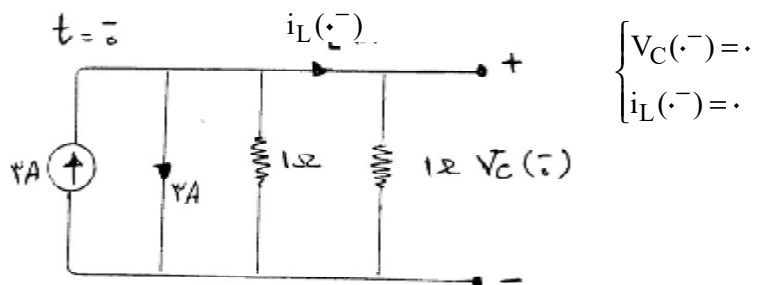


$$\text{KVL: } \frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_3) - 2 \frac{di_2}{dt} - V = 0 \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{di_1}{dt} \rightarrow 3 \frac{di_1}{dt} + 2i_1 - 2i_3 - V = 0$$

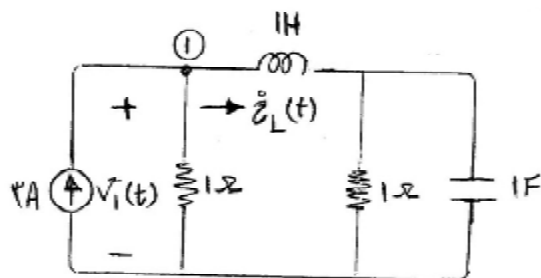
$$\xrightarrow{t=0} \frac{di_1(\cdot)}{dt} = \frac{1}{3} V(\cdot) - \frac{2}{3} i_1(\cdot) + \frac{2}{3} i_3(\cdot)$$

۱۸- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با رسم مدار در حالت دائمی برای $t = 0^-$ و $t = 0^+$ داریم:



با KCL زدن در گره‌ی d داریم:



$$\text{KCL}(d): V_1(t) + i_L(t) = 3 \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{t=0^+} \frac{dV_1(0^+)}{dt} = -\frac{di_L(0^+)}{dt} = -V_L(0^+) = -V_1(0^+) \rightarrow \frac{dV_1(0^+)}{dt} = -3$$

۱۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

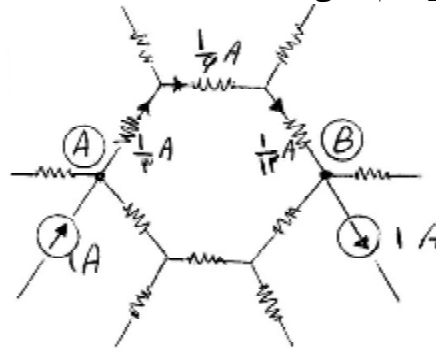
با توجه به شکل می‌توان گفت این مدار یک RLC سری است که برای آن داریم:

$$\frac{R}{2\alpha} \text{ , } \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{\omega_c}{2\alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

پس کافی است مقاومت معادل از دو سر سلف و خازن را به دست آوریم.

برای این منظور یک منبع جریان یک آمپری را از بی‌نهایت به گره A وارد می‌کنیم و یک منبع جریان یک آمپری را از

گره B به سمت بی‌نهایت خارج می‌کنیم، یعنی:



در اثر منبع جریان یک آمپر ورودی داریم:

$$V_{AB} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) \quad 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

و در اثر منبع جریان یک آمپر خروجی داریم:

$$V_{AB} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) \quad 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

با استفاده از قضیه‌ی جمع آثار داریم:

$$V_{AB} = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right)$$

در نتیجه:

$$R_{eq} = V_{AB} = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{4}{6} \Omega$$

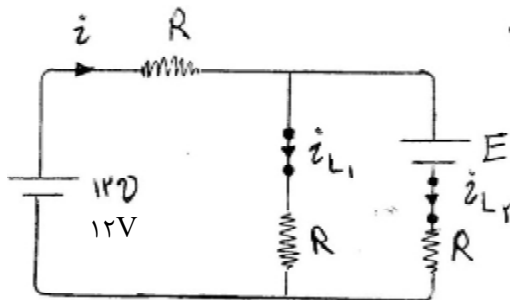
بنابراین برای Q داریم:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{4} \sqrt{\frac{4}{1}} \rightarrow L = 1/96 \text{ H}$$

۲۰- گزینه ی «۴» صحیح است.

مدار فاقد ورودی ضربه است، تنها اتفاقی که می تواند ولتاژ ضربه ایجاد کند، وجود جریان پله در سلفها به دلیل سری شدن آنها بعد از اعمال تغییراتی نظیر باز یا بسته کردن کلید است. برای جلوگیری از این اتفاق باید درست قبل از باز شدن کلید، $i_{L_1} = -i_{L_2}$ باشد تا بعد از باز شدن کلید و سری شدن سلفها مشکلی پیش نیاید.

قبل از باز شدن کلید مدار به حالت دائمی رسیده است، پس داریم:



$$i_{L_1} = -i_{L_2} \rightarrow i = 0$$

$$\text{KVL: } 12 = Ri_{L_1}$$

$$\text{KVL: } E = Ri_{L_1} - Ri_{L_2} = 2Ri_{L_1} = 2 \cdot 12 \rightarrow E = 24 \text{ V}$$

فصل ششم: مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان از مرتبه n

سیستم‌های LTI که به آن‌ها مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان گفته می‌شود با یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی n توصیف می‌شوند. روش تجزیه و تحلیل این مدارها، همانند مدارهای مرتبه اول و دوم است که با استفاده از تجزیه و تحلیل گره و مش، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n با ضرایب ثابت بدست می‌آید.

۶-۱- تجزیه و تحلیل مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) مرتبه‌ی n ام

معادله دیفرانسیل این نوع مدارها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m W}{dt^m} + \dots + b_0 W$$

که در آن W ورودی و y خروجی است.

همراه این معادله دیفرانسیل، n تا شرط اولیه لازم است. شرایط اولیه را می‌توان از معادلات اولیه گره یا مش در زمان $t = 0$ بدست آورد.

6-1-1- پاسخ ورودی صفر

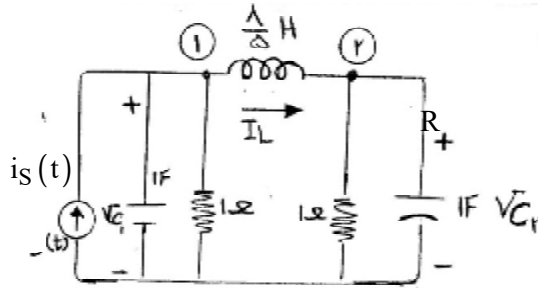
برای بدست آوردن پاسخ ورودی صفر، سمت راست معادله دیفرانسیل فوق را برابر صفر قرار می‌دهیم و در معادله‌ی همگن حاصل، با بدست آوردن ریشه‌های معادله مشخصه و استفاده از انواع پاسخ‌های مطرح شده در مدارهای مرتبه‌ی دوم، پاسخ ورودی صفر را مشخص می‌کنیم. در این حالت معادل هر دسته از ریشه‌های معادله مشخصه، یک دسته جواب خاص داریم.

با توجه به مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل بدست آمده (مرتبه‌ی n ام)، برای یافتن ضرایب پاسخ، از شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق (تا مشتق مرتبه‌ی $(n-1)$ ام) استفاده می‌کنیم.

برای درک بهتر و کامل این موضوع، مثال زیر را بررسی می‌نماییم.

مثال ۱: در مدار شکل زیر، معادله دیفرانسیلی برحسب V_{C_r} بنویسید و پاسخ ورودی صفر را برای آن بدست آورید.

$$V_{C_l}(s) = V_{C_r}(s) = i_L(s) = 1$$



با KCL زدن در گره‌های ۱ و ۲ داریم:

$$\text{KCL}(1): \frac{V_l}{1} + \frac{dV_{C_l}}{dt} + I_L + \frac{\Delta}{\lambda} \int_0^t (V_l - V_r) dt = i_s(t)$$

$$\text{KCL}(2): \frac{V_r}{1} + \frac{dV_{C_r}}{dt} - I_L + \frac{\Delta}{\lambda} \int_0^t (V_r - V_l) dt = 0$$

اگر دو رابطه‌ی فوق را با هم جمع کنیم:

$$V_l + V_r + \frac{dV_{C_l}}{dt} + \frac{dV_{C_r}}{dt} = i_s(t) \rightarrow V_l + \frac{dV_l}{dt} + V_r + \frac{dV_r}{dt} = i_s(t)$$

و با مشتق‌گیری از رابطه‌ی KCL در گره ۲ داریم:

$$\frac{dV_r}{dt} + \frac{d^2 V_r}{dt^2} + \frac{\Delta}{\lambda} (V_r - V_l) = 0$$

با توجه به دو رابطه‌ی آخر و با حذف V_l و $\frac{dV_l}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases} V_l + \frac{dV_l}{dt} = i_s(t) - V_r - \frac{dV_r}{dt} \\ \frac{dV_r}{dt} + \frac{d^2 V_r}{dt^2} + \frac{\Delta}{\lambda} (V_r - i_s(t) - V_r - \frac{dV_r}{dt} - \frac{dV_l}{dt}) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^3 V_r}{dt^3} + 2 \frac{d^2 V_r}{dt^2} + \frac{9}{4} \frac{dV_r}{dt} + \frac{\Delta}{4} V_r = \frac{\Delta}{\lambda} i_s(t)$$

معادله مشخصه برابر است با:

$$S^3 + 2S^2 + \frac{9}{4}S + \frac{\Delta}{4} = 0$$

با حل این معادله‌ی درجه ۳، ریشه‌های آن برابر است با:

$$S_1 = -1, \quad S_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j$$

بنابراین فرم کلی پاسخ $V_r(t)$ به صورت زیر است:

$$V_r(t) = Ke^{-t} + e^{-\frac{t}{\tau}}(A \cos t + B \sin t)$$

برای یافتن ضرایب K ، A و B نیازمند سه شرط اولیه برای $V_r(t)$ هستیم.

با توجه به شرایط اولیه مطرح شده در سؤال:

$$V_{C_r}(0) = V_r(0) = 1V$$

دو شرط اولیه دیگر را باید از شرایط مشتق بدست آوریم:

برای بدست آوردن $\frac{dV_r(0)}{dt}$ ، در رابطه‌ی KCL در گره d ، $t=0$ قرار می‌دهیم.

$$V_r(0) + \frac{dV_r(0)}{dt} - I_s + \frac{\delta}{\lambda} \int_1^{\infty} (\dots) dt = 0 \rightarrow 1 + \frac{dV_r(0)}{dt} - 1 + 0 = 0 \rightarrow \frac{dV_r(0)}{dt} = 0$$

و برای $\frac{d^2 V_r(0)}{dt^2}$ ، در رابطه‌ی مشتق KCL در گره d ، $t=0$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{dV_r(0)}{dt} + \frac{d^2 V_r(0)}{dt^2} + \frac{\delta}{\lambda} (V_r(0) - V_1(0)) = 0 \rightarrow 0 + \frac{d^2 V_r(0)}{dt^2} + \frac{\delta}{\lambda} (1 - 1) = 0 \rightarrow \frac{d^2 V_r(0)}{dt^2} = 0$$

پس با توجه به شرایط اولیه بدست آمده داریم:

$$\begin{cases} V_r(0) = 1 \\ \frac{dV_r(0)}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 V_r(0)}{dt^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K + A = 1 \\ -K - \frac{1}{\tau} A + B = 0 \\ K - \frac{3}{\tau^2} A - B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

و پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$V_r(t) = e^{-t} + e^{-\frac{t}{\tau}} \sin t$$

حل این دسته از مسائل به روش بیان شده، طولانی و وقت‌گیر است و در سؤالات تستی عاقلانه نمی‌باشد. پس باید به

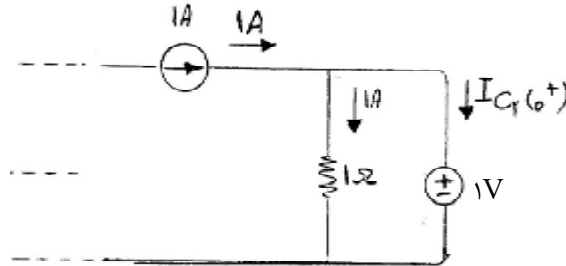
دنبال روشی بود که بدون حل مسأله به طریق فوق، با بدست آوردن شرایط اولیه و شرایط اولیه مشتق، جواب صحیح را

در مسائل تستی پیدا کرد. برای این منظور، از روش بیان شده در مدارهای مرتبه‌ی دوم در بخش ۵-۲-۲ استفاده

می‌کنیم.

مثلاً در همین مثال، برای یافتن $\frac{dV_r(t)}{dt}$:

مدار را در $t = 0^+$ به کمک رابطه‌ی صفر رسم می‌کنیم.



$$\text{KCL: } 1 = 1 + I_{C_r}(0^+) \rightarrow I_{C_r}(0^+) = 0$$

$$\frac{dV_r(0^+)}{dt} = \frac{I_{C_r}(0^+)}{C} = 0$$

پس می‌توان گفت گزینه‌ای درست است که اگر از آن مشتق بگیریم و $t = 0$ قرار دهیم، حاصل آن صفر می‌شود.

در این سؤال، قسمتی از مدار که در سمت چپ منبع جریان قرار دارد و با آن سری شده است، اهمیتی ندارد زیرا هر چه که باشد، جریان خروجی‌اش 1A است و برای بررسی سمت راست مدار، همین اطلاع کافی می‌باشد.

به عبارت دیگر، در حل مسائل تستی، تنها همان بخش از مدار که لازم است را بررسی می‌کنیم و زمان را برای تحلیل سایر قسمت‌های مدار که نیازی به آن‌ها نیست، تلف نمی‌کنیم.

6-1-2- پاسخ حالت صفر

در این حالت شرایط اولیه وجود ندارند و هدف بدست آوردن خروجی، در اثر اعمال یک ورودی است.

برای این منظور می‌توان مدار را هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس تجزیه و تحلیل نمود.

$$X(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \quad X(S) \rightarrow \boxed{H(S)} \rightarrow Y(S)$$

که $h(t)$ را پاسخ ضربه و $H(S)$ را تابع تبدیل می‌گویند.

در این قسمت به بررسی مدار در حوزه زمان می‌پردازیم و بررسی در حوزه فرکانس در فصل یازدهم بیان می‌شود.

در حوزه زمان دو نوع مسأله وجود دارد:

۱- ورودی و خروجی را داریم و پاسخ ضربه را می‌خواهیم.

در این نوع از مسائل، با مشتق‌گیری از طرفین ورودی و خروجی و استفاده از خواص جمع آثار و تغییرناپذیری با زمان،

در طرف ورودی توابع غیر ضربه را حذف می‌کنیم تا در طرف ورودی فقط ضربه داشته باشیم و در نتیجه پاسخ مربوط به ورودی ضربه (که همان پاسخ ضربه است) در خروجی ظاهر می‌شود.

برای درک بهتر این موضوع به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۲: با توجه به ورودی و خروجی داده شده، پاسخ ضربه را بدست آورید.

$$x(t) = e^{-2t}.u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}).u(t)$$

اگر یک بار از ورودی و خروجی مشتق بگیریم و یک بار آن‌ها را در ۲ ضرب کنیم و سپس طرفین را با هم جمع نماییم:

$$-2e^{-2t}u(t) + \delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

$$2e^{-2t}u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{-t}u(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه بدست می‌آید:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

مثال ۳: در سیستم زیر، پاسخ ضربه را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x(t) = \text{Cost}.u(t) \\ y(t) = e^{-t}.u(t) \end{cases}$$

از طرفین ورودی و خروجی مشتق می‌گیریم:

$$\text{Cost}.u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{-t}.u(t)$$

$$-\text{Sint}.u(t) + \delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow -e^{-t}.u(t) + \delta(t)$$

یکبار دیگر هم مشتق می‌گیریم:

$$-\text{Cost}.u(t) + \delta'(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow e^{-t}.u(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

با جمع رابطه‌ی اول و سوم داریم:

$$\delta'(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow 2e^{-t}.u(t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

و در نهایت با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه بدست آمده:

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow -2e^{-t}u(t) + \delta(t) - u(t)$$

بنابراین طرف راست رابطه بالا همان پاسخ به ورودی ضربه یا پاسخ ضربه است:

$$h(t) = (-2e^{-t} - 1)u(t) + \delta(t)$$

۲- ورودی و پاسخ ضربه را داریم و خروجی را می‌خواهیم.

در این نوع مسائل در حوزه زمان، از فرمول کانولوشن استفاده می‌کنیم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau = x * h$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau).x(t-\tau)d\tau = h * x$$

با جایگذاری در روابط فوق، $y(t)$ خروجی به دست می‌آید.

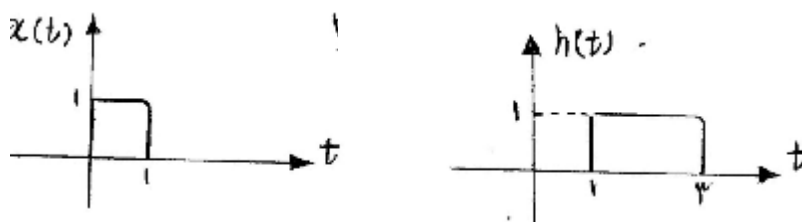
6-2- کانولوشن ترسیمی

هنگامی که شکل موج ورودی و پاسخ ضربه را داشته باشیم، نام محور افقی را τ گذاشته و یکی از $x(\tau)$ یا $h(\tau)$ را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم تا $x(-\tau)$ یا $h(-\tau)$ حاصل شود. با حرکت دادن شکل حاصل به میزان t روی محور افقی به سمت راست به $x(t-\tau)$ یا $h(t-\tau)$ می‌رسیم. در بازه‌های هم فرم که قاعده‌ها یکسان هستند، حاصل ضرب $h(\tau).x(t-\tau)$ یا $x(\tau).h(t-\tau)$ را به دست می‌آوریم و سطح زیر منحنی حاصل را به دست می‌آوریم (یعنی از آن انتگرال می‌گیریم).

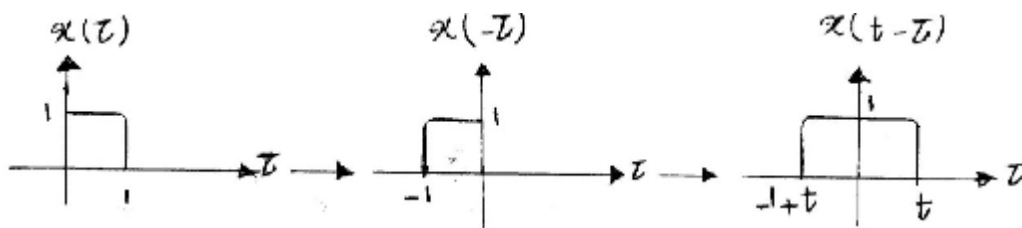
لازم به ذکر است با توجه به خاصیت انتگرال کانولوشن، شکل موجی را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم که ساده‌تر باشد.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۴: با توجه به شکل موج‌های $x(t)$ ورودی و $h(t)$ پاسخ ضربه، خروجی $y(t)$ را به دست آورید.

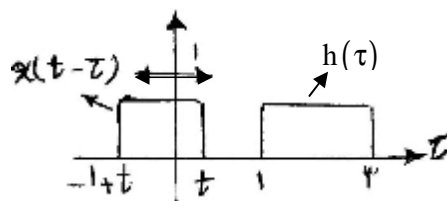


در ابتدا با توجه به ساده‌تر بودن شکل موج ورودی، $x(t-\tau)$ را به دست می‌آوریم:



و با رسم دو شکل موج $x(t-\tau)$ و $h(\tau)$ در بازه‌های زمانی مربوطه داریم:

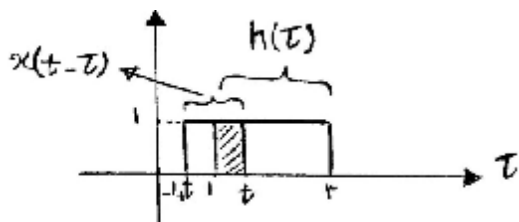
۱) $0 \leq t < 1$



در این بازه دو شکل موج هیچ تداخلی با یکدیگر ندارند، در نتیجه:

$$y(t) = 0$$

۲) $1 \leq t < 2$

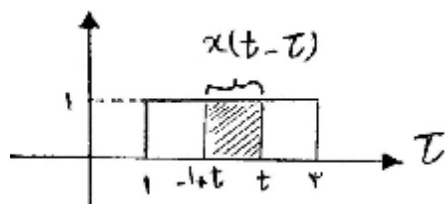


در این بازه با توجه به مقادیر t ، از زمان ۱ تا t ثانیه تداخل داریم، در نتیجه:

$$y(t) = \int_1^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_1^t 1 \cdot 1 d\tau = \tau \Big|_1^t = t - 1$$

که این مقدار برابر است با مساحت هاشور خورده در شکل.

۳) $2 \leq t < 3$

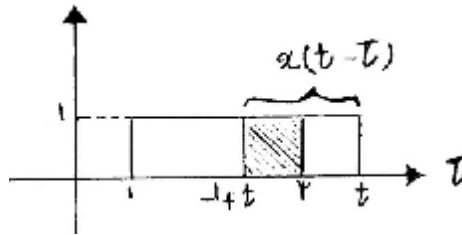


در این بازه زمانی کل شکل موج $x(t-\tau)$ با $h(t)$ تداخل دارد.

به عبارت دیگر، به ازای $t = 2/0.1$ تا $t = 2/99$ در پاسخ هیچ فرقی وجود ندارد. با توجه به مساحت ناحیه هاشور خورده که کل شکل موج $x(t-\tau)$ است داریم:

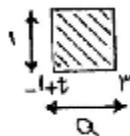
$$y(t) = 1$$

$$4) 3 \leq t < 4$$



در این بازه زمانی، شکل موج $x(t-\tau)$ از موج $h(\tau)$ خارج می‌شود.

انتگرال کانولوشن برابر است با مساحت قسمت هاشور خورده در شکل:



$$a = 3 - (-1+t) = 4 - t \rightarrow y(t) = (4 - t) \quad 1 = 4 - t$$

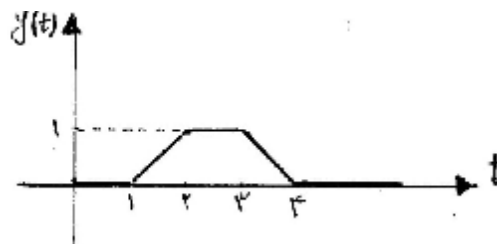
$$5) t \geq 4$$

در این بازه زمانی، شکل موج $x(t-\tau)$ کاملاً از موج $h(\tau)$ عبور می‌کند و هیچ تداخلی با یکدیگر ندارند. پس:

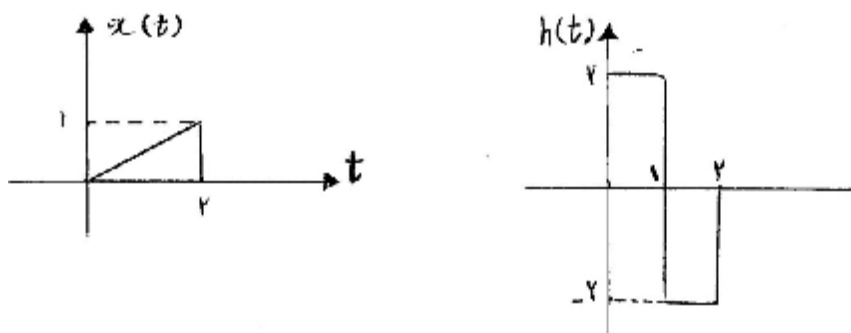
$$y(t) = 0$$

در نتیجه، پاسخ کل به صورت زیر است:

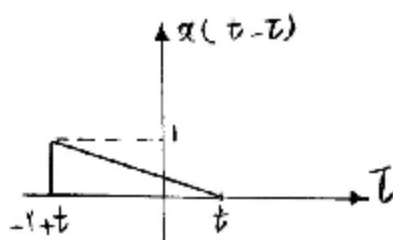
$$y(t) = \begin{cases} 0 & ; & 0 \leq t < 1 \\ t-1 & ; & 1 \leq t < 2 \\ 1 & ; & 2 \leq t < 3 \\ 4-t & ; & 3 \leq t < 4 \\ 0 & ; & t \geq 4 \end{cases}$$



مثال ۵: با توجه به شکل موج‌های ورودی و پاسخ ضربه، خروجی $y(t)$ را به دست آورید.

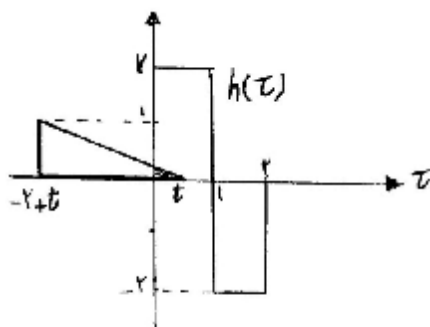


$h(\tau)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و $x(t-\tau)$ را به دست می‌آوریم:



در بازه‌های زمانی هم فرم خواهیم داشت:

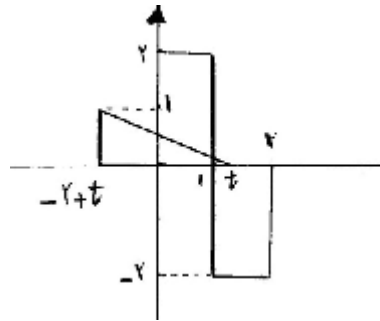
$$1) 0 \leq t < 1$$



با توجه به تداخل شکل موج‌ها داریم:

$$y(t) = \int_{h(\tau)} \left(\frac{t}{2} \right) \text{مساحت شکل} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t^2}{2}$$

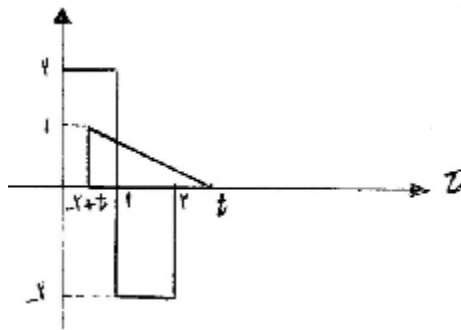
$$2) 1 \leq t < 2$$



$$y(t) = \left[\underbrace{1}_{h(\tau)} \left(\begin{array}{c} \frac{t}{2} \updownarrow \frac{t-1}{2} \\ \text{مساحت شکل} \\ 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \\ x(t-\tau) \end{array} \right) \right] + \left[\underbrace{-1}_{h(\tau)} \left(\begin{array}{c} \frac{t-1}{2} \updownarrow \frac{t-2}{2} \\ \text{مساحت شکل} \\ 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \\ x(t-\tau) \end{array} \right) \right]$$

$$\rightarrow y(t) = 1 \left(\frac{t+t-1}{2} \right) \frac{1}{2} - 1 \left(\frac{t-1}{2} \frac{t-1}{2} \right) = \frac{2t-1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2}$$

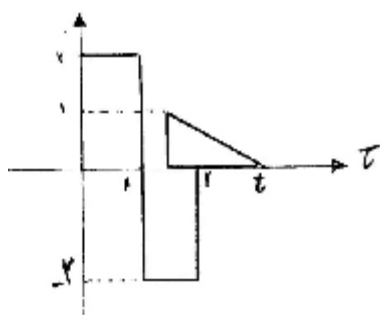
۳) $2 \leq t < 3$



$$y(t) = \left[1 \left(\begin{array}{c} \frac{t}{2} \updownarrow \frac{t-1}{2} \\ \text{مساحت شکل} \\ 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \\ x(t-\tau) \end{array} \right) \right] + \left[-1 \left(\begin{array}{c} \frac{t-1}{2} \updownarrow \frac{t-2}{2} \\ \text{مساحت شکل} \\ 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \\ x(t-\tau) \end{array} \right) \right]$$

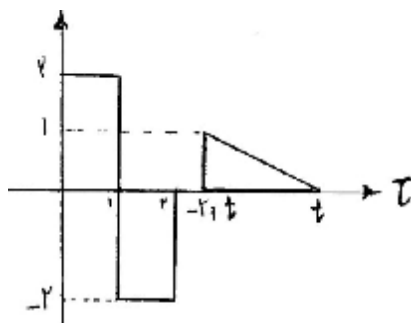
$$= 1 \left(\left(1 + \frac{t-1}{2} \right) \frac{3-t}{2} - 1 \left(\frac{t-1+t-2}{2} \right) \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (t+1)(3-t) - (2t-3)$$

۴) $3 \leq t < 4$



$$y(t) = -2 \left(\text{مساحت شکل} \right) = -2 \left(1 + \frac{t-2}{2} \right) \frac{4-t}{2} = \frac{t(t-4)}{2}$$

$$5) t \geq 4$$



$$y(t) = 0$$

در تست‌ها معمولاً خروجی را در یک لحظه معلوم می‌خواهند. پس به جای چند مرحله محاسبات پارامتری، یک مرحله و به صورت عددی محاسبات را انجام می‌دهیم.

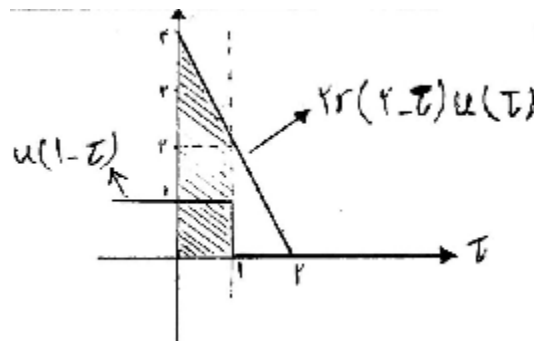
$$y(t_*) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t_* - \tau) d\tau$$

مثال ۶: پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t) = 2r(2-t)u(t)$ است. مقدار پاسخ پله آن را

در $t_* = 1s$ به دست آورید.

در ابتدا $2r(2-t)u(t)$ را رسم می‌کنیم و شکل موج $u(t)$ را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم. پس به میزان

$t_* = 1$ واحد به سمت راست شیفت می‌دهیم. داریم:



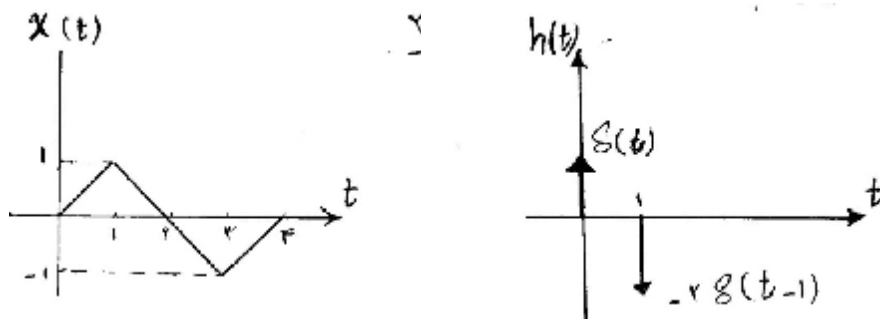
$$y(t)|_{t=1s} = \frac{4+2}{2} = 3$$

* حالت خاص

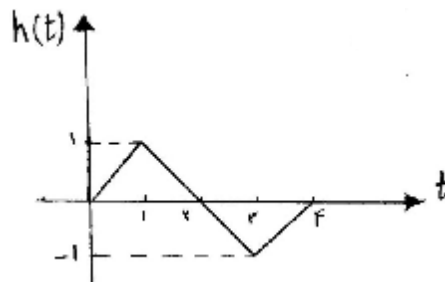
هرگاه یکی از توابع $x(t)$ یا $h(t)$ به صورت ترکیبی خطی از توابع ضربه باشد (فقط توابع ضربه)، با توجه به خاصیت جابه‌جایی، ورودی $x(t)$ را همان تابع می‌گیریم، پس آن تابع دیگر در حکم پاسخ ضربه می‌باشد و با توجه به پاسخ ضربه، خروجی به دست می‌آید.

برای درک بهتر این حالت خاص، مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۷: با توجه به ورودی و پاسخ ضربه، خروجی را به دست آورید.



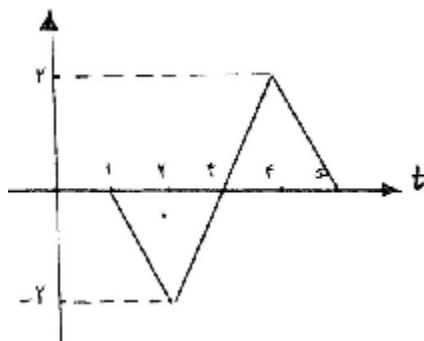
با توجه به توضیحات بیان شده، جای x و h را عوض می‌کنیم و پاسخ ضربه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



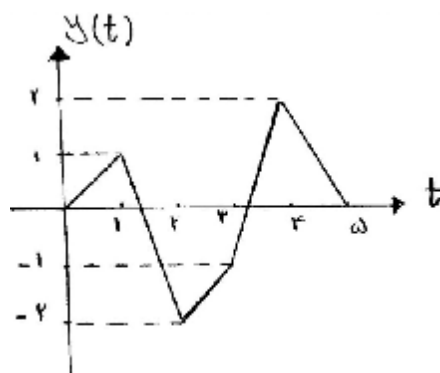
پس اگر $\delta(t)$ به عنوان ورودی باشد، خروجی آن $h(t)$ فوق است.

برای ورودی $-2\delta(t-1)$ ، خروجی $h(t)$ در -2 ضرب می‌شود و به میزان یک واحد به سمت راست شیفت پیدا می‌کند.

یعنی:



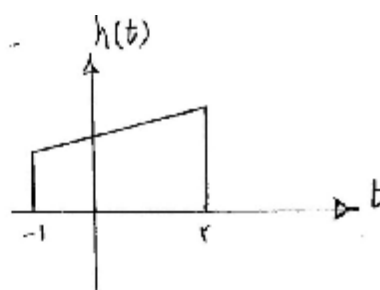
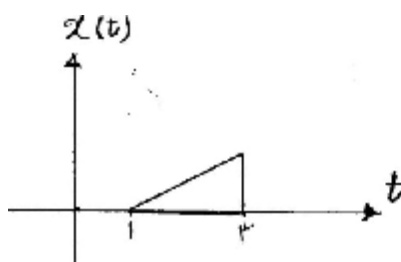
در نتیجه جواب کل، حاصل جمع دو شکل فوق است:



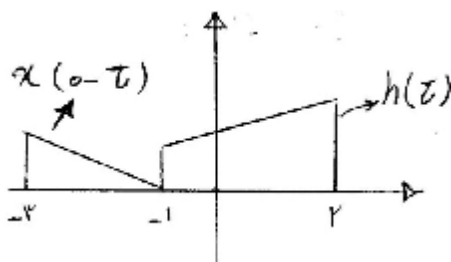
۶-۳- ناحیه پاسخ

در بعضی مواقع، فقط ناحیه پاسخ را می‌خواهیم. برای این منظور، یکی از شکل موج‌ها را نسبت به محور قائم قرینه می‌کنیم و می‌بینیم به ازای چه میزان شیفت t در آن، تداخل دو شکل موج شروع و در کجا پایان می‌پذیرد. این محدوده را ناحیه پاسخ می‌نامیم.

مثال ۸: در کانولوشن شکل موج‌های زیر، ناحیه پاسخ در چه بازه‌ای قرار دارد؟



با قرینه کردن $x(t)$ ، دیده می‌شود که تداخل از $t = 0$ شروع می‌شود:



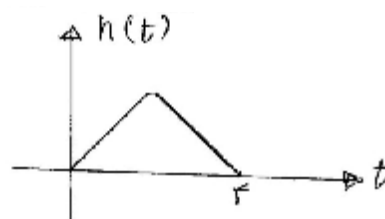
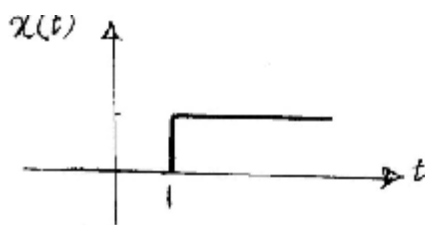
و وقتی شکل سمت چپ را ۵ واحد به سمت راست شیفت دهیم، تداخل تمام می‌شود. پس ناحیه پاسخ برابر است با:

$$0 \leq t < 5$$

نکته: ناحیه پاسخ برابر است با:

جمع حدهای بالا $x(t)$ و $h(t) \leq$ ناحیه پاسخ $\leq$ جمع حدهای پایین $x(t)$ و $h(t)$

مثال ۹: ناحیه پاسخ را به دست آورید.



$$1 \leq t \rightarrow 4 + \infty \leq \text{ناحیه پاسخ} \leq 1 + 0$$

تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۱- کدام عبارت در مورد شبکه‌های LTI متشکل از فقط مقاومت‌ها و خازن‌ها و سلف‌ها (که مقادیر همه‌شان

مثبت است) همواره درست است؟

(۱) در این شبکه‌ها، شرایط اولیه فقط در پاسخ گذرای شبکه تأثیر دارند.

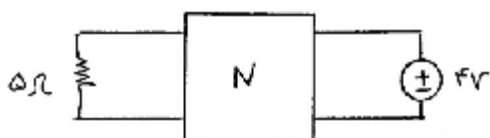
(۲) در این شبکه‌ها، ورودی‌های کران‌دار همیشه خروجی‌های کران‌دار ایجاد می‌کنند.

(۳) در این شبکه‌ها، پاسخ کامل شبکه تابعی از شرایط اولیه است.

(۴) هیچ‌کدام

۲- مدار داده شده در شکل زیر، مقاومتی و خطی و تغییرناپذیر با زمان است. ۸۰ درصد توان متوسط توسط

N جذب می‌شود. اندازه منبع ولتاژ ثابت را چند برابر کنیم تا ۳۰ درصد توان به مقاومت ۵ اهمی برسد؟



(۱) $\frac{3}{2}$ برابر

(۲) $\frac{9}{4}$ برابر

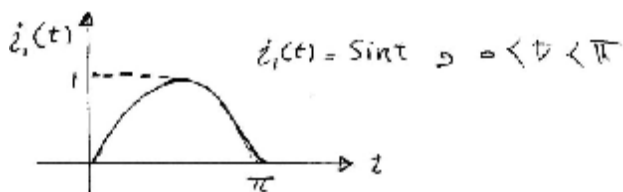
(۳) ۸۰ درصد توان جذب شده توسط 5Ω فقط به مقدار مقاومت بستگی دارد و مستقل از منبع ولتاژ است.

(۴) ۸۰ درصد توان جذب شده توسط 5Ω به مقدار مقاومت و N بستگی دارد و مستقل از اندازه منبع ولتاژ است.

۳- پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به ورودی $i_1(t)$ به صورت

$$V_1(t) = \begin{cases} \sin t - e^{-t}, & 0 < t < \pi \\ e^{-(t-\pi)}, & t > \pi \end{cases}$$

می‌باشد. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی $i_2(t) = \cos t$ در



ت = $\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

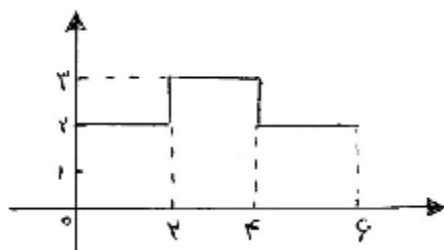
(۱) $-2e^{-\frac{\pi}{2}}$

(۲) $-e^{-\frac{3\pi}{2}}$

(۳) $-\left(1 + e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$

(۴) $-e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$

۴- پاسخ ضربه یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t) = e^{-t}u(t)$ معلوم است. پاسخ حالت صفر این مدار به ورودی مقابل در $t = 3s$ کدام است؟



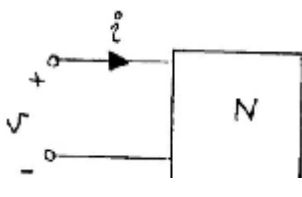
(۱) $3 - e^{-1} - e^{-3}$

(۲) $3 - e^{-1} - 2e^{-3}$

(۳) $2 - 2e^{-1} - 3e^{-3}$

(۴) $3 - 2e^{-1} - 3e^{-3}$

۵- یک قطبی N متشکل از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان و منابع وابسته DC و منابع وابسته از هر نوع می‌باشد. کدام یک از توصیف‌های زیر برای مشخص‌سازی آن همواره برقرار است؟



(۱) $i = \alpha_1 V + \alpha_2$ و α_1 و α_2 ثابت‌های وابسته به N

(۲) $V = k_1 i + k_2$ و k_1 و k_2 ثابت‌های وابسته به N

(۳) $aV + bi + c = 0$ و a و b و c ثابت‌های وابسته به N

(۴) هر سه گزینه فوق صحیح است.

۶- پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به صورت $h(t) = 2r(2-t)u(t)$ می‌باشد. مقدار پاسخ پله این مدار در $t = 1 \text{ sec}$ کدام است؟

(۴) ۱

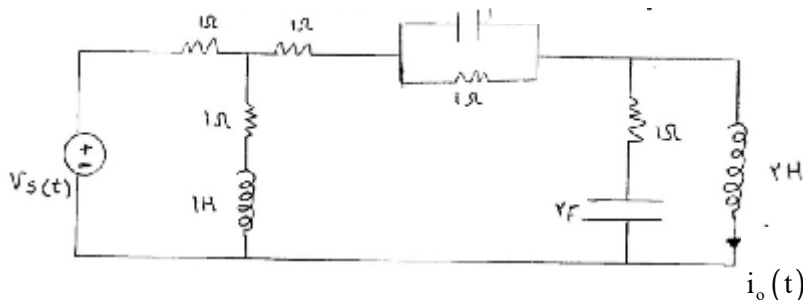
(۳) ۲/۵

(۲) ۳

(۱) ۴

۷- شبکه خطی تغییرناپذیر با زمان شکل زیر در حالت صفر قرار دارد. اگر $V_s(t) = \delta(t)$ باشد، مقدار

$i_o(t)$ چقدر است؟



(۱) $\frac{1}{3} A$

(۲) $\frac{1}{4} A$

(۳) $\frac{1}{6} A$

(۴) $\frac{1}{8} A$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

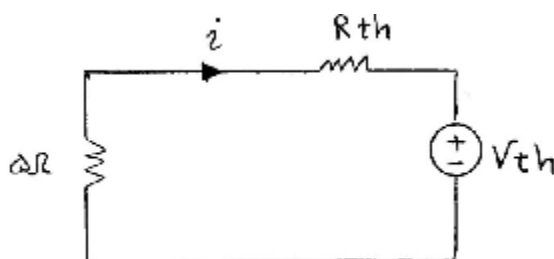
گزینه‌ی «۱» نادرست است زیرا ممکن است شرایط اولیه در پاسخ حالت دائمی نیز تأثیر داشته باشد. مثلاً یک مدار LC با شرایط اولیه $V_C(\cdot) = V_0$ و $i_L(\cdot) = 0$ ، دارای پاسخ گذرا نیست ولی پاسخ حالت دائمی آن برحسب ولتاژ خازن به صورت $V_C(t) = CV_0 \cos \omega_0 t$ است که $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ و بنابراین شرایط اولیه روی پاسخ حالت دائمی نیز اثر داشته است.

گزینه‌ی «۲» نادرست است زیرا اگر در مدار LC سیگنال ورودی با فرکانس $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ وجود داشته باشد، پاسخ با گذشت زمان افزایش می‌یابد و بنابراین کران‌دار نیست.

گزینه‌ی «۳» نادرست است زیرا پاسخ کامل مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر است و با K برابر کردن شرایط اولیه، پاسخ کامل K برابر نمی‌شود.

۲- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

با توجه به مقاومتی و تغییرناپذیر با زمان بودن شبکه N، می‌توان از دو سر مقاومت 5Ω یک مدار معادل تونن برای شبکه در نظر گرفت:



برای نسبت توان تحویلی به مقاومت 5Ω داریم:

$$\left| \frac{P_{5\Omega}}{P_t} \right| = \left| \frac{\Delta i^2}{V_{th} i} \right| = \left| \frac{\Delta i}{V_{th}} \right| = \left| \frac{\Delta}{V_{th} \frac{-V_{th}}{\Delta + R_{th}}} \right| = \frac{\Delta}{\Delta + R_{th}}$$

یعنی درصدی از توان کل که به مقاومت 5Ω اهمی می‌رسد به مقدار این مقاومت و همچنین مقدار R_{th} (مقدار مقاومت شبکه N) بستگی دارد و میزان V_{th} روی این درصد تأثیری ندارد.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

سیگنال ورودی $i_1(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$i_1(t) = \sin t u(t) - \sin(t - \pi) u(t - \pi)$$

پس می‌توان برای $0 < t < 2\pi$ ، ورودی $i_1(t)$ را به صورت مشتق $i_1(t) - i_1(t - \pi)$ در نظر گرفت:

$$i_1(t) = \frac{d}{dt} [i_1(t) - i_1(t - \pi)]$$

با توجه به پاسخ داده شده برای ورودی $i_1(t)$ و خطی بودن مدار با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$V_1(t) = \frac{d}{dt} [V_1(t) - V_1(t - \pi)]$$

که به ازای $t = \frac{3\pi}{2}$ می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} V_1(t) \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} &= \frac{d}{dt} \left[e^{-(t-\pi)} - (\sin(t-\pi) - e^{-(t-\pi)}) \right] \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} \\ &= \left[-e^{-(t-\pi)} - \cos(t-\pi) - e^{-(t-\pi)} \right] \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -2e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

۴- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

ورودی داده شده به صورت زیر قابل بیان است:

$$x(t) = 2u(t) + u(t-2) - u(t-4)$$

پاسخ ضربه مدار به صوت $h(t) = e^{-t}u(t)$ داده شده است. با توجه به این که پاسخ پله انتگرال پاسخ ضربه است، پاسخ

پله مدار برابر است با:

$$S(t) = \int_0^t e^{-t} u(t) dt = -e^{-t} \Big|_0^t = (1 - e^{-t}) u(t)$$

بنابراین با استفاده از قضیه جمع آثار، پاسخ حالت صفر مدار به ورودی $x(t)$ برابر است با:

$$y(t) = 2(1 - e^{-t})u(t) + (1 - e^{-(t-2)})u(t-2) - (1 - e^{-(t-4)})u(t-4)$$

که مقدار این پاسخ در $t = 3 \text{ sec}$ برابر است با:

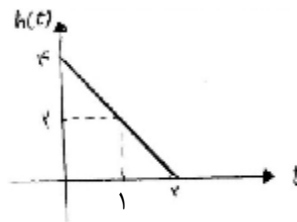
$$y(t=3) = 2(1 - e^{-3}) + (1 - e^{-1}) - 0 = 3 - e^{-1} - 2e^{-3}$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

در حالت کلی ممکن است ضریب i صفر باشد و نتوان معادله را برحسب i حل کرد. همچنین ممکن است ضریب V صفر باشد و معادله را نمی‌توان برحسب V حل نمود. ولی معادله $aV + bi + c = 0$ حالت کلی معادله است و می‌توان شبکه N را برحسب مدارهای معادل تونن یا نورتن بیان کرد.

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

شکل موج پاسخ ضربه به صورت زیر است:

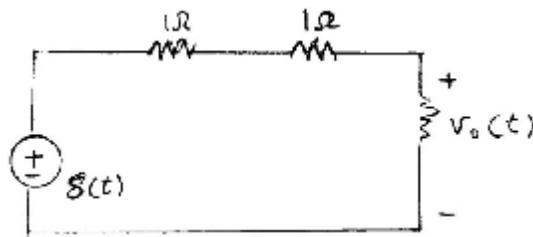


پاسخ پله، انتگرال پاسخ ضربه است و مقدار آن در $t=1$ برابر سطح زیر نمودار تا زمان یک ثانیه می‌باشد، پس:

$$s(t) \Big|_{t=1} = \left(\frac{2+4}{2} \right) \cdot 1 = 3$$

۷- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

پس از اعمال ورودی ضربه در لحظه $t=0^+$ ، سلف‌ها مدار باز و خازن‌ها اتصال کوتاه می‌شوند. پس مدار به صورت شکل زیر تبدیل می‌شود:



در نتیجه:

$$V_o(t) = \frac{1}{1+2} \delta(t) = \frac{\delta(t)}{3}$$

از طرف دیگر:

$$V_o(t) = r \frac{di_o(t)}{dt} \rightarrow i_o(\cdot^+) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\cdot^+} V_o(t) dt = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\cdot^+} \frac{\delta(t)}{3} dt = \frac{1}{6} \text{ A}$$

فصل هفتم: تجزیه و تحلیل در حالت دائمی سینوسی

مدارهایی که تاکنون مورد بررسی و تحلیل قرار داده‌ایم دارای ورودی DC یا توابع تحریک بوده‌اند. در این جا می‌خواهیم به بررسی مدارهایی بپردازیم که ورودی آن‌ها از جنس AC است. به عبارت دیگر، مدارات با ورودی سینوسی را تجزیه و تحلیل کنیم.

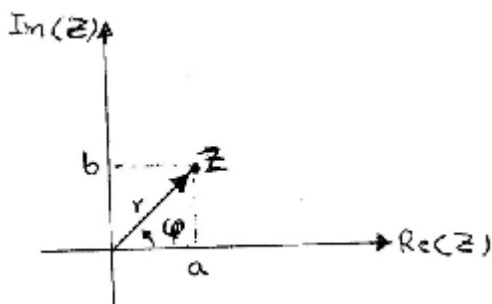
پیش نیاز بحث تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، آشنایی با اعداد مختلط و مفهوم فازور است. در زیر اشاره‌ای مختصر به این موضوع داریم.

7-1- اعداد مختلط و مفهوم فازور

عدد مختلط Z در دستگاه دکارتی به صورت $Z = a + jb$ نمایش داده می‌شود که a را قسمت حقیقی یا $\text{Re}(Z)$ و b را قسمت موهومی یا $\text{Im}(Z)$ می‌نامیم.

در دستگاه قطبی Z به صورت $Z = r \angle \varphi = r e^{j\varphi}$ نمایش داده می‌شود که r را شعاع یا فاصله تا مبدأ مختصات و φ را زاویه یا فاز عدد مختلط می‌گوییم.

نمایش عدد مختلط Z در مختصات دکارتی و قطبی به صورت زیر است:



تبدیلات دستگاه‌های دکارتی به قطبی و بالعکس به صورت زیر است:

دکارتی به قطبی: $a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$

قطبی به دکارتی: $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$

7-1-1- عملیات به روی اعداد مختلط

جمع و تفریق اعداد مختلط به صورت زیر است:

$$\text{در مختصات دکارتی: } Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$\text{در مختصات قطبی } Z_1 \pm Z_2 = r_1 e^{j\phi_1} \pm r_2 e^{j\phi_2}$$

ضرب، تقسیم و توان به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\text{در مختصات دکارتی: } \begin{cases} Z_1 Z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_2 - jb_2}{a_2^2 + b_2^2} \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{cases}$$

$$\text{در مختصات قطبی: } \begin{cases} Z_1 Z_2 = (r_1 R \phi_1)(r_2 R \phi_2) = (r_1 r_2) R (\phi_1 + \phi_2) \\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 R \phi_1}{r_2 R \phi_2} = \frac{r_1}{r_2} R (\phi_1 - \phi_2) \\ Z^n = (r R \phi)^n = r^n R n\phi = r^n (\cos n\phi + j \sin n\phi) \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، جمع و ضرب در مختصات دکارتی و ضرب، تقسیم و توان در مختصات قطبی راحت‌تر است.

به عدد مختلط $\bar{Z}$ مزدوج عدد مختلط Z می‌گویند. مزدوج را با Z^* نیز نمایش می‌دهند.

$$Z = a + jb \rightarrow \bar{Z} = Z^* = a - jb$$

$$Z = r R \phi \rightarrow \bar{Z} = r R - \phi$$

در ساده‌سازی کسرها، ضرب در مزدوج مخرج به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{1}{a + jb} \frac{a - jb}{a - jb} = \frac{a}{a^2 + b^2} + j \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

توجه به روابط زیر در ساده‌سازی عبارات و کسرهای مختلط مفید است:

$$ja = aR 90^\circ, -ja = aR -90^\circ, a = aR 0^\circ, -a = aR 180^\circ$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

۷-۱-۲- فازور

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، با سیگنال‌های کسینوسی به فرم زیر سرو کار داریم:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

این سیگنال‌ها با سه کمیت اصلی مشخص و بیان می‌شوند:

۱- دامنه سیگنال A

۲- فرکانس سیگنال ω

۳- فاز اولیه سیگنال ϕ

در مدارهای مورد بررسی، مقدار ω ثابت است. به عبارت دیگر، اگر ورودی یک سیگنال سینوسی با فرکانس ω باشد، تمام ولتاژها و جریان‌های مدار با همان فرکانس ω هستند. پس برای نمایش سیگنال $x(t)$ در حوزه فرکانس، فقط دامنه و فاز اولیه آن را بیان می‌کنیم:

$$X = AR\phi = Ae^{j\phi} = A \cos \phi + jA \sin \phi$$

این کمیت جدید را با عنوان فازور می‌شناسیم. فازور یک کمیت مختلط است.

بنابراین در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، به ولتاژ، فازور ولتاژ و به جریان، فازور جریان می‌گوییم.

نکته: اگر سیگنالی به صورت سینوسی بیان شود، در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، باید آن را به کسینوسی تبدیل نمود و سپس به تجزیه و تحلیل مدار پرداخت.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) \rightarrow X = AR(\phi - 90^\circ)$$

۲-۷- تحلیل در حالت ماندگار سینوسی

برای تجزیه و تحلیل در حالت دائمی سینوسی، نیازمند ابزار و وسیله‌هایی هستیم که بتوانیم مدار را به حوزه فرکانس منتقل کرده و به تحلیل و بررسی آن بپردازیم.

در این قسمت به بیان قضیه‌ها و ابزار مناسب جهت تحلیل در حالت ماندگار سینوسی می‌پردازیم.

۲-۱- بررسی پاسخ در حالت دائمی سینوسی

مهم‌ترین دلیل تحلیل در حالت دائمی سینوسی را می‌توان خاصیت ریاضی این توابع دانست. این خاصیت در قضیه زیر بیان می‌شود:

*** قضیه:** مجموع هر تعداد سیگنال سینوسی هم فرکانس و هر تعداد مشتق‌های آن‌ها (از هر مرتبه)، یک سیگنال سینوسی با همان فرکانس است.

به عبارت دیگر، در مدارهای خطی، اگر فرکانس ورودی ω_{in} باشد، فرکانس هر سیگنال دیگری در آن مدار برابر ω_{in} است.

براین اساس، معادله دیفرانسیل توصیف کننده چنین مدارهایی به صورت زیر است:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A \cos(\omega_{in} t + \phi)$$

فرم کلی پاسخ کامل آن به صورت زیر است:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + B \cos(\omega_{in} t + \phi)$$

پاسخ خصوصی (پاسخ حالت صفر) + پاسخ عمومی (پاسخ ورودی صفر)

در تحلیل مدار به کمک فازورها، فقط پاسخ حالت ماندگار سینوسی محاسبه می‌شود و هیچ‌گونه اطلاعاتی در خصوص پاسخ حالت گذاری مدار به دست نمی‌آید.

به عبارت دیگر، در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، با بخش دوم این پاسخ سرو کار داریم. این پاسخ فقط در اثر ورودی سینوسی است و به شرایط اولیه و ورودی‌های DC کاری ندارد. بنابراین برای به دست آوردن پاسخ حالت دائمی سینوسی، اثر شرایط اولیه و ورودی‌های DC مدار را صفر می‌کنیم.

نکته: در بعضی از مواقع، پاسخ حالت دائمی سینوسی معنی ندارد. به عنوان نمونه می‌توان گفت:

۱- زمانی که تعدادی از ریشه‌های معادله مشخصه در نیمه راست صفحه فرکانس مختلط باشند که باعث می‌شود مدار ناپایدار باشد.

۲- زمانی که ریشه‌های معادله مشخصه به صورت موهومی محض $(\pm j\omega_c)$ باشند.

در این حالت پاسخ به فرم زیر است:

$$y(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + B \cos(\omega_{in} t + \phi)$$

پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر

در این حالت پاسخ دائمی است ولی سینوسی نمی‌باشد که در آن ω_c فرکانس تشدید و ω_{in} فرکانس ورودی است.

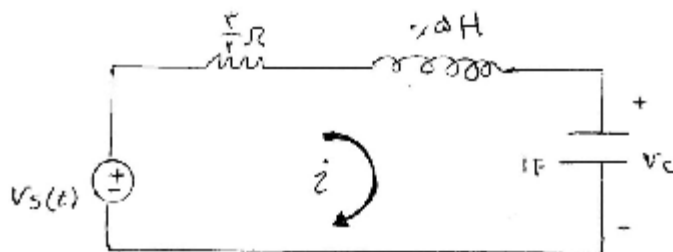
$$(\omega_c \neq \omega_{in})$$

مثال ۱: در مدار شکل زیر، با توجه به شرایط اولیه، پاسخ کامل را برای ولتاژ دو سر خازن به دست آورید.

$$V_S(t) = \cos 2t u(t)$$

$$V_C(\cdot) = 1V$$

$$i_L(\cdot) = 2A$$



با KVL زدن در مدار داریم:

$$\text{KVL: } V_S = Ri + L \frac{di}{dt} + V_C$$

برای جریان i داریم:

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = \frac{dV_C}{dt}$$

در نتیجه:

$$V_S = R \frac{dV_C}{dt} + L \frac{d^2 V_C}{dt^2} + V_C \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S \rightarrow \frac{d^2 V_C}{dt^2} + 3 \frac{dV_C}{dt} + 2V_C = 2V_S$$

با توجه به معادله مشخصه، برای پاسخ عمومی (همگن) خواهیم داشت:

$$S^2 + 3S + 2 = 0 \rightarrow S = -1, -2$$

$$V_{ch}(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

و برای پاسخ خصوصی:

$$V_S(t) = \cos 2t u(t) \rightarrow V_S = 1R \cdot$$

$$(S^2 + 3S + 2)V_C = 2V_S \rightarrow V_S = \frac{2R \cdot}{S^2 + 3S + 2} \xrightarrow{S=j\omega} \frac{2R \cdot}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$$

$$= \frac{2R \cdot}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} = \frac{2R \cdot}{(2 - \omega^2) + j3\omega} \xrightarrow{\omega=2} \frac{2R \cdot}{-2 + j6} = \frac{2R \cdot}{\sqrt{40} R \cdot 1.08 / 4^0}$$

$$\rightarrow V_C = 0.316 R - 1.08 / 4^0 \rightarrow V_{cp}(t) = 0.316 \cos(2t - 1.08 / 4^0)$$

بنابراین پاسخ کامل برابر است با:

$$V_C(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 1.08 / 4^0)$$

با توجه به شرایط اولیه:

$$V_C(\cdot) = 1V \rightarrow K_1 + K_2 + 0.316 \cos(-10.8 / 4^0) = 1 \rightarrow \boxed{K_1 + K_2 = 0.1} \quad (I)$$

$$i_L(\cdot) = 2A \rightarrow i_C(\cdot) = C \frac{dV_C(\cdot)}{dt} = \frac{dV_C(\cdot)}{dt} = 2$$

$$\rightarrow -K_1 - 2K_2 - 0.632 \sin(-10.8 / 4^0) = 2 \rightarrow \boxed{K_1 + 2K_2 = -1/4} \quad (II)$$

$$II \text{ و } I \Rightarrow K_1 = 1/6, K_2 = -1/5$$

بنابراین پاسخ کامل $V_C(t)$ برابر است با:

$$V_C(t) = 1/6 e^{-t} - 1/5 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 10.8 / 4^0)$$

۷-۲-۲- امپدانس و ادمیتانس

امپدانس و ادمیتانس به صورت زیر تعریف می شوند:

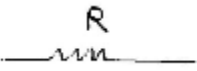
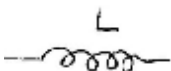
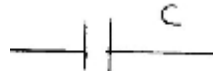
امپدانس Z برابر است با فازور ولتاژ دو سر المان تقسیم بر فازور جریان آن، یعنی:

$$Z = \frac{V}{I}$$

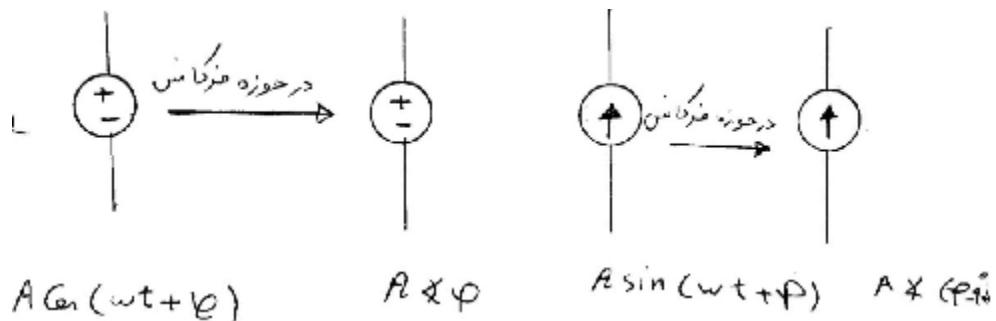
ادمیتانس Y برابر است با فازور جریان عبوری از المان تقسیم بر فازور ولتاژ آن، یعنی:

$$Y = \frac{I}{V}$$

بنابراین تمام المان های مداری از قبیل مقاومت، سلف و خازن در حوزه فرکانس به صورت زیر بیان می شوند:

			
امپدانس $Z(\Omega)$	R	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
ادمیتانس $Y(J)$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{j\omega L}$	$j\omega C$

همچنین برای منابع ولتاژ و جریان سینوسی، فازور آن ها برابر است با:



پس با این دید، کلیه المان‌های مداری از قبیل مقاومت، سلف و خازن به صورت مقاومت (امپدانس) دیده می‌شوند و تمام قوانین مداری از جمله KCL و KVL صادق بوده و کلیه معادلات دیفرانسیل به روابط جبری تبدیل می‌شود. در این جا منظور از روابط جبری، جبر مختلط است.

بنابراین می‌توان گفت:

در مدار در حالت دائمی سینوسی با فرکانس ω ، تمامی ولتاژها و جریان‌ها سیگنال سینوسی با فرکانس ω هستند و تنها فازورها تغییر می‌کنند. پس برای بررسی مدار به تحلیل فازورها می‌پردازیم. به عبارت دیگر، برای تحلیل مدار در حالت دائمی سینوسی، ابتدا مدار را به حوزه فرکانس انتقال می‌دهیم و سپس با استفاده از روش‌های تحلیل مدارهای مقاومتی (گره، مش و...)، به بررسی و تحلیل مدار می‌پردازیم.

با این توصیف دیده می‌شود که همه چیز تکراری و مانند مدارهای مقاومتی است.

در این جا منظور از ضرب، ضرب مختلط است. یعنی دو معنی دارد:

$$V = Z I \rightarrow \begin{cases} |V| = |Z| |I| & \text{اندازه} \\ \angle V = \angle Z + \angle I & \text{زوایه} \end{cases}$$

$$I = Y V \rightarrow \begin{cases} |I| = |Y| |V| \\ \angle I = \angle Y + \angle V \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{Z} \rightarrow \begin{cases} |Y| = \frac{1}{|Z|} \\ \angle Y = -\angle Z \end{cases}$$

در حالت کلی امپدانس و ادمیتانس عددی مختلط و تابع فرکانس ورودی است. یعنی:

$$Z^{(\Omega)}(j\omega) = \frac{V}{I} = R^{(\Omega)} + jX^{(\Omega)} = |Z| \angle \phi$$

$\swarrow$ $\swarrow$
 مقاومت راکتانس

$$y^{(J)}(j\omega) = \frac{I}{V} = G^{(J)} + jB^{(J)} = |y| \angle \theta$$

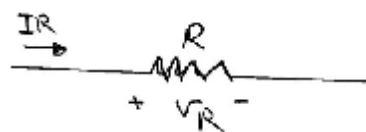
$\swarrow$ $\swarrow$
 سوسپتانس کندوکتانس

که در این روابط:

$$\phi = RZ = RV - RI, \quad \theta = -\phi$$

۷-۲-۳- رابط فازوری عناصر مداری

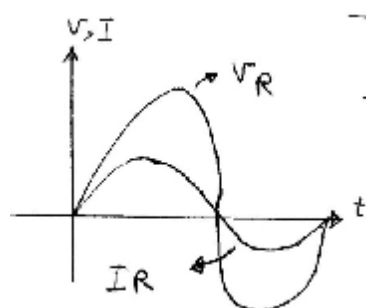
۱- مقاومت:



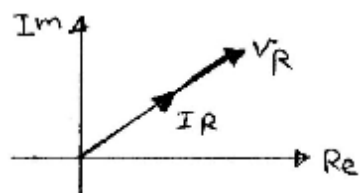
$$V_R = R I_R \rightarrow \begin{cases} |V_R| = R |I_R| \\ RV_R = RI_R \end{cases}$$

یعنی ولتاژ و جریان، با هم، هم فاز هستند.

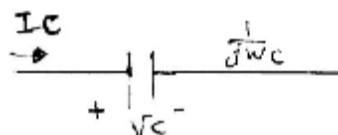
نمودار ولتاژ و جریان در حوزه زمان به صورت زیر است:



و دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در مقاومت:



۲- خازن

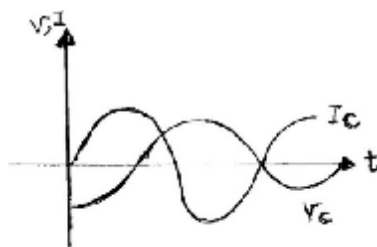


$$V_C = \frac{1}{j\omega C} \quad I_C = -j \frac{1}{\omega C} \quad I_C \rightarrow \begin{cases} |V_C| = \frac{1}{\omega C} |I_C| \\ \angle V_C = \angle I_C - 90^\circ \end{cases}$$

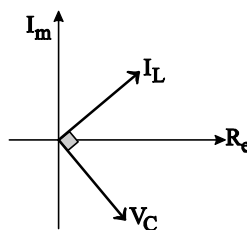
$X_C = \frac{1}{\omega C}$ را مقاومت ظاهری خازن می‌گویند. در این حالت ولتاژ نسبت به جریان، 90° عقب‌تر است، یعنی I_C نسبت

به V_C پیش فاز است. (V_C نسبت به I_C پس فاز است).

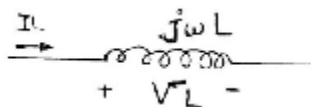
نمودار ولتاژ و جریان خازن در حوزه زمان به صورت زیر است:



و دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در خازن:



۳- سلف

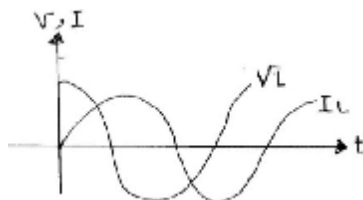


$$V_L = j\omega L \quad I_L \rightarrow \begin{cases} |V_L| = \omega L |I_L| \\ \angle V_L = \angle I_L + 90^\circ \end{cases}$$

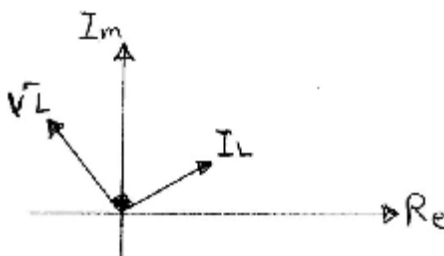
$X_L = \omega L$ را مقاومت ظاهری سلف می‌نامیم. در این حالت ولتاژ نسبت به جریان، 90° جلوتر است، یعنی I_L نسبت به

V_L پس فاز است. (V_L نسبت به I_L پیش فاز است).

نمودار ولتاژ و جریان در حوزه زمان در سلف به صورت زیر است:



و دیاگرام فازوری ولتاژ و جریان در سلف:



اگر ϕ را زاویه امپدانس در نظر بگیریم، حالت‌های مختلف برای امپدانس یک مدار پسیو به یکی از صورت‌های زیر است:

$$\phi = RZ = RV - RI$$

مدار مقاومتی خالص $\rightarrow \phi = 0 \rightarrow Z = R$ یا $Y = G$ اگر

مدار سلفی خالص $\rightarrow \phi = 90^\circ \rightarrow Z = jX$ یا $Y = -j\frac{1}{X}$ اگر

مدار خازنی خالص $\rightarrow \phi = -90^\circ \rightarrow Z = -jX$ یا $Y = j\frac{1}{X}$ اگر

مدار مقاومتی سلفی $\rightarrow 0 < \phi < 90^\circ \rightarrow Z = R + jX$ یا $Y = G - jB$ اگر

مدار مقاومتی خازنی $\rightarrow -90^\circ < \phi < 0 \rightarrow Z = R - jX$ یا $Y = G + jB$ اگر

نکته: معادله $Z = \frac{1}{Y}$ نمی‌گوید:

$$R = \frac{1}{G} \text{ و } X = \frac{1}{B}$$

بلکه رابطه صحیح بین مؤلفه‌های Z و Y به صورت زیر است:

$$Z = \frac{1}{Y} \Rightarrow R = \frac{G}{B^2 + G^2}, X = \frac{-B}{B^2 + G^2}$$

۷-۲-۴- نکاتی در تحلیل حالت دائمی سینوسی

همان طور که گفته شد، تحلیل در حالت دائمی سینوسی عیناً مشابه مدارهای مقاومتی است با این تفاوت که در این جا برای فازورهای ولتاژ و جریان، روابط KCL و KVL را می نویسیم.

* به هم بستن عناصر

با توجه به این که همهٔ عناصر را به دید مقاومت (امپدانس) می بینیم، به هم بستن عناصر در این جا همانند مقاومت ها است، یعنی:

$$Z_{eq} = \sum_i Z_i \quad \text{به هم بستن سری}$$

$$Y_{eq} = \sum_i y_i \quad \text{به هم بستن موازی}$$

* امپدانس و ادمیتانس ورودی

برای یافتن امپدانس یا ادمیتانس ورودی یک مدار، همانند مدارهای مقاومتی، از منابع تست V_t و I_t استفاده می کنیم و با تحلیل مدار (البته در حوزه فرکانس) نسبت ولتاژ تست به جریان آن یا بالعکس را به دست می آوریم. یعنی:

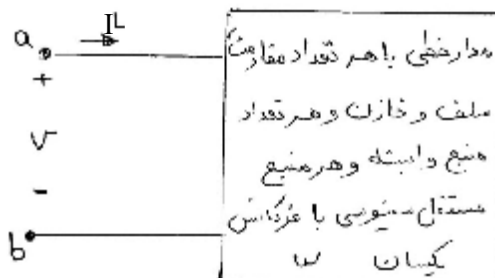
$$Z_{in}(j\omega) = \frac{V_t}{I_t}$$

$$Y_{in}(j\omega) = \frac{I_t}{V_t}$$

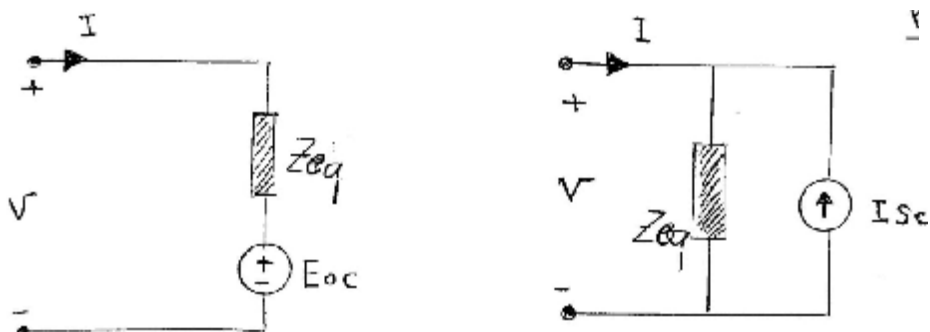
تنها تفاوت امپدانس یا ادمیتانس به دست آمده در این جا (تحلیل در حالت دائمی سینوسی) این است که اولاً مختلط هستند و ثانیاً تابع فرکانس ورودی ω می باشند.

* مدار معادل تونن - نورتن در حالت دائمی سینوسی

در حالت دائمی سینوسی می توان گفت:



این مدار معادل است با:



$$E_{oc} = Z_{eq} I_{sc}$$

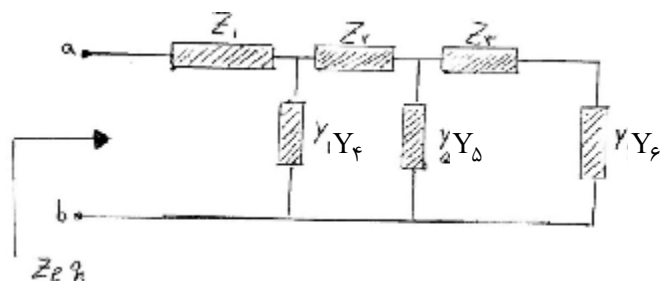
برای به دست آوردن مدار معادل تونن و نورتن یک شبکه در حالت دائمی سینوسی، همانند مدارهای مقاومتی عمل می‌کنیم البته با یک تفاوت‌های جزئی.

مثلاً قبلاً در مدارهای مقاومتی برای به دست آوردن R_{eq} منابع مستقل را صفر می‌کردیم، در این جا نیز برای یافتن Z_{eq} همین کار را انجام می‌دیم ولی فرکانس آن منبع را برای به دست آوردن امپدانس یا ادمیتانس‌های عناصر مداری در نظر می‌گیریم.

نکته: اگر منابع موجود در یک مدار غیر هم فرکانس باشند، در این صورت منابع را جداگانه در نظر می‌گیریم و پاسخ ناشی از هر یک را به دست می‌آوریم و سپس از قضیه جمع آثار استفاده می‌کنیم. اکنون به بررسی چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۲: امپدانس ورودی مدارهای زیر را به دست آورید.

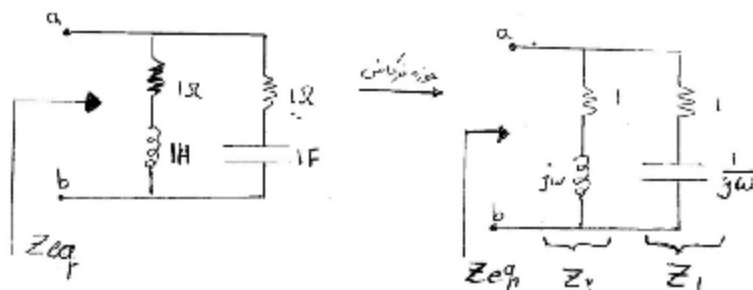
(الف)



در مدار نردبانی فوق داریم:

$$Z_{eq} = Z_1 + \frac{1}{Y_f + \frac{1}{Z_r + \frac{1}{Y_\Delta + \frac{1}{Z_r + \frac{1}{Y_f}}}}}$$

ب)



در این مدار داریم:

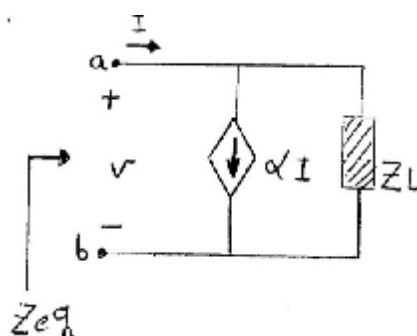
$$Z_1 = 1 + \frac{1}{j\omega} = \frac{1+j\omega}{j\omega}, \quad Z_r = 1 + j\omega$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_r} = \frac{j\omega}{1+j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1+j\omega}{1+j\omega} = 1 \rightarrow Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = 1$$

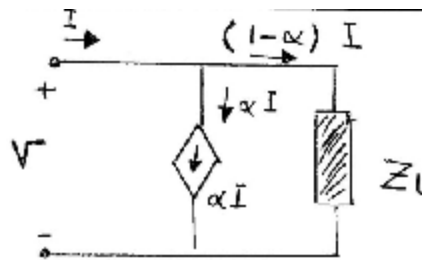
یعنی Z_{eq} مستقل از فرکانس است و به ازای هر ω ای، امپدانس ورودی 1Ω است. به این گونه مدارها، مدارهای مستقل

از فرکانس می‌گویند.

ج)



با KCL زدن در مدار داریم:



و با KVL زدن در حلقه بیرونی:

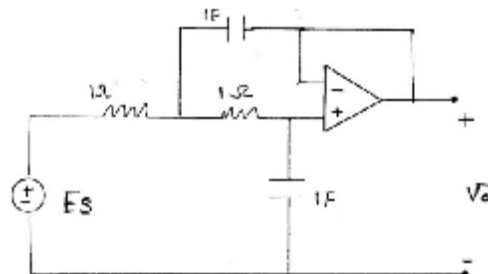
$$\text{KVL: } V = Z_L (1-\alpha)I = (1-\alpha)Z_L I \rightarrow Z_{eq} = \frac{V}{I} = (1-\alpha)Z_L$$

و برای $\alpha = 2$ داریم:

$$\alpha = 2 \rightarrow Z_{eq} = -Z_L$$

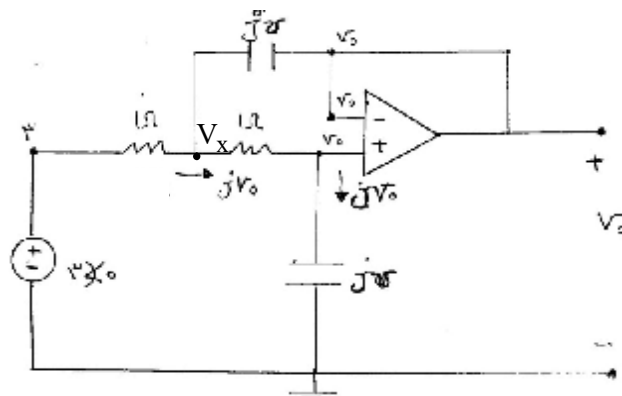
به این حالت مبدل منفی کننده امپدانس می‌گوییم.

مثال ۳: در مدار شکل زیر ولتاژ خروجی V_o را به دست آورید. (آپ امپ ایده‌آل است).



$$E_s = 3 \cos t$$

با انتقال مدار در حوزه فرکانس ($\omega = 1$) داریم: (مقادیر نوشته شده برحسب ادمیتانس است)

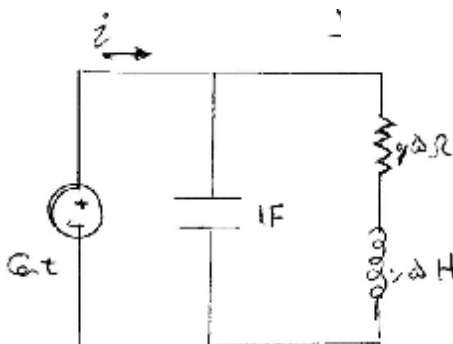


$$\text{KVL: } V_x = jV_o + V_o = (1+j)V_o$$

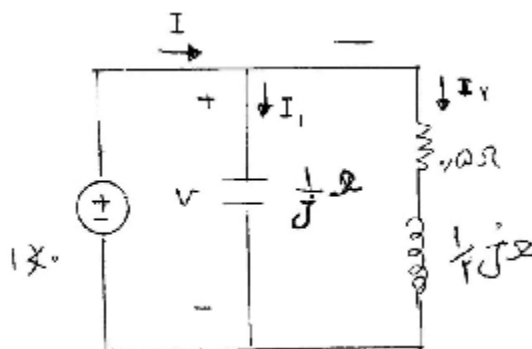
$$\text{KCL: } \frac{V_x - 3}{1} + jV_o + j(V_x - V_o) = 0 \rightarrow jV_o + V_o - 3 + jV_o + j(jV_o) = 0$$

$$\rightarrow V_o = \frac{3}{1-j} = -\frac{3}{1-j}j \rightarrow V_o(t) = -1/\Delta \cos t = 1/\Delta \cos(t - 90^\circ) = 1/\Delta \sin t$$

مثال ۴: در مدار شکل زیر، جریان $i(t)$ را به دست آورید.



با تبدیل مدار به حوزه فرکانس ($\omega = 1$) داریم:



برای جریان‌های I_1, I_r داریم:

$$\text{KCL: } I = I_1 + I_r$$

$$I_1 = \frac{V}{\frac{1}{j}} = \frac{1R \cdot}{\frac{1}{j}} = jA, \quad I_r = \frac{V}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j} = \frac{1R \cdot}{\frac{1}{2}(1+j)} = 1-jA$$

و در نتیجه:

$$I = j + 1 - j = 1A \rightarrow i(t) = \cos t$$

روش دوم: با پیدا کردن امپدانس ورودی مدار داریم:

$$Z_{in} = \frac{1}{j} P(\cdot/\omega + j\cdot/\omega) = (-j) P(\cdot/\omega + j\cdot/\omega) = \frac{-j(\cdot/\omega + j\cdot/\omega)}{\cdot/\omega - j\cdot/\omega} \cdot \frac{\cdot/\omega + j\cdot/\omega}{\cdot/\omega + j\cdot/\omega}$$

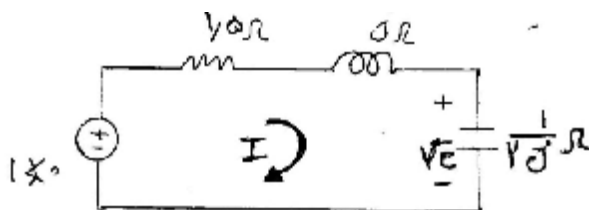
$$= \frac{-j(\cdot/\omega + j\cdot/\omega)^2}{\cdot/\omega^2 + \cdot/\omega^2} = \frac{(-j)(\cdot/\omega)^2(1-1+j)}{\cdot/\omega} = 1\Omega$$

بنابراین:

$$I = \frac{V}{Z_{in}} = \frac{1R\cdot}{1} = 1R\cdot \rightarrow i(t) = \cos t$$

مثال ۵: در مثال ۱، پاسخ حالت صفر را بدون تشکیل معادله دیفرانسیل به دست آورید.

با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم: ($\omega = 2$)



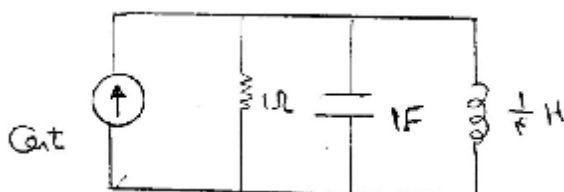
$$\text{KVL: } 1R\cdot = \left(1/\omega + j + \frac{1}{\omega j}\right) I$$

از طرفی داریم:

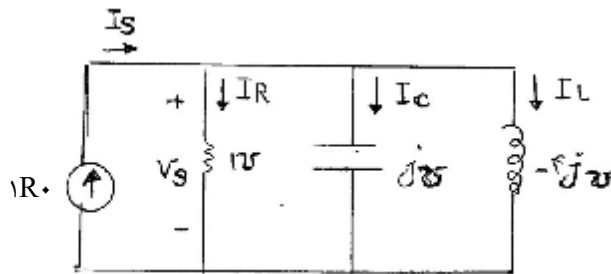
$$I = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{V_C}{\frac{1}{\omega j}} = \omega j V_C \rightarrow 1R\cdot = (1/\omega + \omega j) \omega j V_C \rightarrow$$

$$V_C = \frac{1R\cdot}{\omega j(1/\omega + \omega j)} = \frac{1R\cdot}{-1 + \omega^2 j} = 0.316R - 1.08/\omega^0 \rightarrow V_C(t) = 0.316 \cos(2t - 1.08/\omega^0)$$

مثال ۶: در مدار شکل زیر، برای I_R ، I_C و I_L دیاگرام فازوری رسم کنید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و به دست آوردن ادمیتانس المان‌ها داریم:



$$Y_{eq} = 1 + j - 4j = 1 - 3j \text{ S}$$

$$V_S = \frac{I_S}{Y_{eq}} = \frac{1\angle 0^\circ}{1 - 3j} = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 71.5^\circ \text{ V}$$

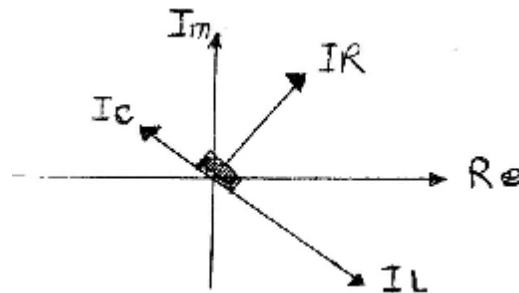
و برای جریان شاخه‌ها داریم:

$$I_R = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_C = jV_S = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle (71.5^\circ + 90^\circ) = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle 161.5^\circ \text{ A}$$

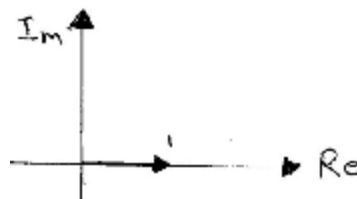
$$I_L = -4jV_S = \frac{4}{\sqrt{10}} \angle (71.5^\circ - 90^\circ) = \frac{4}{\sqrt{10}} \angle -18.5^\circ \text{ A}$$

دیاگرام فازوری به صورت زیر است:



در دیاگرام فازوری رسم شده، اگر مجموع سه بردار (سه فازور) را به دست آوریم، دیده می‌شود طبق قانون KCL،

مجموع $I_R + I_C + I_L$ برابر $I_S = 1\angle 0^\circ$ است و نیازی به حل و محاسبات طولانی نمی‌باشد.



3-7- تشدید

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی هرگاه جریان و ولتاژ دو سر مدار هم‌فاز شوند، می‌گوییم شبکه به حالت

تشدید یا رزونانس رفته است. فرکانسی که در آن شبکه به حالت تشدید درمی آید را فرکانس تشدید (رزونانس) می گوییم.

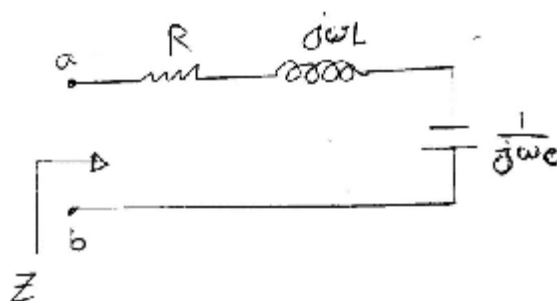
به عبارت دیگر، فرکانس تشدید فرکانسی است که در آن امپدانس یا ادمیتانس یک کمیت حقیقی باشد، یعنی:

$$\text{Im}(Z) = 0 \quad \text{یا} \quad \text{Im}(Y) = 0$$

$\text{Im}(Z) = 0$ یعنی راکتانس صفر است و $\text{Im}(y) = 0$ یعنی سوسپتانس برابر صفر است. به عنوان مثال، برای مدارهای

ساده RLC سری و موازی داریم:

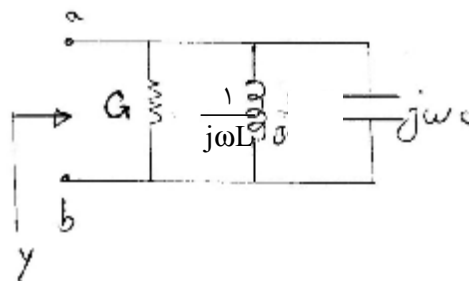
- RLC سری



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\text{Im}(z) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

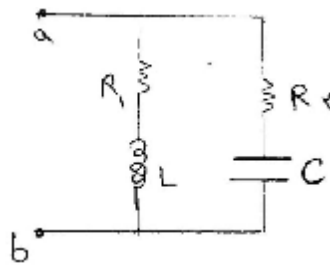
- RLC موازی



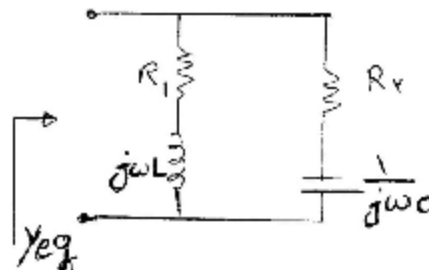
$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\text{Im}(Y) = 0 \rightarrow \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \rightarrow \omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

مثال ۷: در مدار شکل زیر، فرکانس تشدید را پیدا کنید.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم:



$$Z_1 = R_1 + j\omega L$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega C R_2}$$

برای به دست آوردن $\text{Im}(Y)$ ، قسمت موهومی هر بخش را جداگانه پیدا می‌کنیم و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\text{Im}(Y_{eq}) = \frac{-\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{C}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} \rightarrow R_1^2 C + \omega^2 L^2 C = L + \omega^2 C^2 L R_2^2 \rightarrow$$

$$\omega^2 (L^2 C - C^2 L R_2^2) = L - R_1^2 C \rightarrow \omega^2 (LC) (L - C R_2^2) = (L - R_1^2 C) \rightarrow \omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - R_1^2 C}{L - R_2^2 C}}$$

در مدار شکل فوق، اگر $R_1 = R_2 = 0$ باشد، فرکانس تشدید $\omega_* = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ است که مربوط به فرکانس تشدید مدار

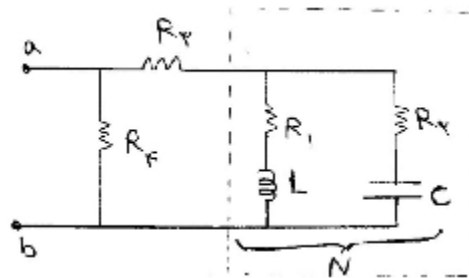
RLC موازی می‌باشد. پس می‌توان گفت:

نکته: مقاومت‌های سری یا موازی با کل مدار، تأثیری در فرکانس تشدید ندارند.



در شبکه‌های فوق، مقاومت R تأثیری در فرکانس تشدید شبکه N ندارند.

مثال ۸: در مدار شکل زیر، فرکانس تشدید را به دست آورید.



در این مدار، مقاومت‌های R_3 و R_4 با شبکه N سری و موازی هستند، پس تأثیری در فرکانس تشدید شبکه N ندارند. بنابراین فرکانس تشدید کل مدار برابر است با: (با توجه به مثال قبل)

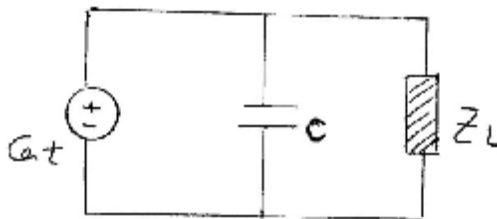
$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - R_3^2 C}{L - R_4^2 C}}$$

به عبارت دیگر، مقاومت‌های R_3 و R_4 تأثیری در قسمت موهومی Z یا Y کل مدار ندارند، پس فرکانس تشدید مستقل از مقادیر این مقاومت‌ها است.

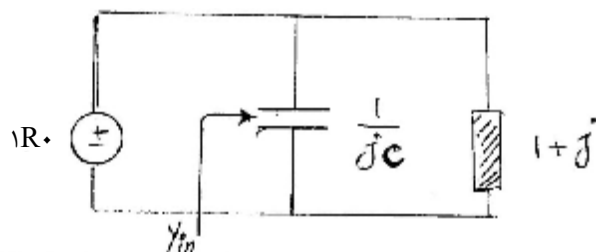
نکته: جملات زیر هم ارز تشدید هستند:

- ولتاژ و جریان هم فازاند.
- توان حقیقی ماکزیمم است.
- زاویه امپدانس یا ادمیتانس صفر است.
- ضریب توان $(\cos \phi)$ ماکزیمم است.
- توان راکتیو (مجازی) صفر است.
- سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.
- توان متوسط ماکزیمم است.
- امپدانس، حقیقی است.

مثال ۹: در مدار شکل زیر، $Z_L = 1 + j$ است. از طرفی جریان کشیده شده از منبع، هم فاز با ولتاژ منبع است. خازن C چند فاراد است؟



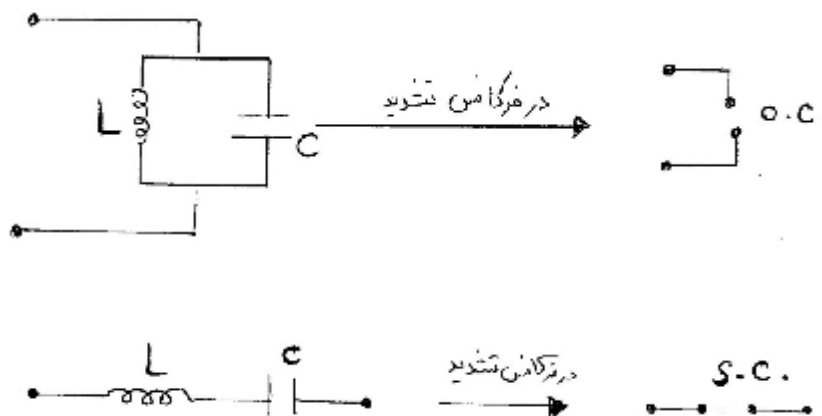
در حوزه فرکانس داریم:



$$Y_{in} = jC + \frac{1}{1+j} \rightarrow \text{Im}(Y_{in}) = C - \frac{1}{2}$$

$$\text{Im}(Y_{in}) = 0 \rightarrow C - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2} \text{ F}$$

نکته: در فرکانس تشدید، مدارات LC موازی، اتصال باز و مدارات LC سری، اتصال کوتاه می شوند. به عبارت دیگر:



4-7- مکان امپدانس و مکان ادمیتانس

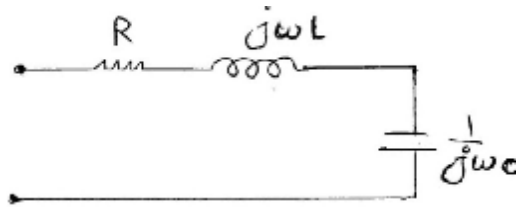
به محل تغییرات نقطه انتهایی بردار امپدانس یا ادمیتانس در صفحه مختلط، امپدانس یا ادمیتانس می گوئیم.

برای به دست آوردن مکان امپدانس، باید به نحوی اثر ω را حذف کنیم و رابطه ای بین $X = \text{Im}(Z)$ و $R = \text{Re}(Z)$

پیدا کنیم و سپس رابطه به دست آمده را رسم نماییم.

معمولاً برای حذف اثر ω ، از محاسبات جبری یا معادلات پارامتری یا... استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن مکان ادمیتانس نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

به عنوان مثال برای مکان امپدانس مدار RLC سری داریم:

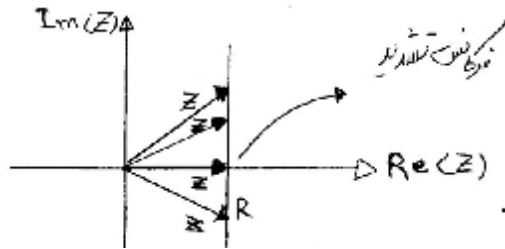


$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$R = \text{Re}(Z)$$

$$X = \text{Im}(z) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

در این حالت قسمت حقیقی تابع ω نیست، پس مکان امپدانس به صورت زیر است:



در این شکل چندین بردار Z وجود دارد که هر یک به ازای یک ω خاص رسم شده‌اند. در فرکانس تشدید مدار

$$\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) \text{ فوق، } |Z| \text{ کمینه است.}$$

و برای مکان ادمیتانس مدار RLC سری خواهیم داشت:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_G \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_B$

در این حالت قسمت حقیقی (G) و موهومی (B) ادمیتانس هر دو تابع ω هستند، پس برای حذف اثر ω :

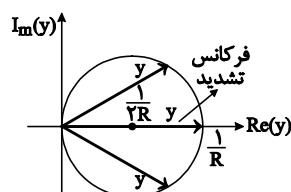
$$G^2 + B^2 = \frac{1}{R^2 + X^2} = \frac{G}{R}$$

و با تبدیل به مربع کامل داریم:

$$G^r + B^r - \frac{G}{R} = 0 \rightarrow G^r - \frac{G}{R} + \left(\frac{1}{rR}\right)^r + B^r = \left(\frac{1}{rR}\right)^r \rightarrow$$

$$\left(G - \frac{1}{rR}\right)^r + B^r = \left(\frac{1}{rR}\right)^r$$

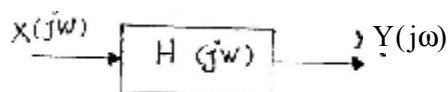
یعنی مکان ادمیتانس دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{rR}, 0\right)$ و شعاع $\frac{1}{rR}$ است.



نکته: در اکثر مسائل و به خصوص در سؤالات تستی، با بررسی مکان امپدانس و ادمیتانس در سه نقطه اساسی $\omega = 0$ ، $\omega \rightarrow \infty$ و $\omega = \omega_0$ می‌توان مکان موردنظر را به راحتی پیدا کرد.

5-7- پاسخ فرکانسی

در یک سیستم دارای ورودی و خروجی، پاسخ فرکانسی به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

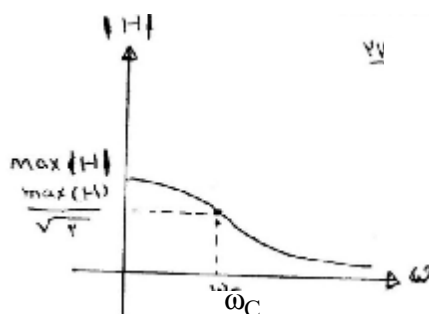
می‌توان گفت در هر فرکانسی (ω) با داشتن ورودی، خروجی معلوم است زیرا:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| |X(j\omega)|$$

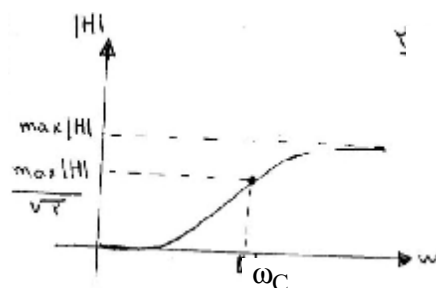
$$RY(j\omega) = RH(j\omega) + RX(j\omega)$$

براین اساس شکل تابع $|H(j\omega)|$ به یکی از صورت‌های زیر است:

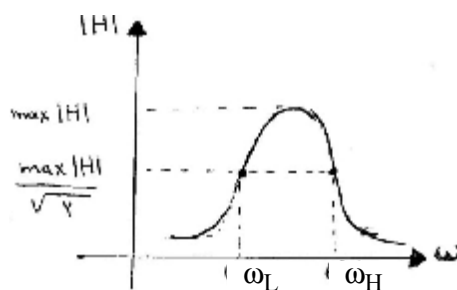
۱- فیلتر پایین‌گذر (LPF)



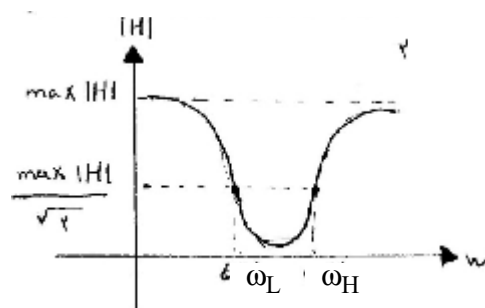
۲- فیلتر بالاگذر (HPF)



۳- فیلتر میان‌گذر (BPF)



۴- فیلتر میان‌گذر (BSF)



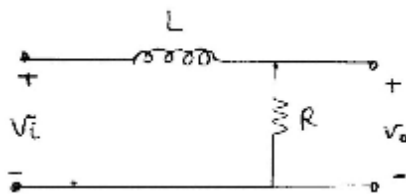
خاصیت این گونه مدارها (فیلترها) این است که سیگنال ورودی را در محدوده‌ای عبور می‌دهند و در ناحیه‌های دیگر عبور نمی‌دهند.

به این ناحیه عبور، پهنای باند (B.W.) و به فرکانس موردنظر، فرکانس قطع (ω_c) می‌گوییم. فرکانس قطع را در ناحیه‌ای در نظر می‌گیریم که $|H(j\omega)|$ برابر $\frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)|$ باشد. و برای به دست آوردن پهنای باند، با داشتن

پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ و به دست آوردن ماکزیمم $|H(j\omega)|$ ، با حل معادله زیر، عرض باند حاصل می‌شود:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)|$$

مثال ۱۰: در مدار شکل زیر، نوع فیلتر و پهنای باند آن را مشخص کنید.



با توجه به وجود یک سلف و یک مقاومت در مدار مربوطه می‌توان گفت مدار فوق یک مدار مرتبه اول است و حداکثر یک فرکانس قطع دارد. پس شبکه پایین‌گذر یا بالاگذر است.

در فرکانس‌های بالا ($\omega \rightarrow \infty$)، امپدانس سلف بی‌نهایت (مدار باز) شده و سیگنالی از خود عبور نمی‌دهد. پس سیگنال‌های با فرکانس بالا را عبور نمی‌دهد، بنابراین فیلتر پایین‌گذر است.

برای یافتن پاسخ فرکانسی در حالت دائمی سینوسی داریم:

$$\frac{V_o}{V_i} = H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

ماکزیمم $|H(j\omega)|$ در $\omega = 0$ رخ می‌دهد پس:

$$\max |H(j\omega)| = 1$$

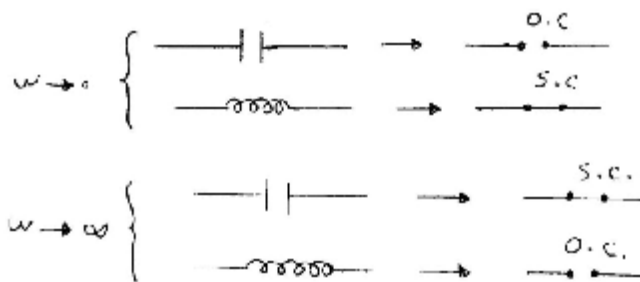
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H(j\omega)| \rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1 \rightarrow \omega_C = \frac{R}{L}$$

و پهنای باند برابر است با:

$$B.W. = \left(\cdot, \frac{R}{L} \right)$$

نکته: کلیه مدارهای مرتبه اول، فیلتر بالاگذر یا پایین‌گذر هستند. برای تعیین بالاگذر یا پایین‌گذر بودن، حالت‌های

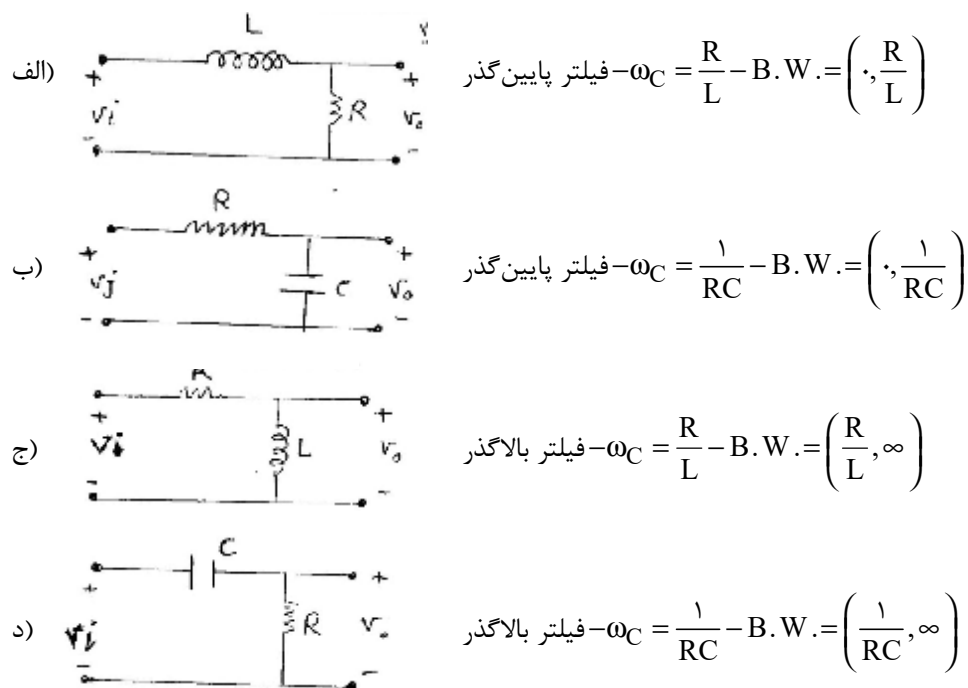
خازن و سلف را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



با بررسی مدار در فرکانس‌های $\omega = 0$ و $\omega \rightarrow \infty$ و عبور یا عدم عبور سیگنال در این فرکانس‌ها، پایین‌گذر یا بالاگذر بودن شبکه مشخص می‌شود.

نکته: در مدارهای مرتبه اول شامل خازن و مقاومت، فرکانس قطع برابر $\omega_C = \frac{1}{RC}$ و در مدارهای مرتبه اول شامل سلف و مقاومت، فرکانس قطع برابر $\omega_C = \frac{R}{L}$ است.

مثال ۱۱: در مدارهای شکل زیر، نوع فیلتر، فرکانس قطع و پهنای باند را مشخص کنید.



نکته: کلیه مدارهای مرتبه دوم فیلتر میان‌گذر یا میان‌نگذر هستند. در این مدارها، فرکانس وسط همان فرکانس تشدید (ω_0) است و پهنای باند آن‌ها برابر 2α می‌باشد. (مقادیر ω_0 و 2α را می‌توان با تشکیل معادله دیفرانسیل مدار به دست آورد.)

به عنوان مثال برای مدارهای RLC سری و موازی داریم:

- مدار RLC سری:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ B.W.} = 2\alpha = \frac{R}{L}$$

- مدار RLC موازی:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}, B.W. = \alpha = \frac{1}{RC}$$

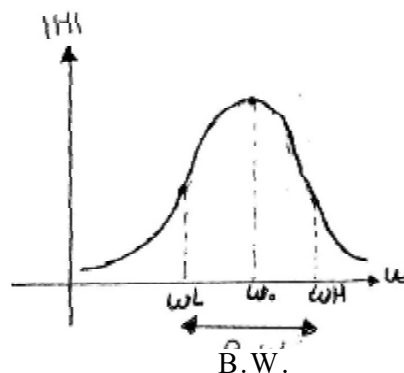
نکته: در مدارهای مرتبه دوم، فرکانس قطع بالا (ω_H) و فرکانس قطع پایین (ω_L) به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} \omega_H = \omega_s + \alpha \\ \omega_L = \omega_s - \alpha \end{cases}$$

مثلاً برای مدارهای RLC سری و موازی داریم:

$$\text{سری RLC:} \begin{cases} \omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{R}{2L} \\ \omega_H = \frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{R}{2L} \end{cases}$$

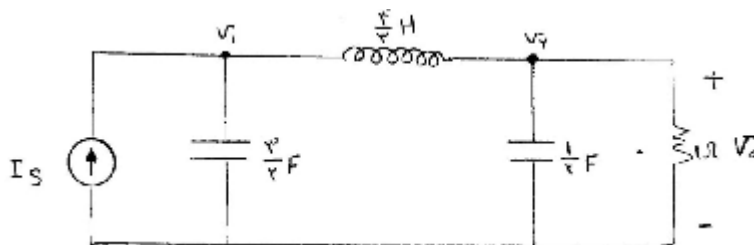
$$\text{موازی RLC:} \begin{cases} \omega_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{2RC} \\ \omega_H = \frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{1}{2RC} \end{cases}$$



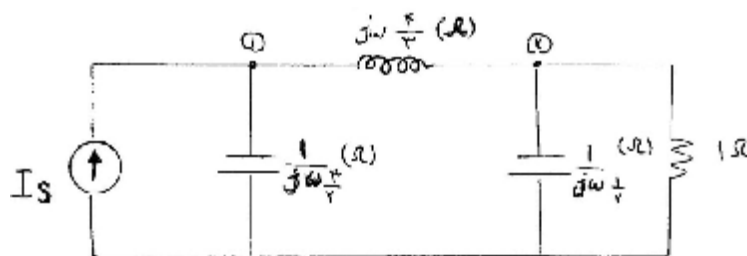
نکته: براساس مطالب بیان شده، ضریب کیفیت Q به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$Q = \frac{\omega_s}{\Delta\omega} = \frac{\omega_s}{\omega_H - \omega_L} = \frac{f_s}{\Delta f}$$

مثال ۱۲: در مدار شکل زیر، تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_o}{I_S}$ را پیدا کرده و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.



با KCL زدن در گره های ۱ و ۲ داریم:



$$\begin{cases} \text{KCL}(1): j\omega \frac{1}{r} V_1 + \frac{1}{j\omega \frac{1}{r}} (V_1 - V_2) = I_s \\ \text{KCL}(2): V_2 + j\omega \frac{1}{r} V_2 + \frac{1}{j\omega \frac{1}{r}} (V_2 - V_1) = 0 \end{cases}$$

$$V_o = V_2$$

با حل این دو معادله دو مجهول:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{1}{(1 - r\omega^2) + j\omega(r - \omega^2)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r\omega^2)^2 + \omega^2(r - \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}}$$

برای تعیین نوع فیلتر:

$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow |H(j\omega)| = 1 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |H(j\omega)| = 0 \end{cases} \rightarrow \text{فیلتر پایین گذر}$$

و برای پهنای باند آن داریم:

$$\max |H(j\omega)| = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1 \rightarrow \omega C = 1 \frac{\text{rad}}{s} \rightarrow \text{B.W.} = (0, 1)$$

نکته: اگر در مداری فرکانس از ω_1 به ω_2 تغییر کند، مقادیر المان‌های جدید برابر است با:

$$\begin{cases} R_2 = R_1 \\ L_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_1 \\ C_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_1 \end{cases}$$

مثلاً در مثال قبل، اگر پهنای باند از $(0, 1)$ به $(0, 10^6)$ تبدیل شود، باید:

$$R : 1\Omega \rightarrow 1\Omega$$

$$C_1 : \frac{1}{2}F \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{10^6} = 1/5 F$$

$$C_2 : \frac{1}{2}F \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{10^6} = 0/5 F$$

$$L : \frac{4}{3}H \rightarrow \frac{4}{3} \frac{1}{10^6} = 1/33 H$$

نکته: برای K برابر شدن سطح امپدانس یک مدار باید:

$$\begin{cases} R_{\text{new}} = K R_{\text{old}} \\ L_{\text{new}} = K L_{\text{old}} \\ C_{\text{new}} = \frac{1}{K} C_{\text{old}} \end{cases}$$

6-7- توان در حالت دائمی سینوسی

توان لحظه‌ای به صورت حاصل ضرب ولتاژ و جریان تعریف می‌شود:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

در حالت دائمی سینوسی اگر فرض کنیم ولتاژ و جریان به صورت زیر باشند:

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

آنگاه داریم:

$$P(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)]$$

و مقدار متوسط (یا مقدار DC) آن برابر است با:

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$$

از رابطه توان لحظه‌ای به دست آمده در حالت دائمی سینوسی می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- فرکانس توان لحظه‌ای، دو برابر فرکانس ولتاژ یا جریان است.

۲- توان لحظه‌ای می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

۳- در صورتی که $\cos \phi \geq 0$ باشد (به عبارت دیگر $90^\circ \leq \phi \leq -90^\circ$)، مقدار توان متوسط مثبت است. یعنی اگر مدار

پسیو باشد مقدار توان متوسط همواره مثبت است.

لازم به ذکر است مداری یا المانی پسیو است که $\text{Re}(z) \geq 0$ یا $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ باشد.

* ضریب توان $(\cos \varphi)$

مقدار $\cos \varphi$ را اصطلاحاً ضریب توان می‌گویند. φ اختلاف زاویه ولتاژ و جریان است.

$$\varphi = R V - R I$$

بنابراین برای المان‌های مختلف مداری، ضریب توان به صورت زیر است:

$$1 - \text{مدار مقاومتی خالص: } \varphi = 0 \leftarrow \cos \varphi = 1$$

$$2 - \text{مدار در حالت تشدید: } \varphi = 0 \leftarrow \cos \varphi = 1$$

$$3 - \text{مدار سلفی خالص: } \varphi = +90^\circ \leftarrow \cos \varphi = 0$$

$$4 - \text{مدار خازنی خالص: } \varphi = -90^\circ \leftarrow \cos \varphi = 0$$

$$5 - \text{مدار مقاومتی - سلفی: } 0 < \cos \varphi < 1 \leftarrow 0 \leq \varphi < 90^\circ$$

$$6 - \text{مدار مقاومتی - خازنی: } 0 < \cos \varphi < 1 \leftarrow -90^\circ \leq \varphi < 0$$

$$7 - \text{هر مدار شامل عناصر پسیو: } 0 < \cos \varphi \leq 1 \leftarrow -90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$$

* توان مختلط

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی، کلیه کمیت‌ها و مقادیر به صورت فازور و مختلط بیان می‌شوند. توان نیز به

صورت کمیتی مختلط با عنوان توان مختلط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m^*$$

که I_m^* مزدوج جریان I_m است.

توان مختلط به صورت فازوری نیز بیان می‌شود:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m R \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m \cos \varphi + j \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m \sin \varphi$$

به عبارت دیگر توان مختلط یک بردار با اندازه $\frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m$ و فاز φ است.

همچنین فازور امپدانس Z و فازور توان مختلط S با یکدیگر هم فاز هستند و فاز هر دوی آن‌ها برابر φ است.

در رابطه فوق V_m و I_m به ترتیب مقادیر ماکزیمم ولتاژ و جریان است و اگر در این رابطه مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان

V_e و I_e جایگزین شود، ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حذف می‌شود. یعنی:

$$S = V_e I_e R \phi$$

در بیان توان مختلط به صورت فازوری:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m \cos \phi + j \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m \sin \phi = P + jQ$$

که در این رابطه، P توان متوسط (P_{av}) یا حقیقی یا اکتیو یا مصرفی است و برحسب وات (w) بیان می‌شود.

Q توان مجازی یا راکتیو است و برحسب ولت آمپر راکتیو (VAR) سنجیده می‌شود. همچنین توان مختلط براساس

ولت آمپر (VA) تعریف می‌گردد.

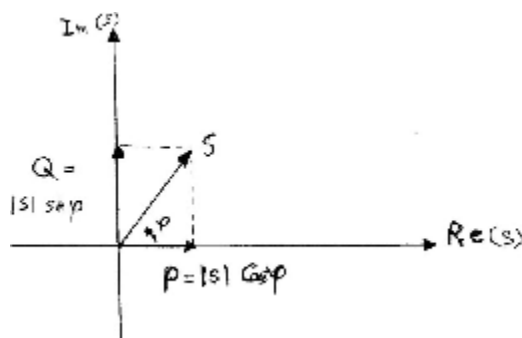
* توان ظاهری

اندازه توان مختلط را توان ظاهری می‌گویند.

$$|S| = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m I_m = V_e I_e = \text{توان ظاهری}$$

۷-۶-۱- مثلث توان

کلیه مطالب بیان شده در مورد توان در حالت دائمی سینوسی را می‌توان در یک شکل با عنوان مثلث توان خلاصه نمود:



براساس مثلث توان می‌توان گفت:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

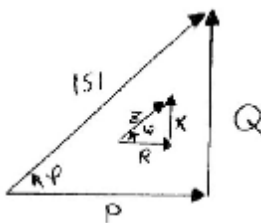
$$P = |S| \cos \phi$$

$$Q = |S| \sin \phi$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

همچنین می‌توان گفت در مدارهای خازنی $Q < 0$ و در مدارهای سلفی $Q > 0$ است ولی در همه مدارهای پسیو $P_{av} \geq 0$ می‌باشد.

نکته: مثلث توان و مثلث امپدانس، متشابه هستند. به عبارت دیگر:

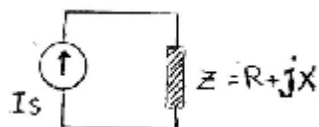


$$RZ = RS = \varphi$$

نکته: در تحلیل حالت دائمی سینوسی، اگر بتوان مدار مورد بررسی را به یکی از شکل‌های زیر تبدیل نمود، برای

محاسبه P و Q داریم:

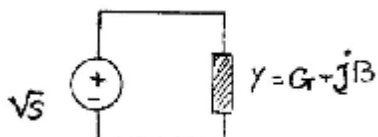
-۱



$$P = P_{av} = \frac{1}{2} R |I_S|^2 = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I_e^2 (w)$$

$$Q = \frac{1}{2} X |I_S|^2 = \frac{1}{2} X I_m^2 = X I_e^2 (VAR)$$

-۲



$$P = P_{av} = \frac{1}{2} G |V_S|^2 = \frac{1}{2} G V_m^2 = G V_e^2 (w)$$

$$Q = \frac{-1}{2} B |V_S|^2 = \frac{-1}{2} B V_m^2 = -B V_e^2 (VAR)$$

و با داشتن P و Q ، هر پارامتر دیگری مشخص و معلوم است.

۷-۶-۲- توان و قضیه جمع آثار

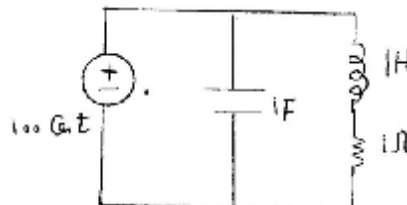
قضیه جمع آثار برای توان لحظه‌ای برقرار نیست.

جمع آثار به دو شرط می‌تواند برای توان متوسط برقرار باشد:

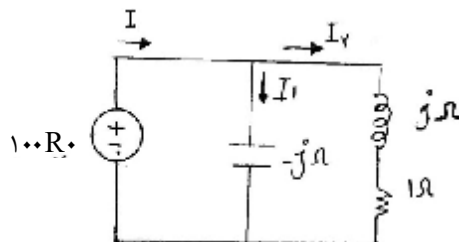
۱- فرکانس منابع ورودی متفاوت باشد.

۲- مدار در حالت دائمی قرار گرفته باشد.

مثال ۱۳: در مدار شکل زیر، توان مختلط، حقیقی و راکتیو را پیدا کنید.



روش اول: با انتقال مدار در حوزه فرکانس ($\omega = 1$) داریم:



$$I_1 = \frac{100 \cdot R}{-j} = 100 \cdot j, \quad I_2 = \frac{100 \cdot R}{1+j} = 50(1-j) = 50 - 50j$$

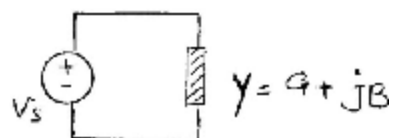
$$\text{KCL: } I = I_1 + I_2 = 100j + 50 - 50j = 50 + 50j$$

$$S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (50 - 50j) = 2500 - j2500$$

و در نتیجه:

$$P = 2500 \text{ W}, Q = -2500 \text{ VAR}, |S| = 2500 \sqrt{2} \text{ VA}$$

روش دوم: با تبدیل مدار به شکل زیر داریم:



$$Y = j + \frac{1}{1+j} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \rightarrow G = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$$

پس داریم:

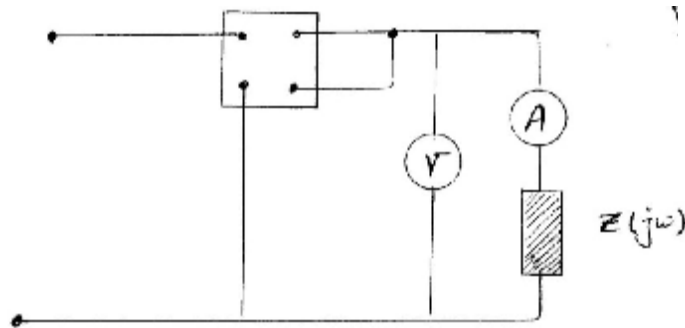
$$P = \frac{1}{2} G |V_S|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (100)^2 = 2500 \text{ W}$$

$$Q = \frac{-1}{2} B |V_S|^2 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{2} (100)^2 = -2500 \text{ VAR}$$

$$|S| = \sqrt{(2500)^2 + (-2500)^2} = 2500 \sqrt{2} \text{ VA}$$

مثال ۱۴: در مدار شکل زیر، آمپر متر مقدار ۱۰ آمپر، ولت متر مقدار ۱۳۰ ولت و وات متر ۵۰۰ وات را نشان می‌دهد. در

این صورت $Z(j\omega)$ چقدر است؟



با توجه به این که دستگاه‌های اندازه‌گیری، مقادیر مؤثر را نشان می‌دهند داریم:

$$P = R I_e^2 \rightarrow R = \frac{P}{I_e^2} = \frac{500}{10^2} = 5 \Omega$$

$$|Z| = \frac{V_e}{I_e} = \frac{130}{10} = 13 \Omega$$

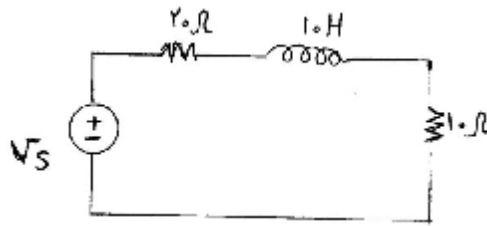
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \rightarrow X = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Omega$$

و در نتیجه:

$$Z = R \pm jX = 5 \pm j12$$

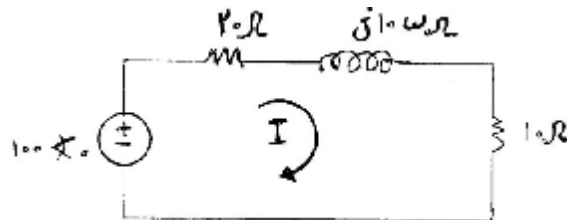
مثال ۱۵: در مدار شکل زیر، توان جذب شده توسط مقاومت ۱۰ اهمی برابر ۲۰ وات است. ضریب توان منبع V_s را به

دست آورید.



$$V_S = 100 \cos \omega t$$

با انتقال مدار به حوزه فرکانس داریم:



$$P_{L.} = \frac{1}{2} R |I|^2 \rightarrow |I| = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{1}} = 2 \text{ A}$$

$$I = \frac{V_S}{2 + j10\omega + 1} = \frac{100 \angle 0^\circ}{3 + j10\omega} \rightarrow |I| = \frac{100}{\sqrt{9 + 100\omega^2}} = 2 \rightarrow 900 + 100\omega^2 = 2500 \rightarrow \omega = 4$$

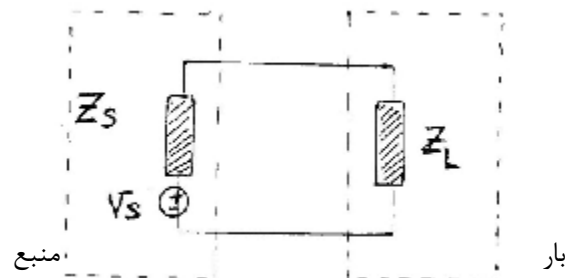
$$I = \frac{100 \angle 0^\circ}{3 + j40} = \frac{100 \angle 0^\circ}{50 \angle 86.3^\circ} = 2 \angle -86.3^\circ$$

و در نتیجه:

$$\cos \phi = \cos (R V_S - R I) = \cos 86.3^\circ = 0.06$$

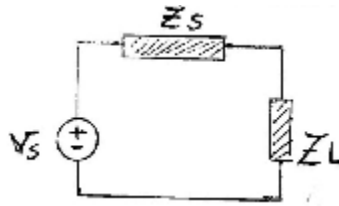
۷-۶-۳- قضیه انتقال توان ماکزیمم

در مدار شکل زیر:



برای انتقال بیشترین توان از منبع به بار پنج حالت داریم:

۱- هم بار و هم منبع مختلط باشند:



در این حالت شرط انتقال توان ماکزیمم از منبع به بار این است که:

$$Z_L = Z_s^*$$

و مقدار این توان مختلط انتقالی ماکزیمم برابر است با:

$$P_{\max} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{|V_s|^2}{R_L}$$

۲- هم‌بار و هم منبع هر دو اهمی خالص باشند. در این صورت شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از:

$$R_L = R_s$$

۳- بار اهمی خالص و منبع مختلط باشد. در این صورت:

$$R_L = |Z_s| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$$

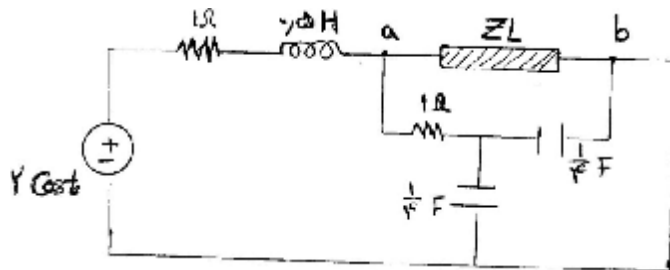
۴- بار موهومی خالص و منبع مختلط باشد. آنگاه:

$$X_L = |Z_s| = \sqrt{R_s^2 + X_s^2}$$

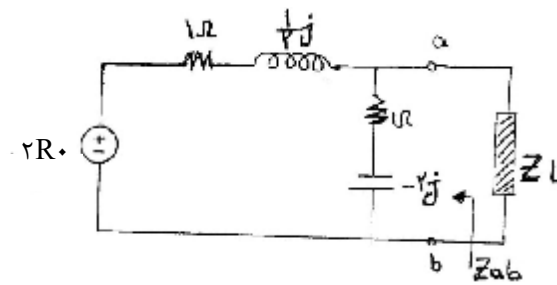
۵- بار مختلط و منبع اهمی خالص باشد. پس داریم:

$$X_L = 0, R_L = R_s$$

مثال ۱۶: در مدار شکل زیر Z_L را به گونه‌ای تعیین کنید که توان انتقالی به آن ماکزیمم شود.



با انتقال مدار به حوزه فرکانس و مرتب‌سازی آن داریم: ($\omega = 1$)



امپدانس ورودی از دو سر b, a را به دست می‌آوریم:

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}}, Y_{ab} = \frac{1}{1-j2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}j} = \frac{2(2-j)}{5} + \frac{1+2j}{5} = 1j \rightarrow Z_{ab} = 1\Omega$$

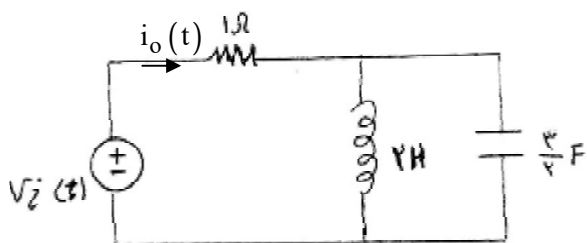
پس برای انتقال توان ماکزیمم باید $Z_L = Z_{ab}^* = 1\Omega$ باشد.



تست‌های طبقه‌بندی شده مبحث تحلیل در حالت دائمی سینوسی

۱- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. به ازای کدام مقدار ϕ پاسخ حالت دائمی سینوسی به

صورت $i_o(t) = I_m \cos t$ خواهد بود و مقدار I_m کدام است؟



$$I_m = \sqrt{2}, \phi = -\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \phi = -\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

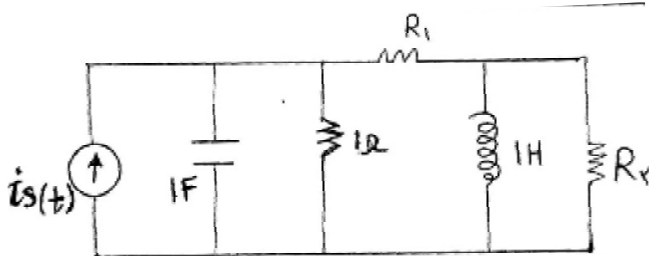
$$I_m = \sqrt{2}, \phi = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \phi = \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$V_i(t) = \sin(t + \phi)$$

۲- در مدار شکل زیر، توان متوسط (یا توان مصرفی) مقاومت R_1 برابر P_1 و توان مصرفی مقاومت R_2 برابر

P_2 است. مقاومت‌های R_1 و R_2 چند اهمی باشند تا $P_1 + P_2$ حداکثر باشد؟



$$R_2 = \frac{1}{2}, R_1 = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$R_2 = 0, R_1 = 1 \quad (2)$$

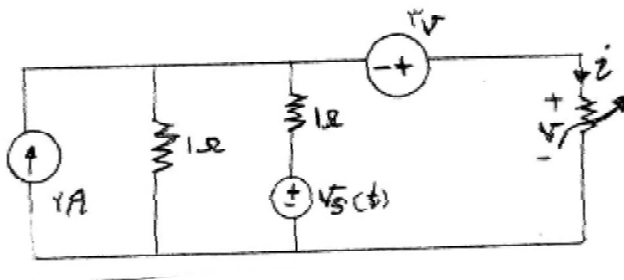
$$R_2 = 1, R_1 = 0 \quad (3)$$

$$R_2 = 2, R_1 = 2 \quad (4)$$

$$i_S(t) = 110 \cos t$$

۳- در مدار شکل زیر، ولتاژ $V(t)$ دو سر مقاومت غیرخطی به کدام جواب نزدیک‌تر است؟

$$V_s(t) = 0.18 \cos 2t \text{ و مشخصه مقاومت غیرخطی } i = \begin{cases} V^2, & V > 0 \\ 0, & V < 0 \end{cases} \text{ است.}$$



$$2 + 0.3 \cos 2t \quad (1)$$

$$2 + 0.6 \cos 2t \quad (2)$$

$$4 + 0.18 \cos 2t \quad (3)$$

$$4 + 0.36 \cos 2t \quad (4)$$

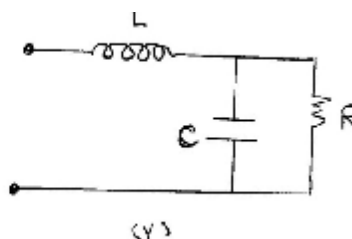
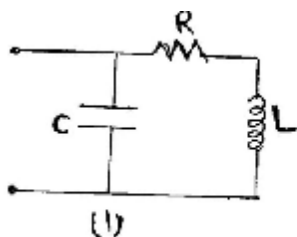
۴- برای آن که فرکانس تشدید دو مدار شکل زیر یکسان باشد، کدام شرط باید برقرار باشد؟

$$R = \frac{L}{C} \quad (۱)$$

$$R = \frac{C}{L} \quad (۲)$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (۳)$$

$$R = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (۴)$$



۵- در مدار زیر عنصر غیرخطی توسط رابطه $i = V^2$ تعریف شده است. مقدار مقاومت R برای انتقال

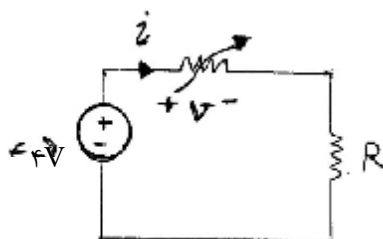
حداکثر توان به آن کدام گزینه است؟

$$۲۷ \quad (۱)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{۲۷} \quad (۳)$$

$$\frac{۲}{۲۷} \quad (۴)$$



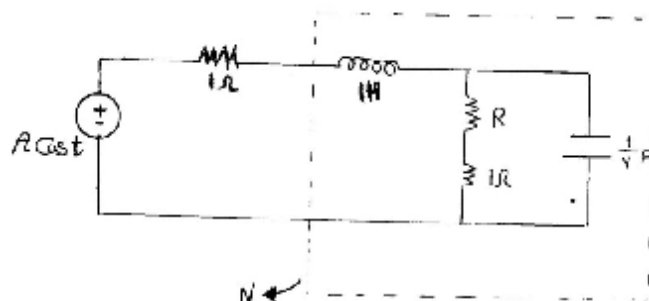
۶- در مدار حالت دائمی سینوسی زیر ماکزیمم توان N برابر $\frac{1}{8}$ وات است. آنگاه:

$$|A| = \frac{1}{۲} \text{ Volt}, R = ۱\Omega \quad (۱)$$

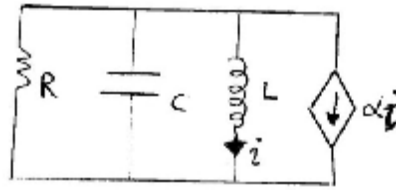
$$|A| = ۱ \text{ Volt}, R = ۱\Omega \quad (۲)$$

$$|A| = ۱ \text{ Volt}, R = ۳\Omega \quad (۳)$$

$$|A| = \frac{1}{۲} \text{ Volt}, R = ۳\Omega \quad (۴)$$



۷- در مدار شکل زیر فرکانس تشدید کدام است؟



(۱) $\sqrt{\frac{\alpha-1}{LC}}$

(۲) $\sqrt{\frac{\alpha}{LC}}$

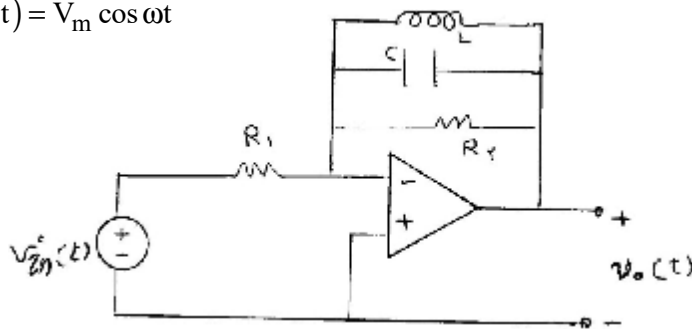
(۳) $\sqrt{\frac{1-\alpha}{LC}}$

(۴) $\sqrt{\frac{1+\alpha}{LC}}$

۸- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. در چه فرکانسی رابطه ورودی و خروجی به صورت

$V_o(t) = KV_{in}(t)$ در می آید (K یک مقدار ثابت) و مقدار K کدام است؟

$V_{in}(t) = V_m \cos \omega t$



(۱) $K = \frac{-R_2}{R_1}, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

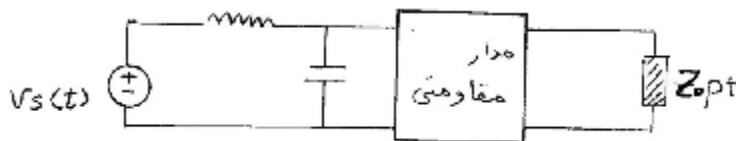
(۲) $K = \frac{-R_1}{R_2}, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(۳) $K = \frac{-R_2}{R_1}, \omega = \sqrt{\frac{L}{C}}$

(۴) $K = \frac{-R_1}{R_2}, \omega = \sqrt{\frac{L}{C}}$

۹- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. کدام گزینه به عنوان Z_{opt} (از حیث دریافت توان

ماکزیمم) می تواند قابل قبول باشد؟



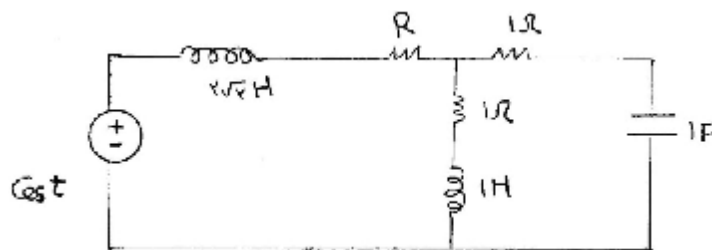
(۱) $j\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $1-j$

(۴) $1+j$

۱۰- در مدار شکل زیر، به ازای چه مقدار R توان متوسط دریافتی آن حداکثر می‌شود؟



(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۹

(۴) $1+2\sqrt{2}$

۱۱- سه بار Z_{L1} و Z_{L2} و Z_{L3} به‌طور موازی به یک شبکه مطابق شکل زیر وصل هستند. بار Z_{L1} توان

25kW و 25kVAR را جذب می‌کند. بار Z_{L2} توان 15kVA را به ضریب توان پیش‌فاز 0.8 جذب می‌کند.

بار Z_{L3} توان 11kW را با ضریب توان یک جذب می‌کند. ضریب توان کل بارها کدام است؟



(۱) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ و پس‌فاز

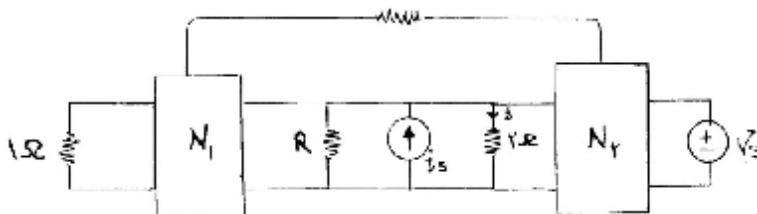
(۲) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ و پیش‌فاز

(۳) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ و پیش‌فاز

(۴) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ و پس‌فاز

۱۲- در شکل زیر مدارهای N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی مثبت تشکیل شده و به ازای $R = 2\Omega$.

$i = \frac{1}{3}i_s + \frac{1}{4}V_s$ است. به ازای چه مقدار R ، توان آن ماکزیمم است؟



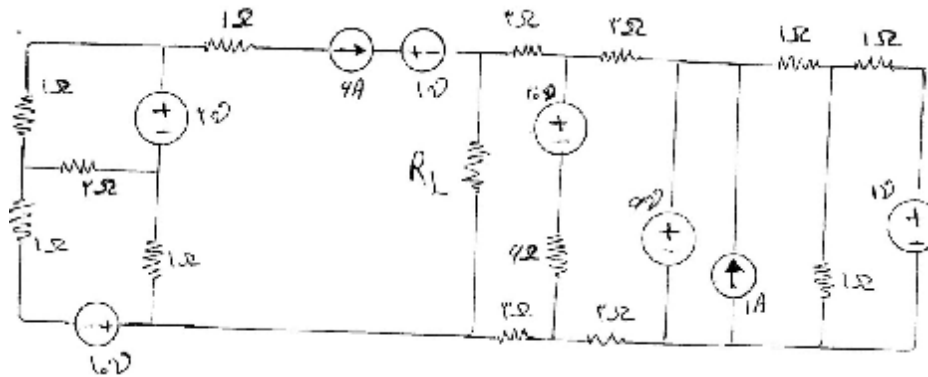
(۱) -1Ω

(۲) 1Ω

(۳) 2Ω

(۴) $\frac{2}{5}\Omega$

۱۳- در مدار زیر حداکثر توانی که به R_L می‌رسد کدام است؟



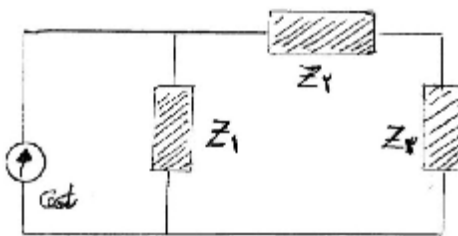
(۱) ۳۶W

(۲) ۱۴۴W

(۳) ۱۵۰W

(۴) ۲۲۵W

۱۴- مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. کدام گزینه نادرست است؟



$$\begin{cases} Z_1 = 0.3 + j0.1 \Omega \\ Z_2 = 0.4 - j0.2 \Omega \\ Z_3 = 0.2 + j0.4 \Omega \end{cases}$$

(۱) توان ظاهری (اندازه توان مختلط) تحویل داده شده به Z_2 و Z_3 برابر است.

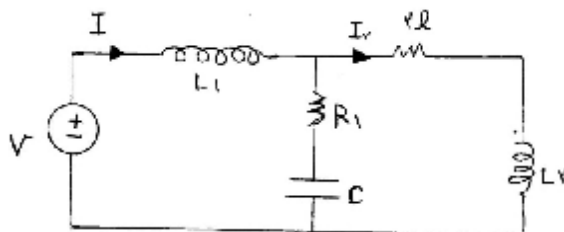
(۲) توان متوسط تحویل داده شده به Z_2 دو برابر توان متوسط تحویل داده شده به Z_3 است.

(۳) توان راکتیو تحویل داده شده به Z_1 ، (-2) برابر توان راکتیو تحویل داده شده به Z_2 است.

(۴) توان راکتیو تحویل داده شده به Z_3 ، چهار برابر توان راکتیو تحویل داده شده به Z_1 است.

۱۵- در مدار در حالت دائمی سینوسی شکل زیر، $V = 10 \angle 0^\circ$ و $I = \frac{1+j}{2}$ (با مقادیر ماکزیمم برحسب ولت و

آمپر) و توان متوسط R_1 برابر $1/5$ وات است. ماکزیمم جریان I_p چند آمپر است؟



(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) ۱

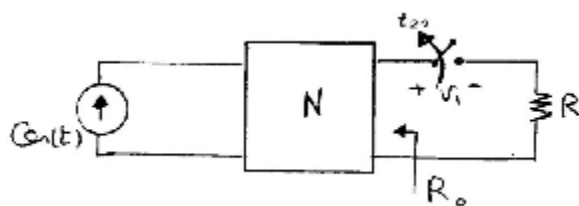
(۳) $\sqrt{3/5}$

(۴) نمی‌توان محاسبه کرد چون I_p به مقادیر عناصر بستگی دارد.

۱۶- در مدار شکل زیر، N شبکه‌ای مقاومتی، خط و تغییرناپذیر با زمان است. وقتی کلید بسته است

ماکزیمم توان در مقاومت R برابر $\frac{1}{6}$ وات می‌باشد. اگر ولتاژ دو سر کلید (V_1) در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر $\sqrt{2}$ ولت

باشد، R چند اهم است؟



(۱) ۳

(۲) $\frac{2}{3}$

(۳) ۶

(۴) $\frac{3}{2}$

۱۷- ورودی یک مدار RL سری منبع ولتاژ $V_S(t) = V_0 \sin \omega t$ است. اگر $R = 2\Omega$ ، $L = 1H$ ،

$\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ و $V_0 = 10 \text{ Volt}$ باشد، شرایط اولیه $i_L(0)$ را چنان تعیین کنید که مدار پاسخ گذرا نداشته باشد.

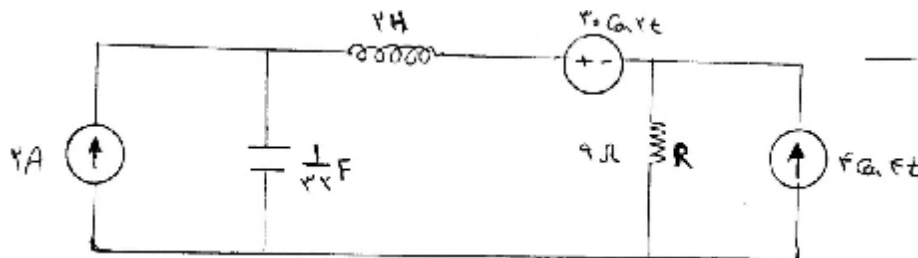
(۴) هیچ‌کدام

(۳) $-2A$

(۲) $2A$

(۱) $-1A$

۱۸- توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت R در حالت دائمی در شبکه زیر چقدر است؟



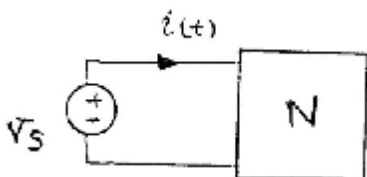
(۱) $54W$

(۲) $36W$

(۳) $18W$

(۴) $72W$

۱۹- معادله دیفرانسیل شکل زیر برای ورودی $V(t)$ و خروجی $i(t)$ به صورت زیر است:



$$\frac{d^4 i}{dt^4} + 1 \cdot \frac{d^3 i}{dt^3} + 4 \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + 6 \cdot \frac{di}{dt} + 784i = 1 \cdot \frac{dV_S}{dt} + 4 \cdot V_S$$

در فرکانس $\omega = 4$ کدام مدار زیر دارای رفتار حالت دائمی سینوسی یکسان با این مدار است؟

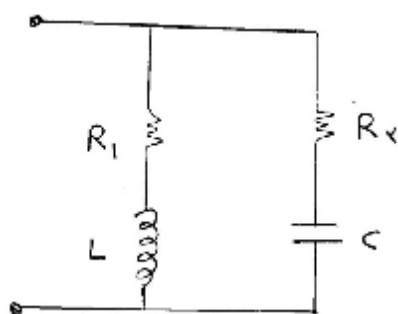
(۲) یک خازن $\frac{1}{4}$ فارادی

(۱) یک سلف $\frac{1}{4}$ هانری

(۴) اتصال سری یک مقاومت و یک سلف

(۳) اتصال سری یک مقاومت و یک خازن

۲۰- فرکانس تشدید مدار شکل زیر را به دست آورید.



$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad (۱)$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۲)$$

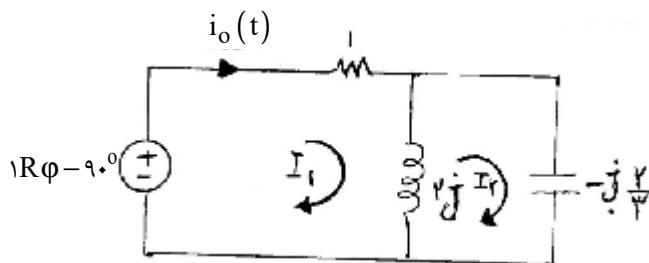
$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{t - CR_1^2}{L - CR_2^2}} \quad (۳)$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - CR_2^2}{L - CR_1^2}} \quad (۴)$$

پاسخ تشریحی

۱- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مدار را در حالت دائمی سینوسی با $\omega = 1$ رسم می‌کنیم و معادلات مش را به صورت فازوری می‌نویسیم:



$$\begin{aligned} \text{KVL: } 1R\phi - 90^\circ &= I_1 + 2j(I_1 - I_2) \\ \text{KVL: } 2j(I_2 - I_1) - j\frac{2}{3}I_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+2j & -2j \\ -2j & 2j-\frac{2}{3}j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -jR\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه معادلات برای I_1 داریم:

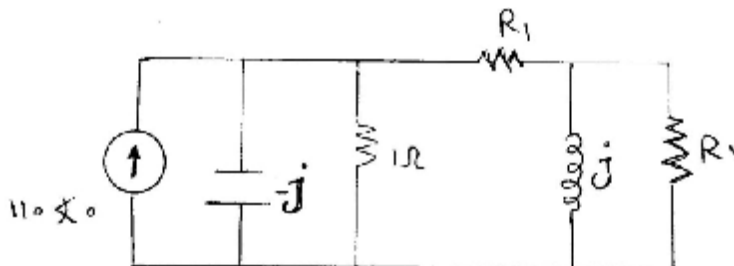
$$I_1 = \left(\frac{1-j}{2} \right) (1R\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2} R\phi - \frac{\pi}{4} \rightarrow i_o(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\phi - \frac{\pi}{4} + \omega t \right)$$

$$\rightarrow i_o(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(t + \phi - \frac{\pi}{4} \right)$$

بنابراین برای این که $i_o(t) = I_m \cos t$ باشد، باید $\phi = \frac{\pi}{4}$ بوده که در این صورت $I_m = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ خواهد بود.

۲- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای سادگی محاسبات R_1 و R_2 را کنار همدیگر قرار می‌دهیم. برای این منظور مدار را به حالت دائمی سینوسی تبدیل می‌کنیم ($\omega = 1$):



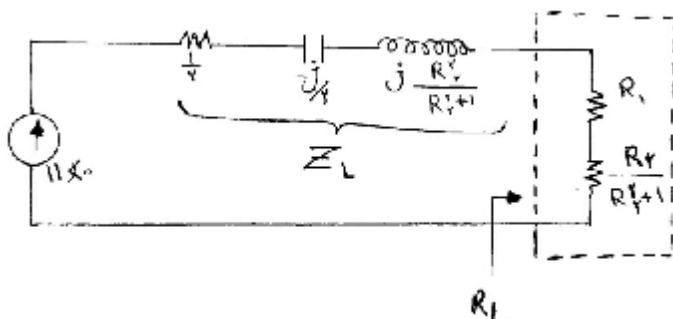
ابتدا شاخه R_2 موازی با سلف j را به سری تبدیل می‌کنیم:

$$Z_1 = R_1 \parallel j = \frac{R_1 j}{R_1 + j} \cdot \frac{R_1 - j}{R_1 - j} = \frac{R_1 j (R_1 - j)}{R_1^2 + 1} = \frac{R_1}{R_1^2 + 1} + j \frac{R_1^2}{R_1^2 + 1}$$

همچنین مقاومت یک اهمی موازی با خازن $-j$ را به سری تبدیل می‌کنیم:

$$Z_1 = 1P - j = \frac{-j}{1-j} \cdot \frac{1+j}{1+j} = \frac{-j(1+j)}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{-j}{2}$$

در نهایت مدار به صورت زیر تبدیل می‌شود:



$$R_L = R_1 + \frac{R_2}{R_2^2 + 1}$$

برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R_L باید:

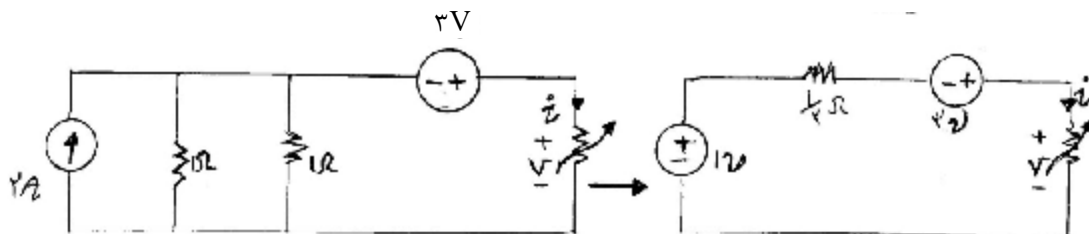
$$R_L = |Z_S| \rightarrow R_1 + \frac{R_2}{R_2^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 + 1} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

با استفاده از گزینه‌ها به سادگی دیده می‌شود که به ازای $R_1 = 0$ و $R_2 = 1$ ، رابطه‌ی فوق برقرار است.

۳- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

ابتدا بخش DC مدار را در نظر می‌گیریم تا نقطه کار مقاومت غیرخطی را به دست آوریم.

با استفاده از تبدیل نورتن به تونن داریم:



$$\text{KVL: } -1 + \frac{1}{2}i - 3 + V = 0 \xrightarrow{i=V^2} \frac{1}{2}V^2 + V = 4 \rightarrow \begin{cases} V = 2 \text{ Volt} \\ V = -4 \text{ Volt} \end{cases}$$

که فقط جواب مثبت قابل قبول است.

بنابراین نقطه کار مقاومت غیرخطی برابر است با:

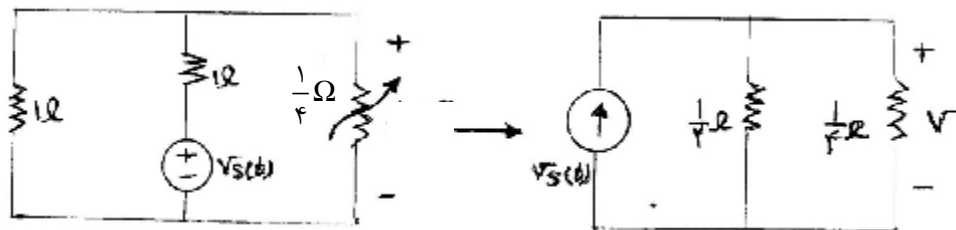
$$V = 2 \rightarrow i = V^2 = 4 \rightarrow \text{نقطه کار } (V = 2, i = 4)$$

اکنون با استفاده از تقریب سیگنال کوچک مقاومت غیرخطی را در نقطه کار خطی می‌کنیم.

به عبارت دیگر، مقاومت معادل آن را در نقطه کار به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{R} = \frac{di}{dV} = 2V = 2 \quad 2 = 4 \rightarrow R = \frac{1}{4} \Omega$$

پس برای بخش ac (سیگنال کوچک) داریم:



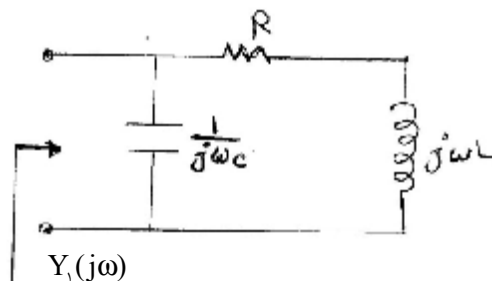
$$V = \left(\frac{1}{2} \parallel \frac{1}{4}\right) V_S(t) = \frac{1}{6} V_S(t) = \frac{1}{6} \cdot 18 \cos 2t = 3 \cos 2t$$

بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت غیرخطی برابر است با:

$$V(t) = 2 + 3 \cos 2t$$

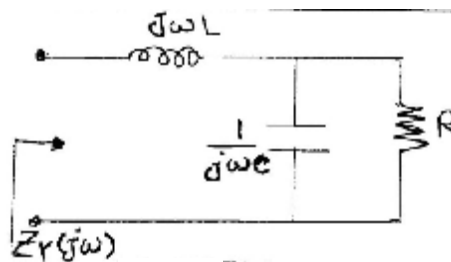
۴- گزینه ی «۳» صحیح است.

برای یافتن فرکانس تشدید، باید امپدانس یا ادمیتانس را به دست آورده و بخش موهومی آن را برابر صفر قرار دهیم.



$$Y_1(j\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\text{Im}(Y_1(j\omega)) = 0 \rightarrow C\omega - \frac{\omega L}{R^2 + L^2\omega^2} = 0 \rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$



$$Z_T(j\omega) = j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{Rj\omega C + 1} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega RC)}{1 + (R\omega C)^2}$$

$$\text{Im}(Z_T(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega L - \frac{R\omega C}{1 + (R\omega C)^2} = 0 \rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}$$

با مساوی قرار دادن فرکانس‌های تشدید داریم:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2} \rightarrow \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{R^2 C^2} \rightarrow R^4 = \frac{L^2}{C^2} \rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

۵- گزینه‌ی «۳» صحیح است.

برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R، باید مقاومت R با مقاومت معادل از دو سرش برابر باشد که در این جا این مقاومت به صورت غیرخطی است.

برای مقاومت‌های غیرخطی در نقطه کار می‌توان گفت:

$$R' = \frac{\partial V}{\partial i} \rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{\partial i}{\partial V}$$

$$i = V^3 \rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{\partial(V^3)}{\partial V} = 3V^2 \rightarrow R' = \frac{1}{3V^2} \rightarrow R = R' = \frac{1}{3V^2}$$

که برای یافتن V با KVL زدن در مدار داریم:

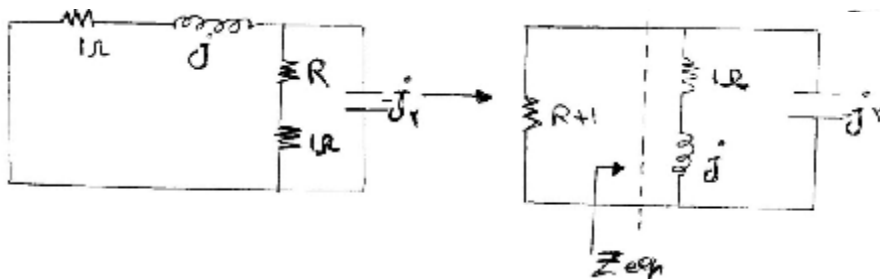
$$\text{KVL: } \mathcal{E} = V + Ri = V + \frac{1}{3V^2} V^3 \quad V^3 = V + \frac{V}{3} = \frac{4}{3} V \rightarrow V = \frac{3}{4} \text{ Volt}$$

بنابراین:

$$R = R' = \frac{1}{3V^2} \Big|_{V=\frac{3}{4}} = \frac{1}{27} \Omega$$

۶- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

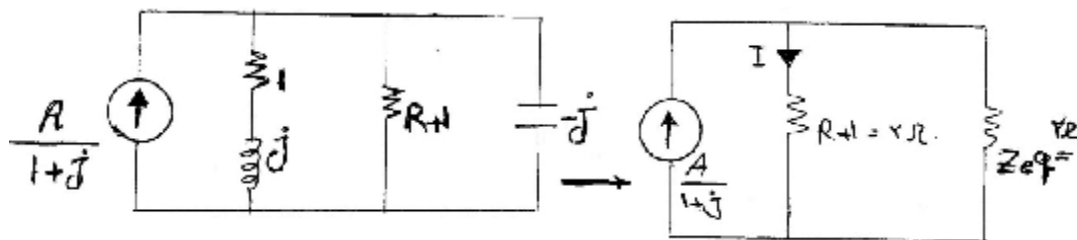
همان‌طور که دیده می‌شود ماکزیمم توان شبکه N برحسب وات است، یعنی این توان در قسمت مقاومتی شبکه N مصرف می‌شود و اگر بخواهیم توان مقاومت شبکه N ماکزیمم شود، باید مقدار آن با اندازه امپدانس معادل از دو سر آن برابر باشد. بنابراین داریم: ($\omega = 1$)



$$Z_{eq} = (1+j) \parallel (-2j) = \frac{-2j(1+j)}{1-j} = \frac{-2j(1+j)^2}{2} = -j(1+j)^2 = -j \quad 2j=2$$

$$R' = R + 1 = |Z_{eq}| = 2 \rightarrow R = 1\Omega$$

و برای به‌دست آوردن $|A|$ با استفاده از تبدیل تونن به نورتن و مقدار توان داده شده داریم:

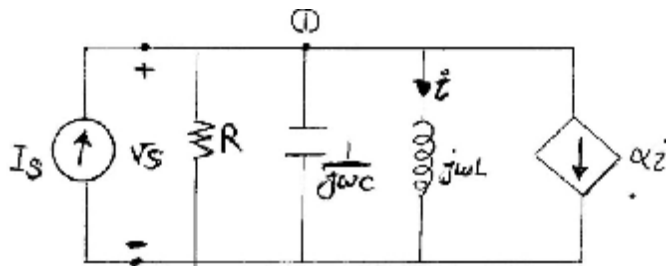


$$P = \frac{1}{2} R' |I|^2 = \frac{1}{2} (R+1) \left| \frac{A}{2(1+j)} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad \frac{|A|^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8} \rightarrow |A| = 1$$

۷- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

روش اول: امپدانس معادل مدار را به‌دست می‌آوریم و قسمت موهومی آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. برای این منظور با

اعمال منبع جریان I_s به دو سر مدار و نوشتن KCL در گره d داریم:



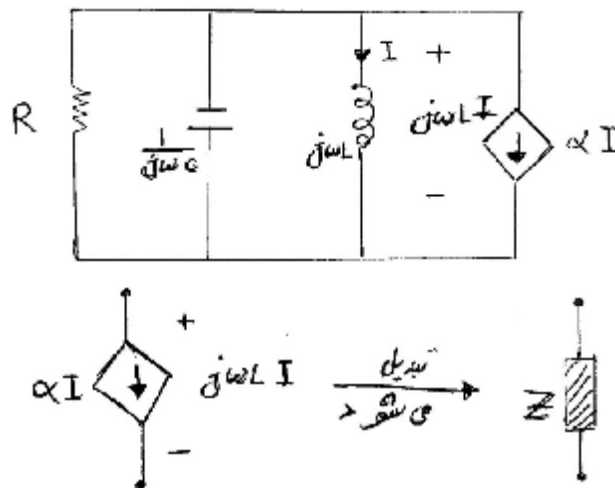
$$\text{KCL: } I_S = \frac{V_S}{R} + j\omega C V_S + \frac{V}{j\omega L} + \alpha \frac{V}{j\omega L}$$

$$\rightarrow I_S = V_S \left(\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1+\alpha}{j\omega L} \right) \rightarrow Z_{in}(j\omega) = \frac{V_S}{I_S} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1+\alpha}{\omega L}\right)}$$

برای حقیقی بودن $Z_{in}(j\omega)$ باید:

$$\omega C - \frac{1+\alpha}{\omega L} = 0 \rightarrow \omega C = \frac{1+\alpha}{\omega L} \rightarrow \omega^2 = \frac{1+\alpha}{LC} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1+\alpha}{LC}}$$

روش دوم: چون ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته مشخص است می‌توان آن را به امپدانس تبدیل کرد.



$$Z = \frac{j\omega L I}{\alpha I} = j \frac{L}{\alpha} \omega$$

پس منبع جریان معادل یک سلف به اندازه $\frac{L}{\alpha}$ است که با سلف L موازی می‌باشد.

$$L_{eq} = \frac{L \frac{1}{\alpha}}{L + \frac{L}{\alpha}} = \frac{L}{\alpha + 1}$$

در نتیجه مدار به یک مدار RLC موازی تبدیل می‌شود که برای فرکانس تشدید آن داریم:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{\alpha+1}}C} = \sqrt{\frac{\alpha+1}{LC}}$$

۸- گزینه‌ی «۱» صحیح است.

اگر بخواهیم گزینه‌ی «۴» صحیح است. $V_o(t) = KV_{in}(t)$ باشد، یعنی V_o با V_{in} هم فاز باشد، جریان LC موازی باید صفر باشد. به عبارت دیگر، مدار LC باید اتصال باز باشد که این اتفاق در حالت تشدید رخ می‌دهد و فرکانس آن

$$\text{برابر } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ است.}$$

با مساوی گرفتن ولتاژ دو سر ورودی آپ امپ و جریان ورودی صفر، با نوشتن KCL در ورودی آپ امپ داریم:

$$\frac{-V_{in}}{R_1} + \frac{-V_o}{R_2} \Rightarrow V_o = \frac{R_2}{R_1} V_{in} \rightarrow K = -\frac{R_2}{R_1}$$

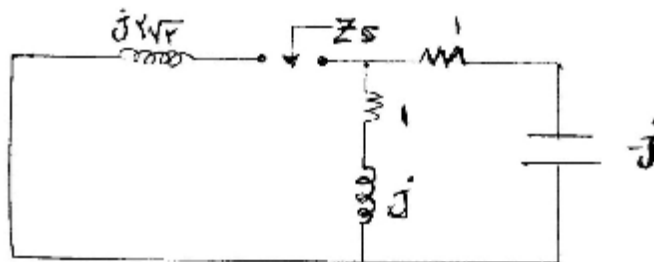
۹- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

طبق قضیه انتقال توان ماکزیمم Z_{opt} باید با Z_{in}^* از دو سرش برابر باشد. وقتی از دو سر Z_{opt} به بقیه مدار نگاه می‌کنیم، یک مدار RC دیده می‌شود که تنها المانی که در بخش موهومی آن وجود دارد یک خازن است که دارای امپدانس منفی می‌باشد، یعنی بخش موهومی Z_{in} منفی است و در نتیجه بخش موهومی Z_{in}^* مثبت خواهد بود و جزء حقیقی آن نیز مثبت است. این حالت فقط در گزینه ۴ وجود دارد.

۱۰- گزینه‌ی «۲» صحیح است.

طبق قضیه انتقال توان ماکزیمم باید از دو سر R امپدانس دیده شده را به دست آورده و R را برابر اندازه این امپدانس در نظر بگیریم.

در حالت دائمی سینوسی با $\omega=1$ و صفر کردن منابع مستقل داریم:



$$Z_s = (1+j) \parallel (1-j) + j\sqrt{2} = 1 + j\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$R = |Z_s| = \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9} = 3\Omega$$

۱۱- گزینه ی «۴» صحیح است.

توان متوسط هر بار را با هم جمع می کنیم تا توان متوسط کل به دست آید:

$$P_t = \sum |S| \cos \phi = 25 + (15 \cdot 0.8) + 11 = 48 \text{ KW}$$

پس فاز یا پیش فاز بودن در توان متوسط تأثیری ندارد زیرا $\cos \phi = \cos(-\phi)$

در مورد توان راکتیو چون $\sin(-\phi) = -\sin \phi$ است، پیش فاز بودن را با فاز منفی (که نشان دهنده حالت خازنی است)

و پس فاز بودن را با فاز مثبت (که نشان دهنده حالت سلفی است) بیان می کنیم، در نتیجه:

$$Q_t = \sum |S| \sin \phi = 25 + (-15 \cdot 0.6) + 0 = 16 \text{ KVAR}$$

بنابراین:

$$\cos \phi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{48}{\sqrt{48^2 + 16^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

و چون Q مثبت است نشان دهنده سلفی بودن امپدانس و حالت پس فاز است.

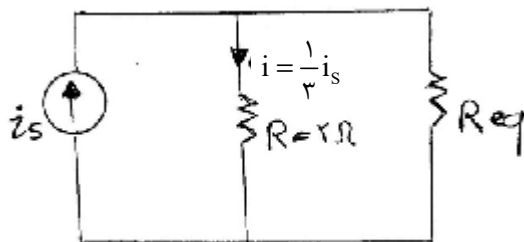
۱۲- گزینه ی «۲» صحیح است.

برای این که توان ماکزیمم به مقاومت R برسد باید با مقاومت معادل از دو سرش برابر باشد. از طرفی زمانی که $R = 2\Omega$

است، جریانش به دلیل تساوی دو مقاومت موازی با i_s برابر i است، یعنی جریان i نیز از مقاومت R می گذرد.

با توجه به این که مدارهای N_1 و N_2 مقاومتی هستند، برای بررسی اثر منبع i_s ، باید منبع ولتاژ V_s را صفر کرده در

نتیجه $i = \frac{1}{3} i_s$ است و یک مقاومت معادل از دو سر R و موازی با i_s در نظر می گیریم:



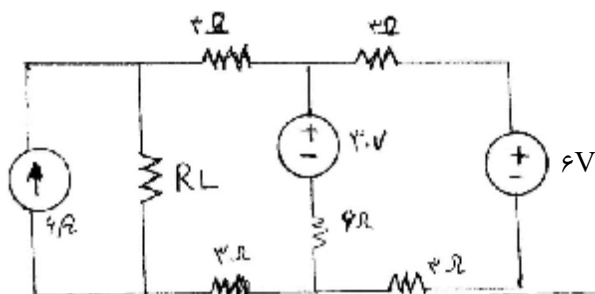
بنابراین:

$$i = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R} = \frac{1}{3} i_s \rightarrow \frac{R_{eq}}{R_{eq} + 2} = \frac{1}{3} \rightarrow R_{eq} = 1\Omega$$

۱۳- گزینه ی «۲» صحیح است.

منبع جریان سری با منبع ولتاژ، معادل یک منبع جریان است. بنابراین به جای مدار سمت چپ مقاومت R_L ، می‌توان فقط منبع جریان 6 آمپری را قرار داد.

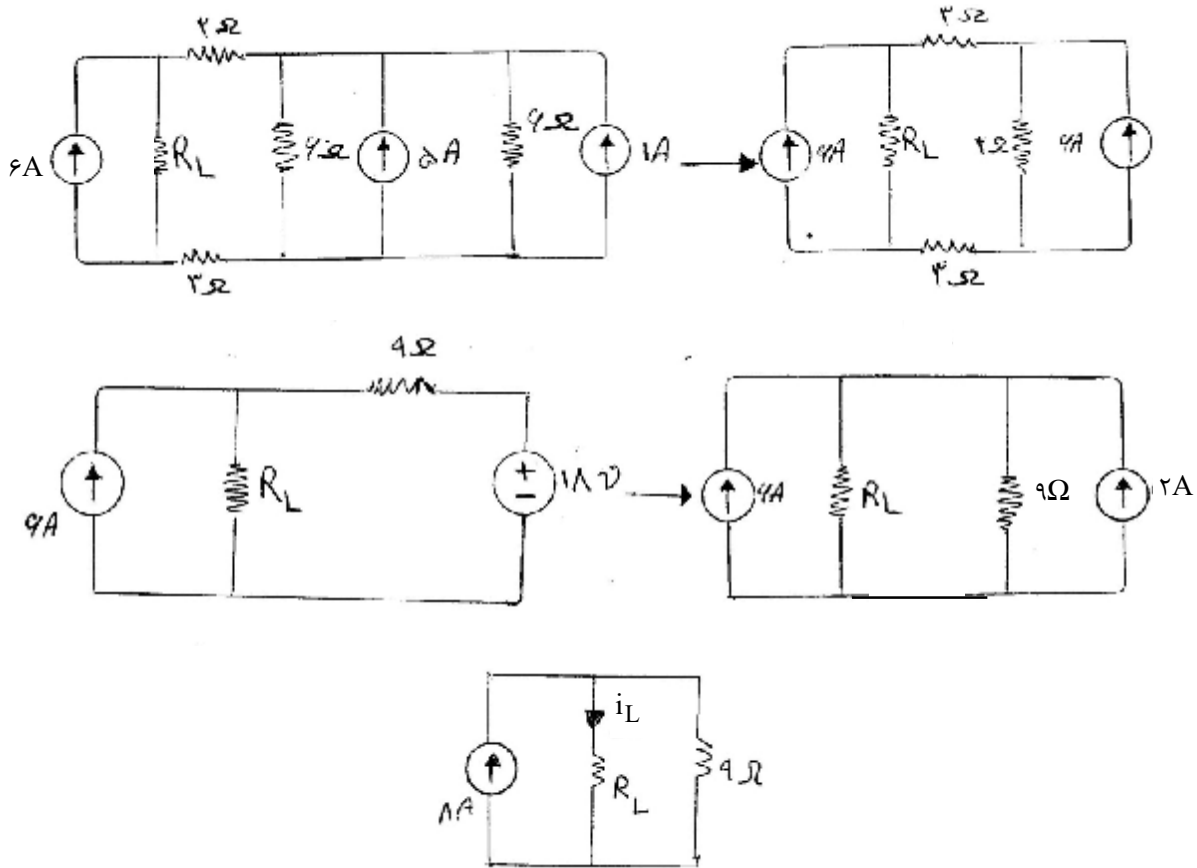
همچنین منبع ولتاژ موازی با هر مداری معادل همان منبع ولتاژ است. پس به جای منبع ولتاژ 6 ولتی موازی با مدار سمت راست آن می‌توان فقط منبع ولتاژ 6 ولتی را قرار داد. در نتیجه مدار به شکل زیر ساده می‌شود:



برای انتقال حداکثر توان به مقاومت R_L ، مقاومت معادل از دو سرش را به‌دست آورده و برابر R_L قرار می‌دهیم. برای این منظور با صفر کردن منابع مستقل داریم:

$$R_L = 3 + 3 + (6 \parallel 6) = 9\Omega$$

برای محاسبه توان تحویلی به R_L می‌توان گفت:



$$i_L = \frac{9}{9+9} \quad \Rightarrow \quad i_L = 4A$$

بنابراین:

$$P_{\max} = R_L i_L^2 = 9 \cdot 16 = 144W$$

۱۴- گزینه‌ی «۴» صحیح است.

Z_1 و Z_2 ، جریان یکسانی دارند. همچنین اندازه Z_1 و Z_2 برابر است، پس توان ظاهری آن‌ها برابر خواهد بود ←
گزینه ۱ درست است.

Z_1 و Z_2 ، جریان یکسانی دارند و $R_2 = 2R_1$ است، پس توان متوسط Z_2 دو برابر توان متوسط Z_1 خواهد بود ←
گزینه ۲ درست است.

جریان دو شاخه شامل Z_1 و $Z_2 + Z_3$ به صورت زیر است: