

الحمد لله
الرحمن
الرحيم



عنوان درس

سیگنال ها و سیستم ها



www.Mohebbii.ir



Mohebbii.ir@Gmail.com



[Mohebbiiir](https://www.t.me/Mohebbiiir)

استاد : دکتر سید محسن محبی

گروه : برق و کامپیوتر

دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرعباس

نیمسال اول ۱۴۰۴

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

فصل سوم

نمایش سری فوریه سیگنالهای متناوب

سری فوریه

• توابع مورد استفاده در مهندسی و توابع نمایان گر سیگنال ها معمولاً توابعی از زمان هستند با به عبارت دیگر توابعی هستند که در حوزه زمان تعریف شده اند.

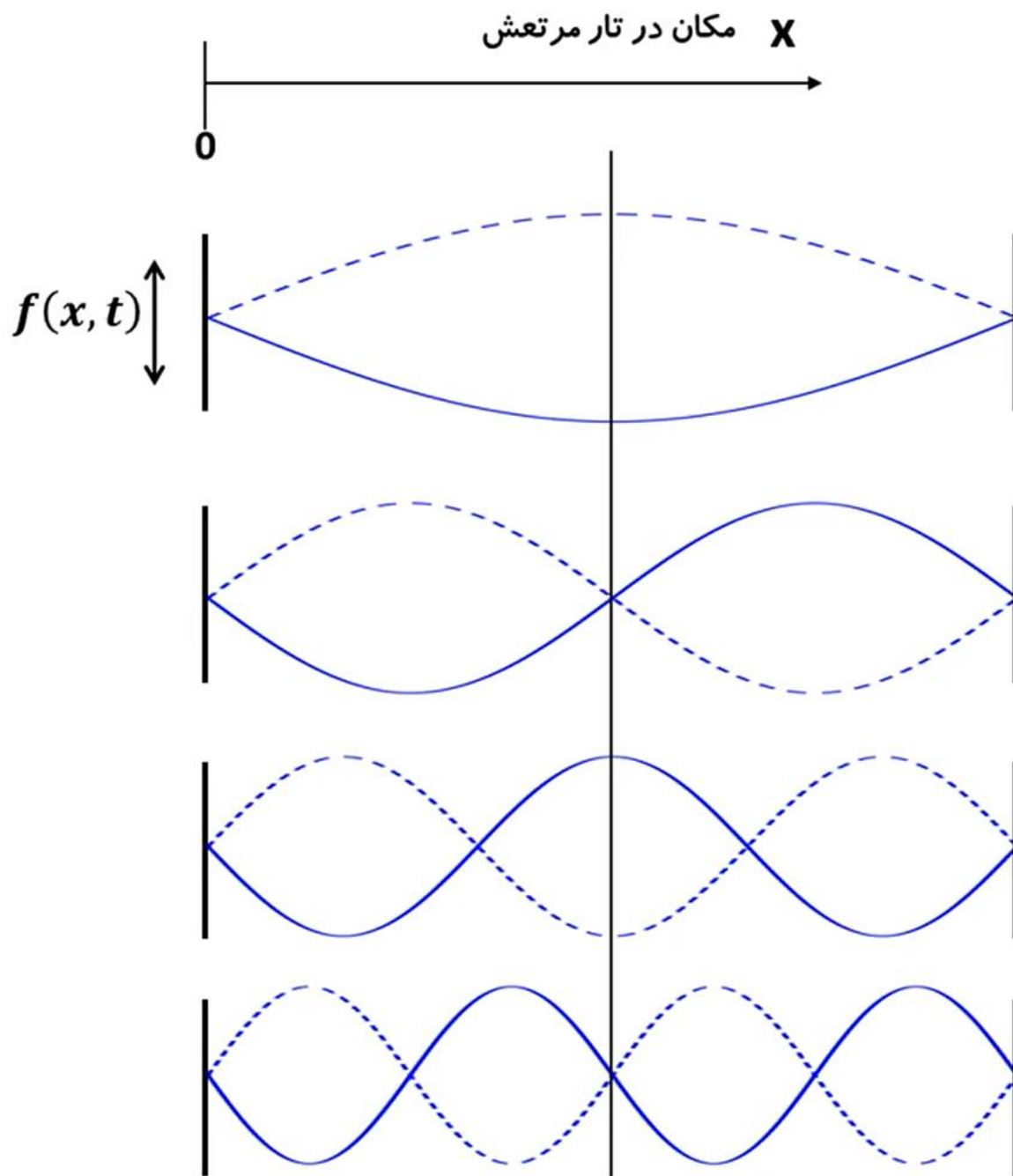
• برای حل بسیاری از مسائل، بهتر است که تابع در حوزه فرکانس تعریف شده باشد، زیرا این حوزه ویژگی هایی دارد که به راحتی محاسبات می انجامد.

تاریخچه سری فوریه

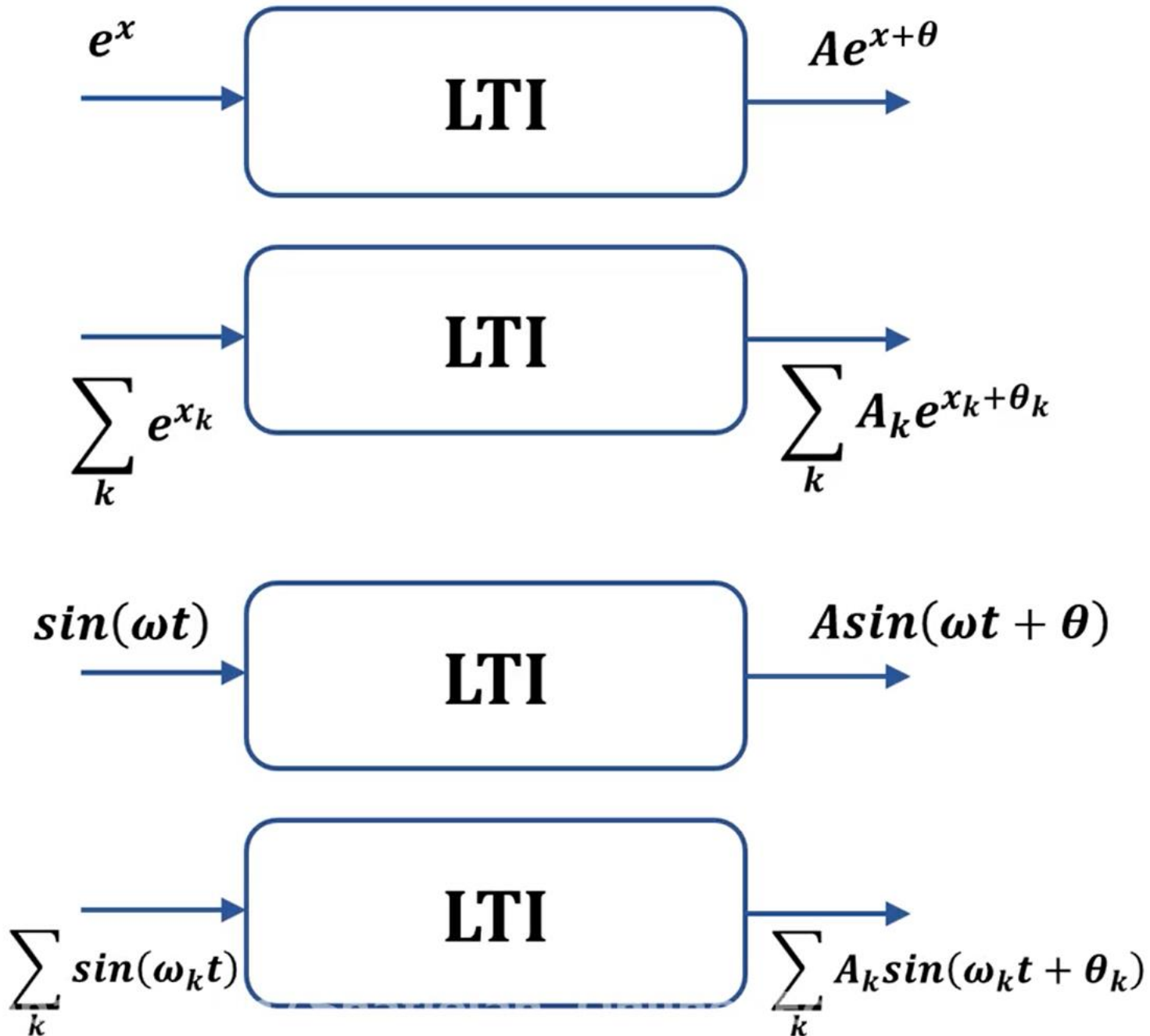


Leonhard Euler

Mathematician
(1707–1783)



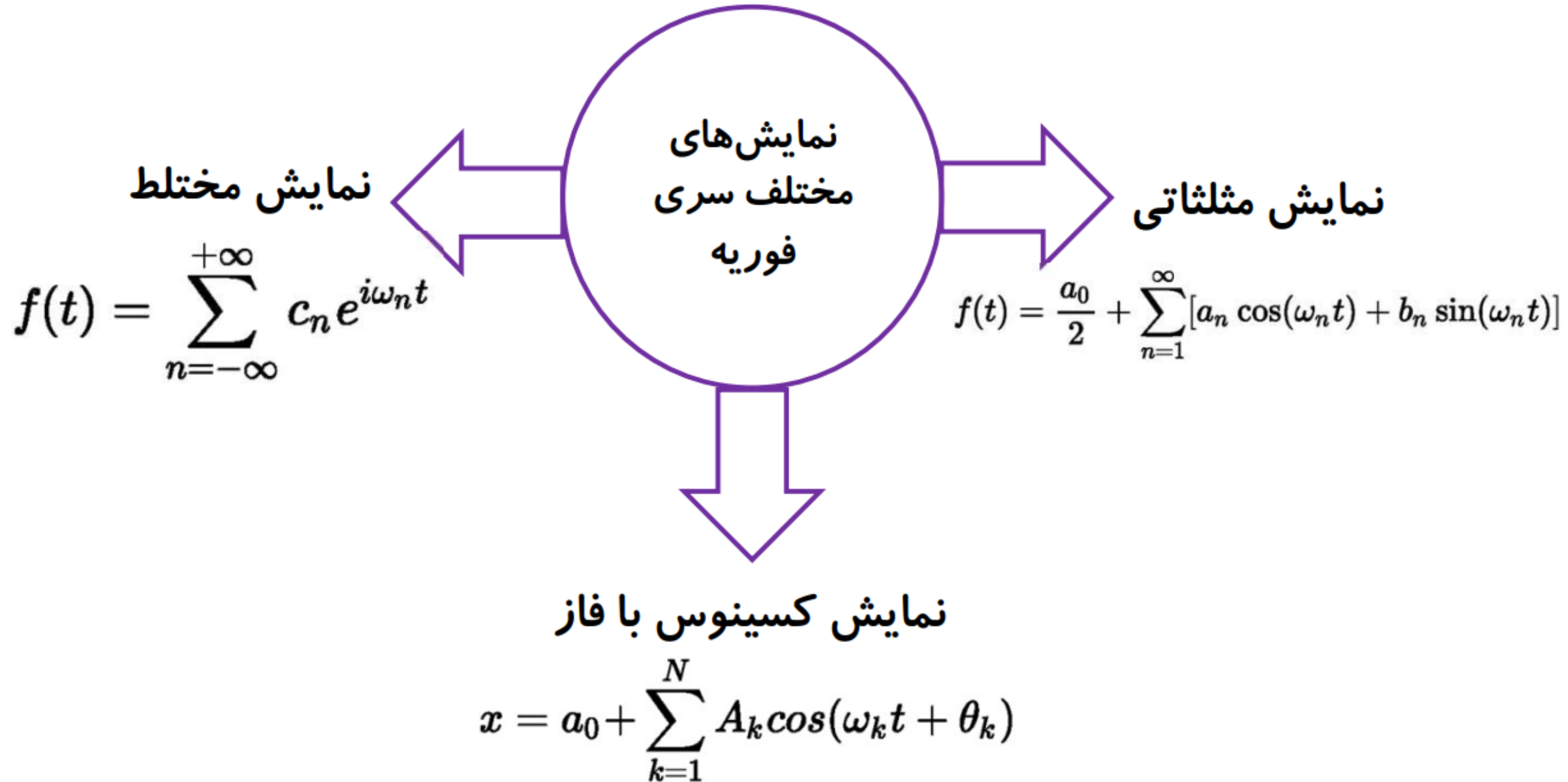
تاریخچه سری فوریه



Leonhard Euler

Mathematician
(1707–1783)

سری فوریه



ساختار کلی سری فوریه

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

سری فوریه

• فرض کنید تابعی به شکل زیر تعریف شده است:

$$f(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$$

A_k دامنه

N یک عدد صحیح مثبت

θ_k فاز تابع کسینوسی

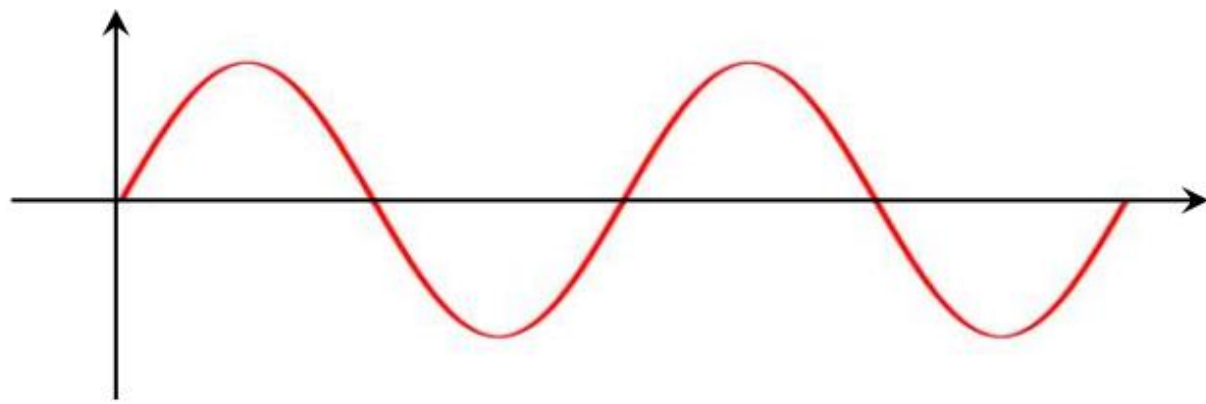
ω_k فرکانس زاویه‌ای ($\omega_k = 2\pi f_k$)

• مشاهده می‌شود که با در دست داشتن فرکانس‌های $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ ، دامنه‌های $A_1, A_2, \dots, A_N$ و

فازهای $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ تابع به‌طور کامل قابل تعریف است.

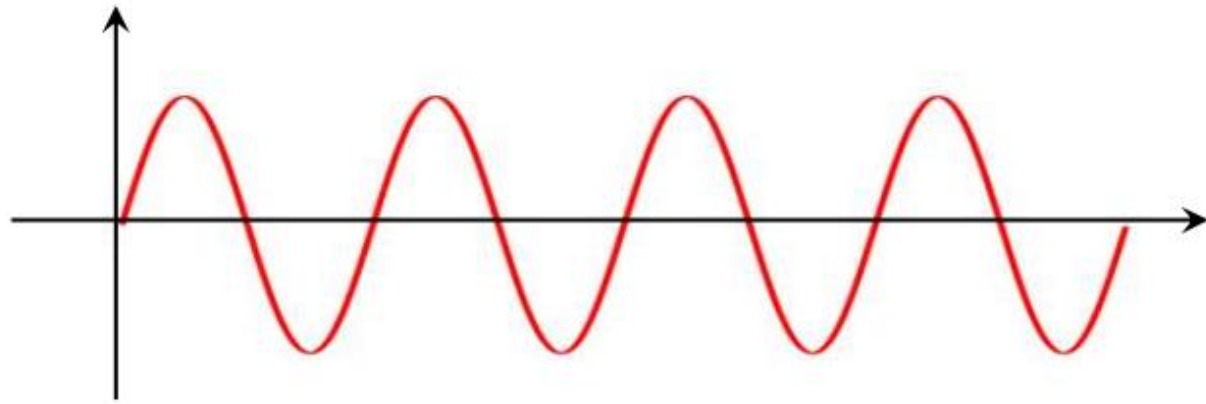
• توجه شود که گفته‌های بالا مستقل از زمان است.

سری فوریه



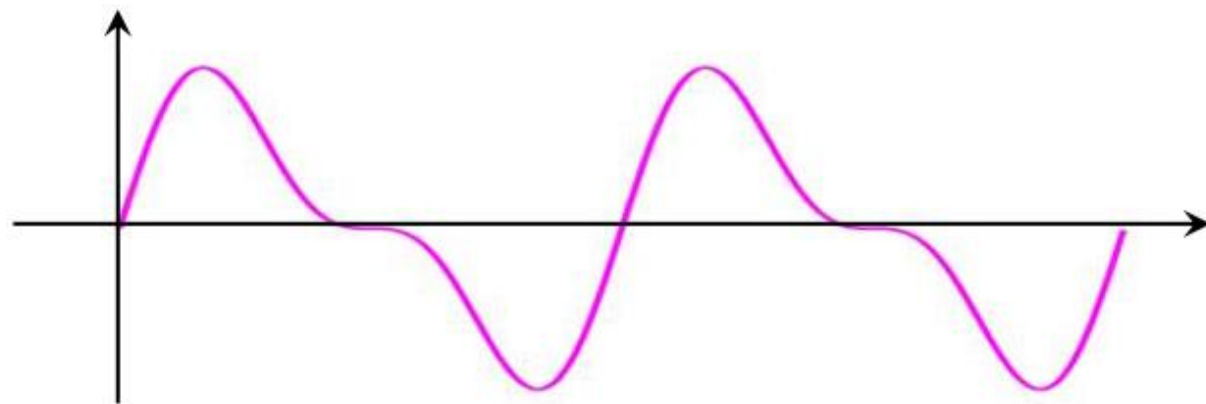
$\sin(x)$

+



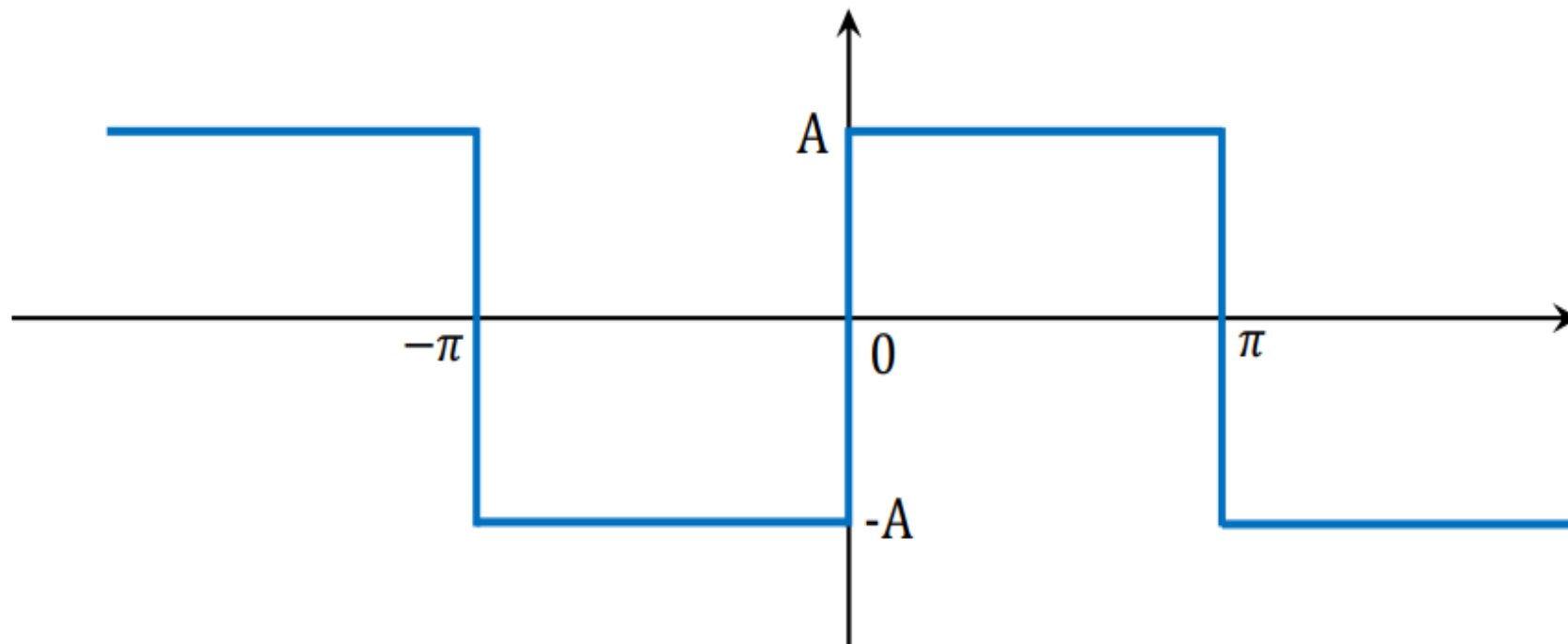
$\sin(2x)$

=

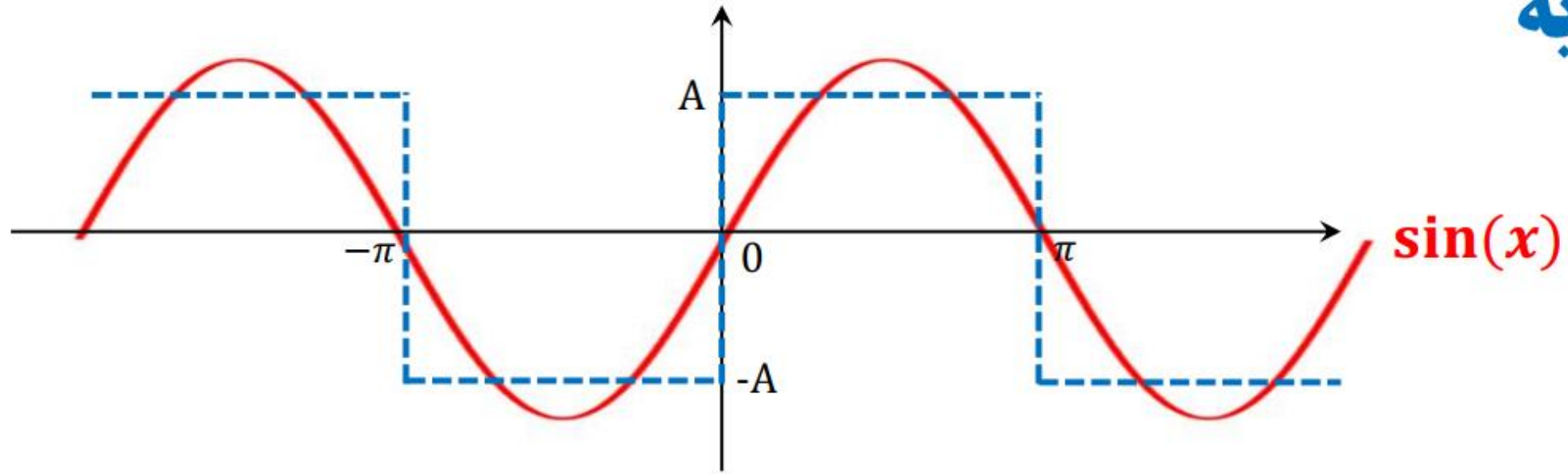


$\sin(x) + \sin(2x)$

سری فوریه

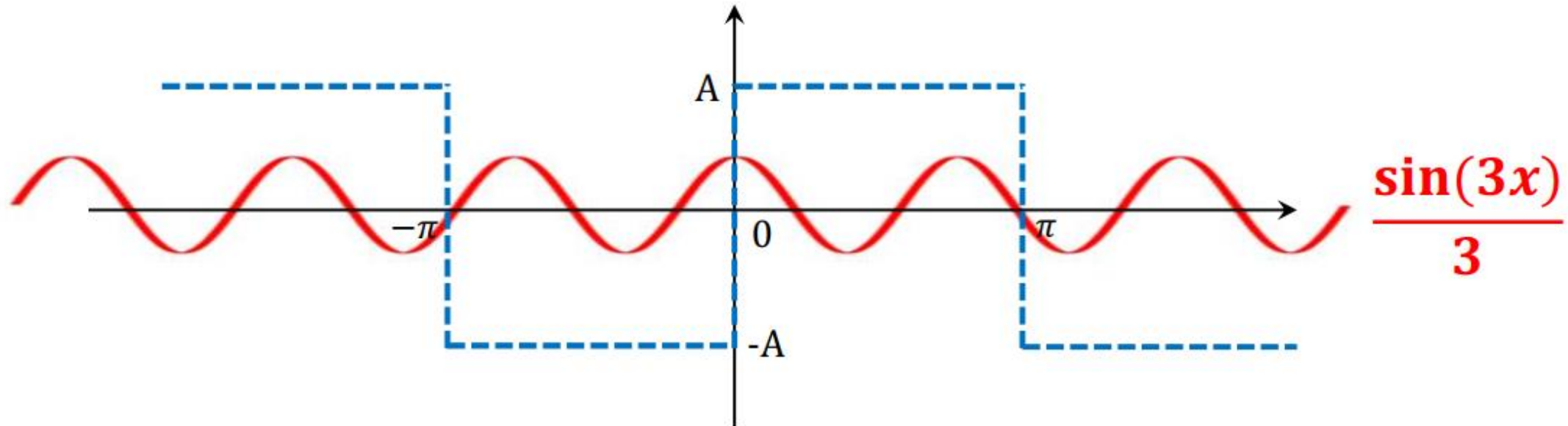


سری فوریه



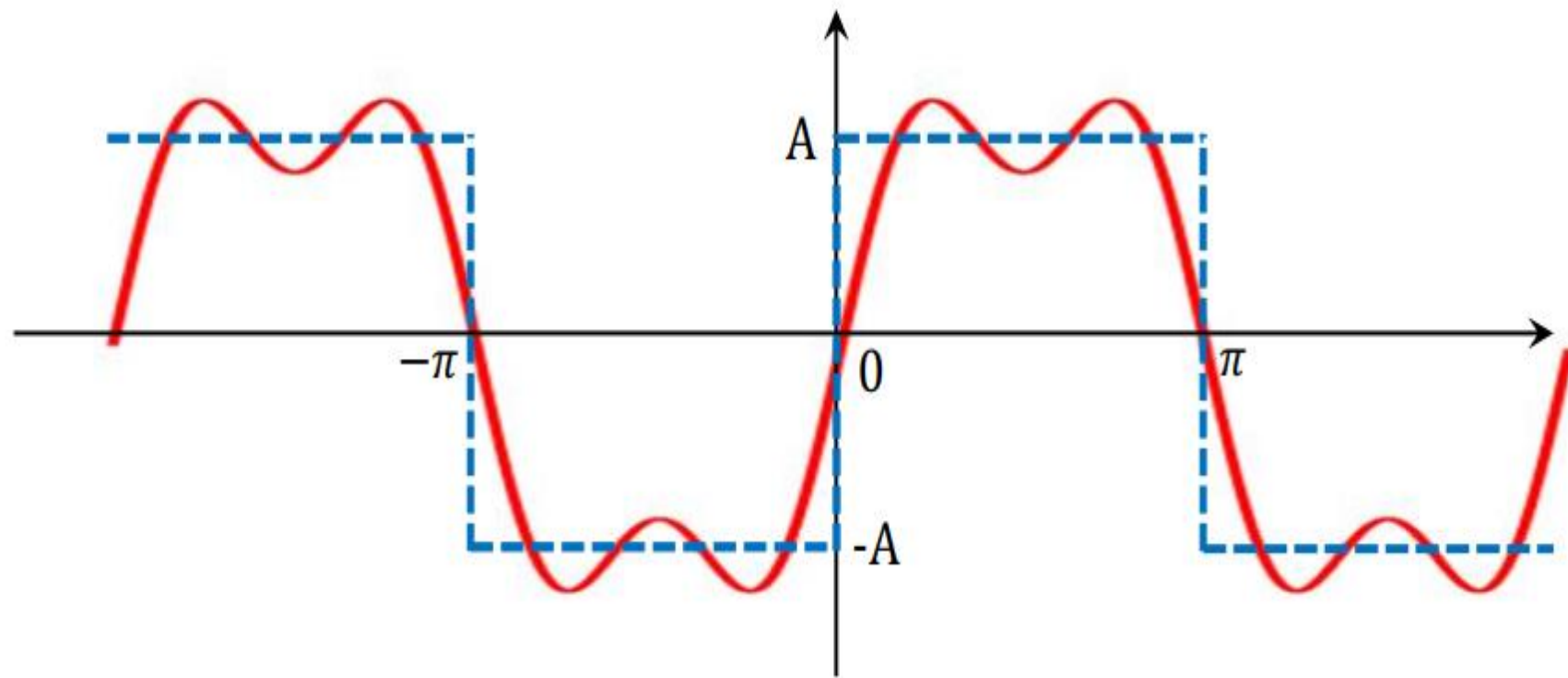
+

=



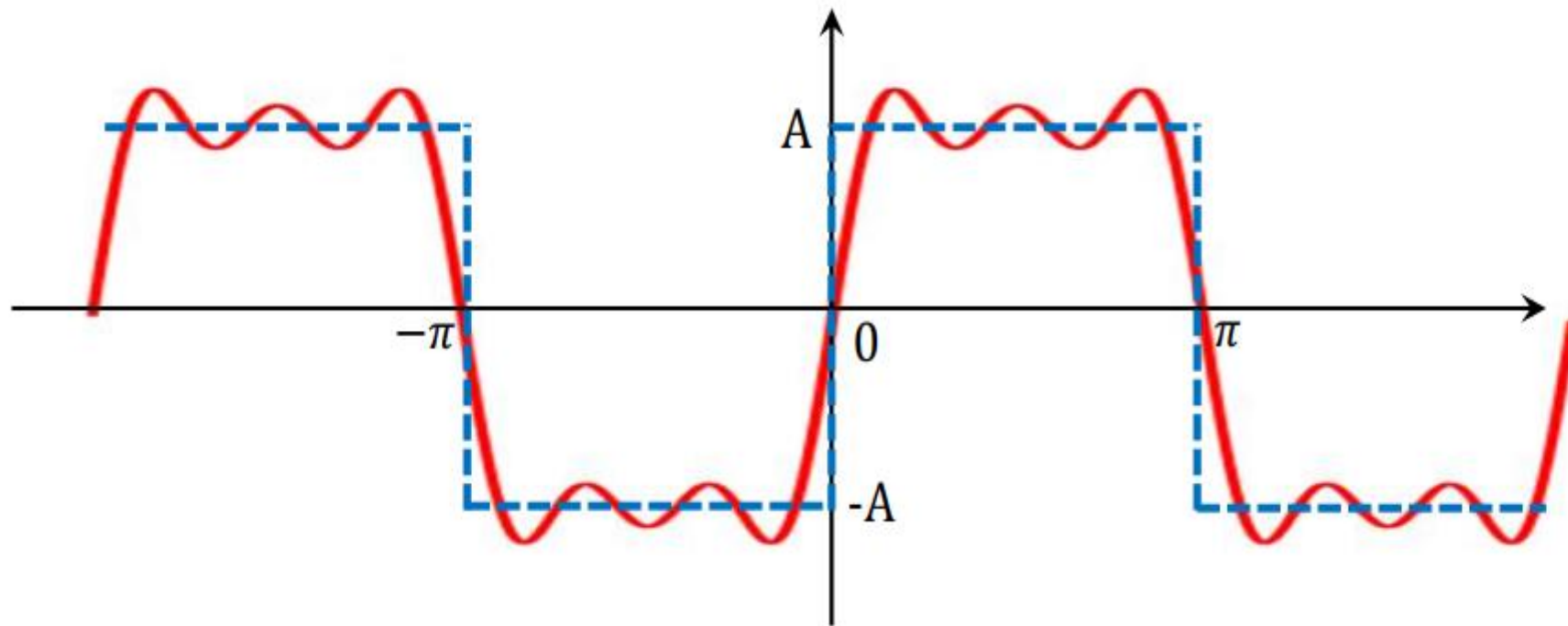
سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}$$



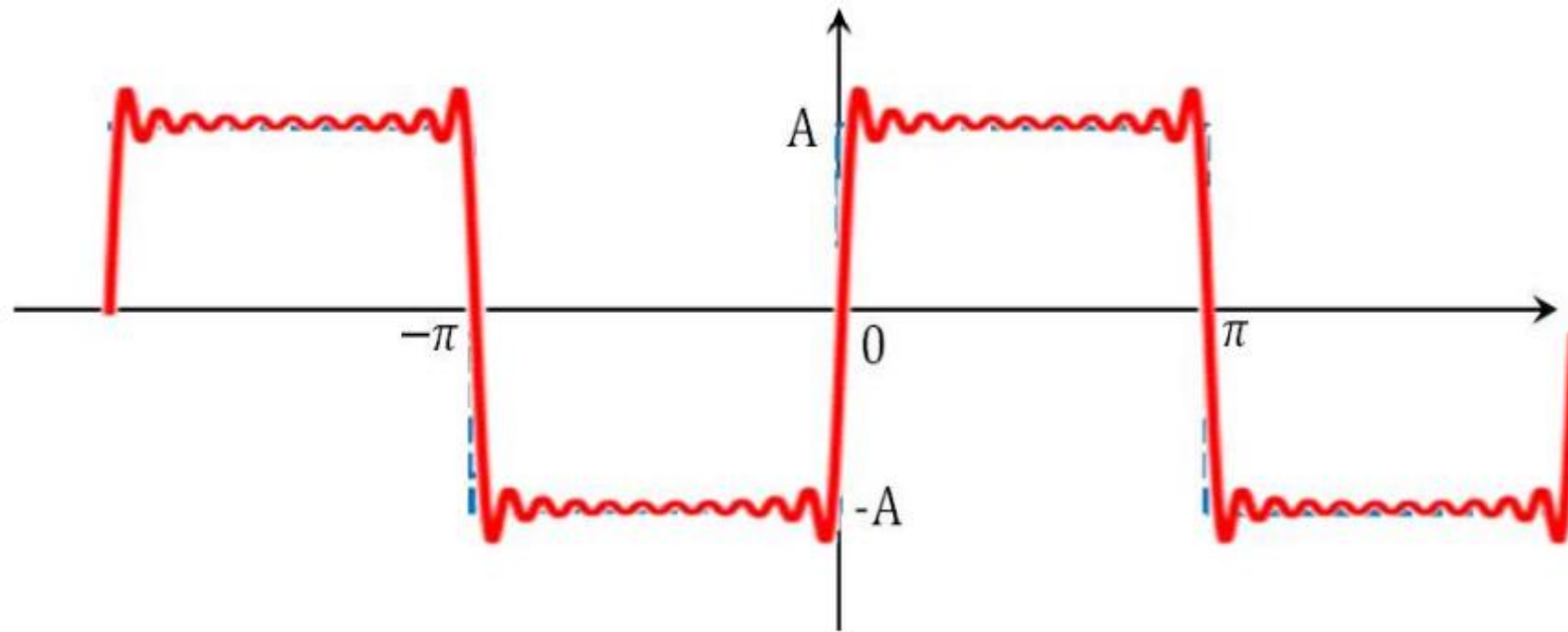
سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5}$$



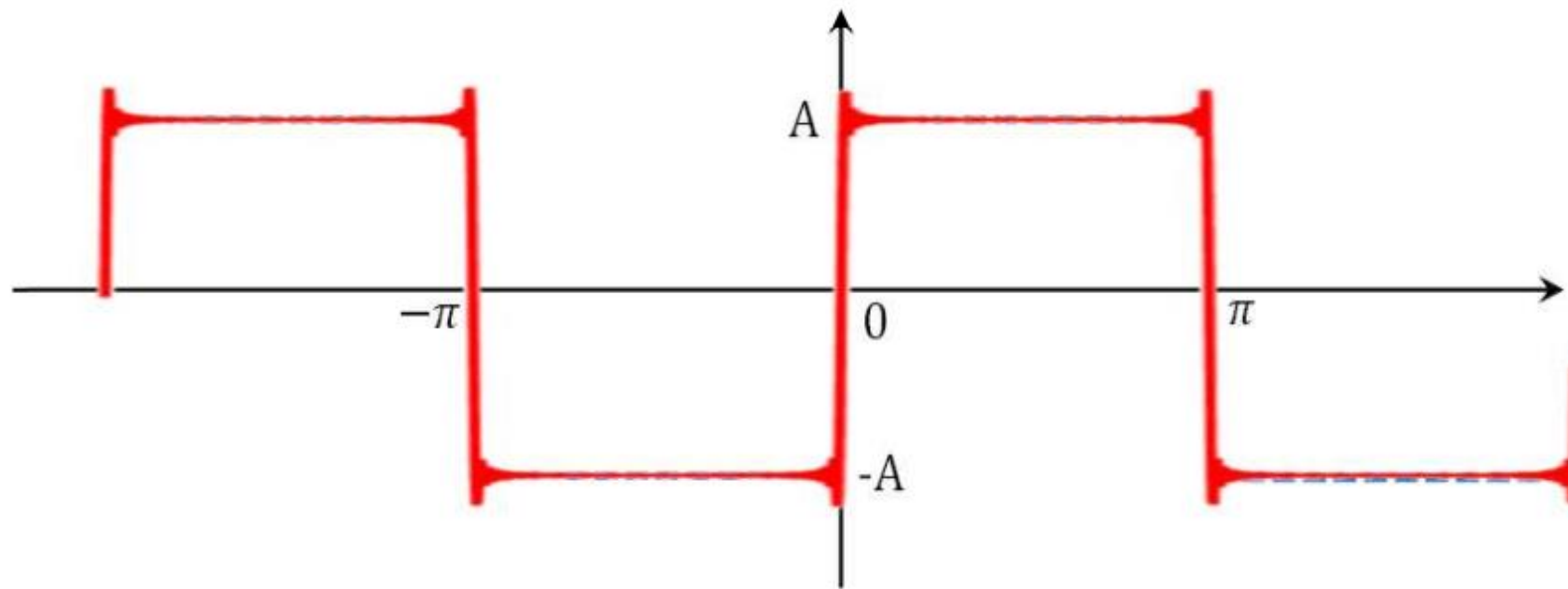
سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots + \frac{\sin(21x)}{21}$$



سری فوریه

$$\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots + \frac{\sin(99x)}{99}$$



۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

۳-۱- تعاریف

۳-۱-۱- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب است اگر $x(t) = x(t + T)$ ، $T > 0$ بوده و دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ کوچکترین مقدار مثبت غیر صفر T است که در رابطه بالا صدق می کند. $f = \frac{1}{T}$ فرکانس اصلی سیگنال خواهد بود.

مثال (۱)

$$x(t) = 2 \sin(3t) \Rightarrow \omega_0 = 3 , T = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{الف})$$

$$x(t) = 4 \cos(\sqrt{2}t) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2} , T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad (\text{ب})$$

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

۳-۱- تعاریف

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال

به طور کلی قانون خاصی برای این حالت وجود ندارد. در بعضی موارد اگر هر یک از سیگنال ها متناوب باشند حاصل جمع آنها نیز متناوب است و در بعضی موارد با وجود متناوب بودن هر یک از سیگنال ها، حاصل جمع آن ها متناوب نیست.

مثال (۲)

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} , \quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$= \pi , \quad = \frac{4\pi}{3}$$

$$= 3\pi , \quad = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$m = \frac{2\pi}{\pi} = 2 , \quad n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

الف

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

۳-۱- تعاریف

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال

به طور کلی قانون خاصی برای این حالت وجود ندارد. در بعضی موارد اگر هر یک از سیگنال ها متناوب باشند حاصل جمع آنها نیز متناوب است و در بعضی موارد با وجود متناوب بودن هر یک از سیگنال ها، حاصل جمع آن ها متناوب نیست.

مثال (۲)

$$x(t) = 2 \cos t + 4 \cos(\sqrt{2}t) \quad \text{ب}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

نتیجه: علیرغم متناوب بودن تک تک سیگنال های تشکیل دهنده $x(t)$ ، این سیگنال نامتناوب است.

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

تذکر: اگر $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ و دوره تناوب آن ها به ترتیب T_1 ، T_2 باشد، حاصل جمع دوسیگنال زمانی متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

توجه: n_1 ، n_2 باید اعداد صحیح مثبت و $\frac{n_1}{n_2}$ عدد کسری صحیح (گویا) باشد.

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصل ضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصل ضرب توابع به حاصل جمع دو توابع، دوره تناوب را به دست می آوریم (چنانچه دوره تناوب را در همان حالتی که در هم ضرب شده محاسبه کنیم، دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلی سیگنال نباشد).

۲- چنانچه سیگنال حاصل ضرب قابل تبدیل به حاصل جمع نبود، با توجه به رابطه $z(t)=x(t).y(t)$ ، $z(t)=z(t+T)$ دوره تناوب $z(t)$ را در صورت وجود محاسبه می کنیم.

فرمول‌های پایه

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan(x) = \frac{1}{\cot x}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

فیثاغورس

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$$

$$\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$$

زاویه دو برابر

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

جمع و تفاضل دو زاویه

$\sin(s + t) = \sin(s) \cos(t) + \cos(s) \sin(t)$	$\sin(s - t) = \sin(s) \cos(t) - \cos(s) \sin(t)$
$\cos(s + t) = \cos(s) \cos(t) - \sin(s) \sin(t)$	$\cos(s - t) = \cos(s) \cos(t) + \sin(s) \sin(t)$
$\tan(s + t) = \frac{\tan(s) + \tan(t)}{1 - \tan(s) \tan(t)}$	$\tan(s - t) = \frac{\tan(s) - \tan(t)}{1 + \tan(s) \tan(t)}$

تبدیل ضرب به جمع

$\cos(s) \cos(t) = \frac{\cos(s - t) + \cos(s + t)}{2}$	$\sin(s) \cos(t) = \frac{\sin(s + t) + \sin(s - t)}{2}$
$\sin(s) \sin(t) = \frac{\cos(s - t) - \cos(s + t)}{2}$	$\cos(s) \sin(t) = \frac{\sin(s + t) - \sin(s - t)}{2}$

تبدیل جمع به ضرب

$\sin s + \sin t = 2 \sin\left(\frac{s + t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{s - t}{2}\right)$	$\sin s - \sin t = 2 \sin\left(\frac{s - t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{s + t}{2}\right)$
$\cos s + \cos t = 2 \cos\left(\frac{s + t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{s - t}{2}\right)$	$\cos s - \cos t = -2 \sin\left(\frac{s + t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{s - t}{2}\right)$

زاویه سه برابر

$$\sin(3x) = -\sin^3(x) + 3\cos^2(x)\sin(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$$

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$$

$$\cot(3x) = \frac{3\cot(x) - \cot^3(x)}{1 - 3\cot^2(x)}$$

برد توابع مثلثاتی

$$\sin(x): -1 \leq y \leq 1$$

$$\cot(x): -\infty < y < +\infty$$

$$\cos(x): -1 \leq y \leq 1$$

$$\csc(x): -\infty < y \leq -1 \cup 1 < y \leq \infty$$

$$\tan(x): -\infty < y < +\infty$$

$$\sec(x): -\infty < y \leq -1 \cup 1 < y \leq \infty$$

سری فوریه : هدف از سری فوریه را میتوان نوشتن سیگنال ها بر حسب توابع نمایی بیان کرد که در کنار این کار خواص جالبی برای این ضرایب معرفی میشوند که در ادامه آنها را به تفصیل بیان میکنیم.

اگر سیگنال $x(t)$ را داشته باشیم میتوانیم **ضرایب سری فوریه** را برای آن به صورت زیر به دست بیاوریم و مجدداً **سیگنال** را بر حسب این ضرایب سری فوریه بنویسیم.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t}$$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{b}_k e^{+jk\frac{2\pi}{N}n}$$

خاصیت شیفت سری فوریه :

$$x(t) \rightarrow a_k$$

$$x(t - t_0) \rightarrow ?$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \xrightarrow{x(t) \rightarrow x(t-t_0)} b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0(t-t_0)} dt$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0(t-t_0)} dt = e^{+jk\omega_0(t_0)} \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

خاصیت شیفت سری فوریه :

$$x(t) \rightarrow a_k$$

$$x(t - t_0) \rightarrow ?$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \xrightarrow{x(t) \rightarrow x(t-t_0)} b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0(t-t_0)} dt$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0(t-t_0)} dt = e^{+jk\omega_0(t_0)} \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow b_k = a_k e^{-jk\omega_0(t_0)}$$

$$b_k = \text{ضرایب سری فوریه } x(t - t_0)$$

- سیگنال نمایی موهومی هنگامی که با خود سیگنال در یک سمت رابطه باشند با توان منفی و هنگامی که با ضرایب سری فوریه در یک سمت رابطه باشند با توان مثبت ظاهر می‌شود. به تفاوت متغیرهای مستقل نیز در دو سمت روابط دقت کنید.

$$\underbrace{x(t)}_{\text{متغیر مستقل: } t} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{+jk\omega_0 t}}_{\text{متغیر مستقل: } k}$$

$$\underbrace{a_k}_{\text{متغیر مستقل: } k} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}_{\text{متغیر مستقل: } t}$$

$$\underbrace{x[n]}_{\text{متغیر مستقل: } n} = \underbrace{\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{+jk\omega_0 n}}_{\text{متغیر مستقل: } k}$$

$$\underbrace{a_k}_{\text{متغیر مستقل: } k} = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}}_{\text{متغیر مستقل: } n}$$

- رابطه بین سیگنال و ضرایب سری فوریه را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{\text{F.S.}} a_k & a_k &\xleftrightarrow{\text{F.S.}^{-1}} x(t) \\ x[n] &\xleftrightarrow{\text{F.S.}} a_k & a_k &\xleftrightarrow{\text{F.S.}^{-1}} x[n] \end{aligned}$$

- بهتر است روابط بسط سری فوریه و آنالیز سری فوریه را به صورت زیر در فرم بیانی به خاطر بسپارید.

	CT	DT
رابطه بسط سری فوریه	سیگنال = $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{ضرایب} e^{jk\omega_0 t}$	سیگنال = $\sum_{k=\langle N \rangle} \text{ضرایب} e^{jk\omega_0 n}$
رابطه ضرایب سری فوریه	ضرایب = $\frac{1}{T} \int_T \text{سیگنال} e^{-jk\omega_0 t} dt$	ضرایب = $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \text{سیگنال} e^{-jk\omega_0 n}$

در نمایش سری فوریه سیگنال‌ها همواره دو رابطه مطرح است. رابطه بسط سری فوریه و رابطه ضرایب سری فوریه. رابطه بسط سری فوریه، یک سیگنال زمانی متناوب را برحسب فرکانس‌های $k\omega_0$ یعنی سیگنال‌های نمایی موهومی $(e^{jk\omega_0 n} / e^{jk\omega_0 t})$ بسط می‌دهد و رابطه ضرایب سری فوریه، مؤلفه‌های فرکانسی سیگنال زمانی را در فرکانس‌های $k\omega_0$ به‌دست می‌آورد. به این مؤلفه‌های فرکانسی، ضرایب سری فوریه گفته می‌شود و آن را با a_k نشان می‌دهیم. این روابط در حالت زمان پیوسته و گسسته به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

	CT	DT
رابطه بسط سری فوریه	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$
رابطه ضرایب سری فوریه	$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

مثال (۳)

$$z(t) = e^{j6t} \cos(10t) \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{3\pi}{3} = \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \\ &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= \frac{5\pi}{5} = \pi$$

$$\Rightarrow T = \pi$$

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

مثال ۳

$$T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad T_2 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

الف

$$z(t) = e^{j6t} \cos(10t)$$

$$z(t) = x_1(t) x_2(t)$$

$$x_1(t) = e^{j6t}$$

$$x_2(t) = \cos(10t)$$

$$x_1(t) = \cos(6t) + j \sin(6t)$$

$$z(t) = [\cos(6t) + j \sin(6t)] \cos(10t)$$

$$z(t) = \cos(6t) \cos(10t) + j \sin(6t) \cos(10t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \end{cases}$$

$$z(t) = \frac{1}{2} [\cos(16t) + \cos(4t)] + \frac{j}{2} [\sin(16t) - \sin(4t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(16t) + j \sin(16t)}{e^{j16t}} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(4t) - j \sin(4t)}{e^{j4t}} \right]$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{3\pi}{3} = \pi$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{2\pi}{5}$$

:

$$= \frac{5\pi}{5} = \pi$$

$$\Rightarrow T = \pi$$

$$LCM(T_1, T_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1(t) x_2(t) = z(t)$$

سیگنال‌های تشکیل‌دهنده:

$$j^{6t} e = x_1(t)$$

$$\cos(10t) = x_2(t)$$

نوشتن $x_1(t)$ به صورت اویلری:

$$j \sin(6t) + \cos(6t) = x_1(t)$$

گسترش سیگنال حاصل:

$$j \sin(6t) [\cos(10t) + \cos(6t)] = z(t)$$

استفاده از اتحادهای مثلثاتی:

$$[(\beta - \cos(\alpha) + (\beta + \cos(\alpha)] \frac{1}{2} = \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

$$[(\beta - \sin(\alpha) + (\beta + \sin(\alpha)] \frac{1}{2} = \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

ادامه‌ی بسط:

$$j \frac{1}{2} [\sin(16t) + \sin(4t)] + [\cos(16t) + \cos(4t)] \frac{1}{2} = z(t)$$

تبدیل به فرم نمایی:

$$j^{16t} e = j \sin(16t) + \cos(16t)$$

$$j^{4t} e = j \sin(4t) + \cos(4t)$$

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

$$z(t) = e^{j6t} \cos(10t), \cos(10t) = \frac{1}{2} [e^{j10t} + e^{-j10t}] \quad \text{ادامه مثال ۳: ب)}$$

$$z(t) = e^{j6t} \cdot \frac{1}{2} (e^{j10t} + e^{-j10t}) = \frac{1}{2} e^{j16t} + \frac{1}{2} e^{-j4t}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{8}$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

$$= \frac{4\pi}{8}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

همان طور که ملاحظه می شود، دوره تناوب محاسبه شده از حاصل ضرب دو سیگنال (π) دوره تناوب اصلی سیگنال یا کوچکترین دوره تناوب سیگنال ($\frac{\pi}{2}$) نمی باشد.

قضیه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آن گاه با توجه به $f(t) = f(t+T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست.

$$f(t) = \cos(t) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T = 4\pi = 6\pi = \dots \quad \text{مثال (۴) الف -}$$

$$g(t) = f^3(t) \Rightarrow g(t) = \cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3}$$

همان اتحاد را بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos^3(t) = \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t)$$

حالا طرفین را مرتب می‌کنیم:

$$\cos^3(t) - \frac{1}{4} \cos(3t) = \frac{3}{4} \cos(t)$$

و در نهایت:

$$\frac{\cos^3(t)}{1} - \frac{1}{4} \cos(3t) = \frac{3}{4} \cos(t)$$

که برابر است با:

$$\cos^3(t) = \frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{4} \cos(3t)$$

سؤال:
 $x(t) = \sin^2(2t)$ را در نظر بگیرید.

$$T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad (T = \pi)$$

الف) دوره تناوب سیگنال را تعیین کنید.
ب) ضرایب سری فوریه سیگنال را بدست آورید.

$$x(t) = \left(\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{j2} \right)^2$$

$$= \frac{e^{j4t} + e^{-j4t} - 2}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^{j2t} + e^{-j2t})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad a_1 = -\frac{1}{4} \quad a_{-1} = -\frac{1}{4}$$

سیستم زمان پیوسته و خطی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$
را در دو حالت زیر در نظر بگیرید.

$$x(t) = e^{j2t} \longrightarrow \text{sys.} \longrightarrow y(t) = e^{j3t}$$

$$x(t) = e^{-j2t} \longrightarrow \text{sys.} \longrightarrow y(t) = e^{-j3t}$$

الف) پاسخ سیستم به ورودی

$$x(t) = \cos(2t)$$

را بیابید.

ب) پاسخ سیستم به ورودی

$$x(t) = \cos(2t - 1)$$

را بیابید.

(a)

$$x(t) = \cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^{-j3t} = \cos(3t)$$

(b)

$$x(t) = \cos(2t - 1) = \frac{1}{2}e^{j(2t-1)} + \frac{1}{2}e^{-j(2t-1)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^je^{-j2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{-j}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^je^{-j3t} = \cos(3t - 1)$$

۳-۱- سری فوریه سیگنال های پیوسته زمان متناوب

همان طور که ملاحظه می شود، دوره تناوب محاسبه شده از حاصل ضرب دو سیگنال (π) دوره تناوب اصلی سیگنال یا کوچکترین دوره تناوب سیگنال ($\frac{\pi}{2}$) نمی باشد.

قضیه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آن گاه با توجه به $f(t) = f(t+T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست.

ب-

$$\begin{aligned}g(t) &= \cos^4 t \\&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \\T_1 &= \frac{2\pi}{2}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{4\pi}{4}\end{aligned}$$

گام ۱ — استفاده از اتحاد مربع کسینوس

اتحاد پایه‌ای:

$$\cdot \frac{\cos(2x) + 1}{2} = \cos^2 x$$

پس برای $t = x$:

$$\cdot \frac{\cos(2t) + 1}{2} = \cos^2 t$$

گام ۳ — بازنویسی $\cos^2(2t)$

باز مجدداً از همان اتحاد استفاده می‌کنیم ولی با $2t = x$:

$$\cdot \frac{\cos(4t) + 1}{2} = \cos^2(2t)$$

پس داخلی براکت می‌شود:

$$\cdot \frac{\cos(4t) + 1}{2} + \cos(2t) 2 + 1$$

برای جمع‌زدن صورت‌ها، مخرج مشترک 2 می‌گیریم:

$$\frac{\cos(2t) + \cos(4t) 4 + 3}{2} = \frac{\cos(4t) + 1}{2} + \frac{\cos(2t) 4}{2} + \frac{2}{2} = \frac{\cos(4t) + 1}{2} + \cos(2t) 2 + 1$$

حالا کل عبارت:

$$\cdot \frac{\cos(2t) + \cos(4t) 4 + 3}{8} = \frac{\cos(2t) + \cos(4t) 4 + 3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \cos^4 t$$

گام ۲ — توان چهارم = مربع مربع

$$^2 \left(\frac{\cos(2t) + 1}{2} \right) = ^2 (\cos^2 t) = \cos^4 t$$

پس پیش از ساده‌سازی داریم:

$$(\cos^2(2t) + \cos(2t) 2 + 1) \frac{1}{4} = \cos^4 t$$

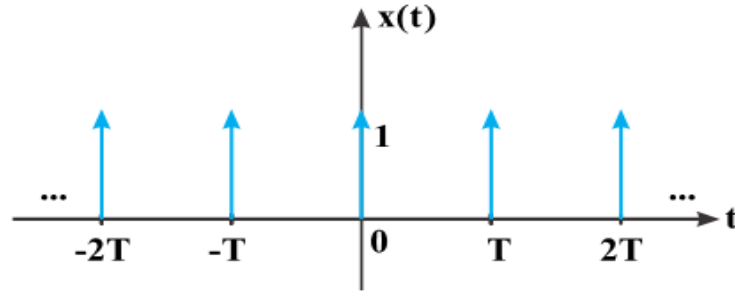
(توجه: بیرون از پرانتز ضریب $1/4$ است — این جای بسیاری از اشتباه‌هاست.)

گام ۴ — جدا کردن ضرایب نهایی

$$\cos(4t) \frac{1}{8} + \cos(2t) \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \cos(4t) \frac{1}{8} + \cos(2t) \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \cos^4 t$$

🔗 مثال ۱: ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (۱)$$



✓ پاسخ: $x(t)$ یک قطار ضربه پیوسته با دوره تناوب T است. به شکل آن توجه کنید.

حال به کمک رابطه ضرایب سری فوریه، a_k را محاسبه می‌کنیم. کران انتگرال باید در یک دوره تناوب باشد.

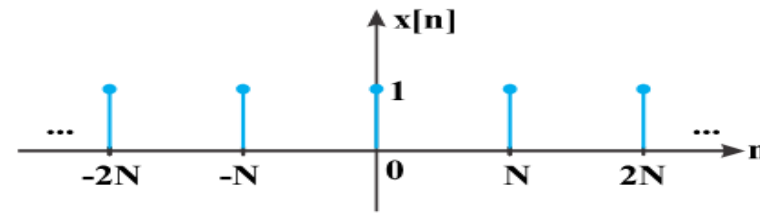
برای این منظور بازه $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ را در نظر می‌گیریم تا ضربه موجود در $t = 0$ داخل انتگرال قرار بگیرد.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0(0)} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \times 1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{T}$$

خاصیت غربالی

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \quad (۲)$$

✓ پاسخ: $x[n]$ نیز مانند مثال قبلی یک قطار ضربه گسسته با دوره تناوب N است.



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

کران سیگما را باید طوری در نظر گرفت که $(N-1 = \text{کران پایین} - \text{کران بالا})$ باشد. در این بازه فقط ضربه موجود در $n = 0$ داخل سیگما قرار می‌گیرد.

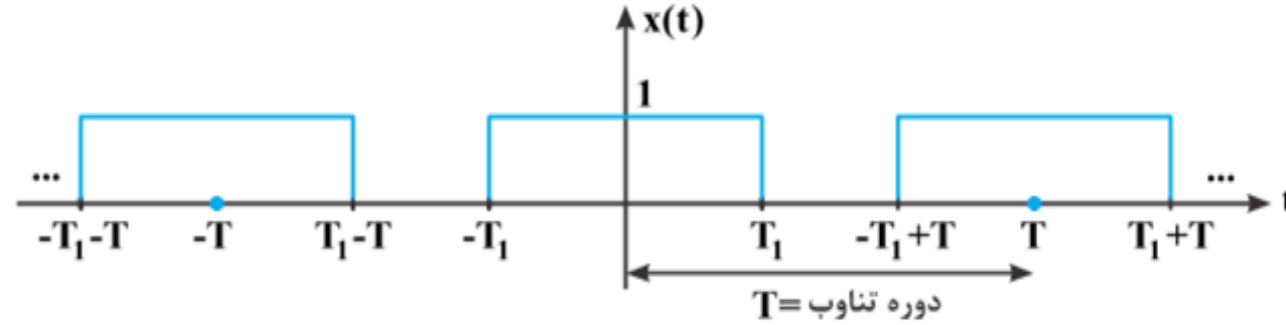
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\omega_0(0)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \Rightarrow a_k = \frac{1}{N}$$

n = 0

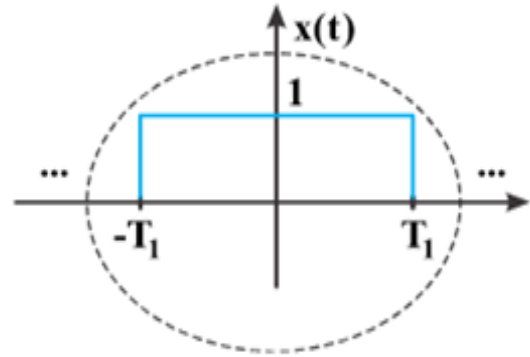
ضرایب سری فوریه قطار ضربه گسسته نیز مانند حالت پیوسته برابر با معکوس دوره تناوب است.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \prod\left(\frac{t-kT}{2T_1}\right), \quad T_1 < \frac{T}{2} \quad (3)$$

✓ پاسخ: $x(t)$ سیگنال مستطیلی متناوب پیوسته با دوره تناوب T است. به شکل این سیگنال توجه کنید:



برای محاسبه a_k کران انتگرال را باید به گونه‌ای انتخاب کرد که $(T = \text{کران پایین} - \text{کران بالا})$ شود. توجه کنید که نیازی به اتلاف وقت و به دست آوردن کران موردنظر نیست. بلکه کافی است یک دوره تناوب از $x(t)$ را داخل انتگرال قرار دهید. یک دوره تناوب از $x(t)$ طبق شکل آن، به صورت مقابل است:



یک دوره تناوب از $x(t)$ تنها در بازه $(-T_1, T_1)$ مقدار دارد که این مقدار برابر با یک است و در بقیه زمان‌ها صفر است. بنابراین کران انتگرال را $(-T_1, T_1)$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} (1) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \bigg|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{T} \frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T}} (e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}) \\ &= \frac{1}{-jk2\pi} (-2j) \left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right) \Rightarrow a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلی سیگنال زیر چیست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_0 = 1, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اوایلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4} e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

