

## فصل پنجم

### تبدیل فوریه سیستم‌های زمان گسسته

### ۵-۱- تعریف تبدیل فوریه زمان گسسته

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \quad , \quad X(j\Omega) = X(j(\Omega + 2k\pi)) = X(j(\Omega + 2\pi))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\Omega} \quad , \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega$$

### ۵-۲- خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

#### ۵-۲-۱- خطی بودن

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega)$$

$$\Rightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(j\Omega)$$

#### ۵-۲-۲- شیفت زمانی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega_0 n} X(j\Omega)$$

#### ۵-۲-۳- شیفت فرکانسی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n] e^{+j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

#### ۵-۲-۴- مزدوج گیری (تقارن مزدوج)

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$x[n]^* \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$$

سیگنال حقیقی و زوج  $\Rightarrow x[n]$  مطلقاً حقیقی و زوج خواهد بود  $X(j\Omega)$

سیگنال حقیقی و فرد  $\Rightarrow x[n]$  مطلقاً موهومی و فرد خواهد بود  $X(j\Omega)$

#### ۵-۲-۵- تفاضل گیری و مجموع گیری

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega}) X(j\Omega)$$

$$x[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega} X(j\Omega)$$

مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال  $y[n]$  را بدست آورید اگر:

$$Y(j\Omega) = ? \quad , \quad y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \quad , \quad y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

$$\begin{cases} y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \\ y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \end{cases} \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] \leftrightarrow Y(j\Omega)$$

$$y[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X(j\Omega) = Y(j\Omega) - e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(j\Omega)$$

#### ۵-۲-۶- تبدیل فوریه تابع پله و ضربه

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{f} 1$$

$$u[n] \xleftrightarrow{f} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + n\delta(\Omega)$$

#### ۵-۲-۷- وارون زمانی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[-n] \leftrightarrow X(-j\Omega)$$

#### ۵-۲-۸- گسترش زمانی

توجه: این خاصیت در گسسته برقرار نیست چون حاصل، یک سیگنال جدید است.

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[kn] \leftrightarrow ?$$

#### ۵-۲-۹- مشتق گیری در فرکانس

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow (jn)' x[n] \leftrightarrow \frac{d' X(j\Omega)}{d\Omega'}$$

#### ۵-۲-۱۰- ضرب و کانولوشن

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(j\Omega) X_2(j(\Omega - \theta)) d\theta$$

تذکر:  $\otimes$  (کانولوشن متناوب) با کانولوشن ساده برابر است با این تفاوت که فقط در یک دوره تناوب محاسبه می‌شود.

## ۵-۲-۱۱- دوگانی

توجه: در سیستم‌های زمان گسسته خاصیت دوگانی وجود ندارد چون  $n$  گسسته است اما  $\Omega$  پیوسته است.

مثال (۲)

$$\delta[n] \xrightarrow{f} 1$$

$$? \xleftarrow{F^{-1}} 2\pi\delta(\Omega)$$

## ۵-۲-۱۲- رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

## ۵-۳- تبدیل فوریه توابع متناوب

$$x[n] = x[n + N]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

مثال (۳) مطلوبست تبدیل فوریه توابع نمایی مختلط  $e^{\pm j\Omega_0 n}$ .

تبدیل فوریه این توابع با توجه به خواص محاسبه می‌شوند

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$e^{\pm j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega \mp \Omega_0)$$

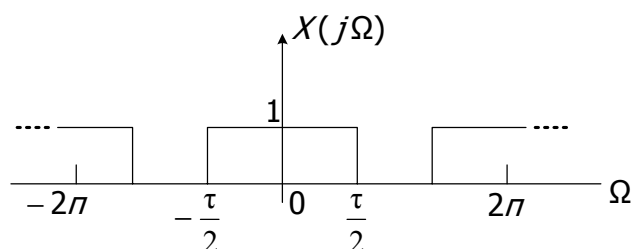
$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN)$$

مثال (۴) مطلوبست تبدیل فوریه قطار ضربه

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN) = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow P(j\Omega) = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{2\pi}{N} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

با توجه به متناوب بودن سیگنال قطار ضربه ابتدا سری فوریه آن را محاسبه و سپس تبدیل فوریه سیگنال را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۵) اگر  $X(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{\tau})$  مطلوبست  $x[n]=?$

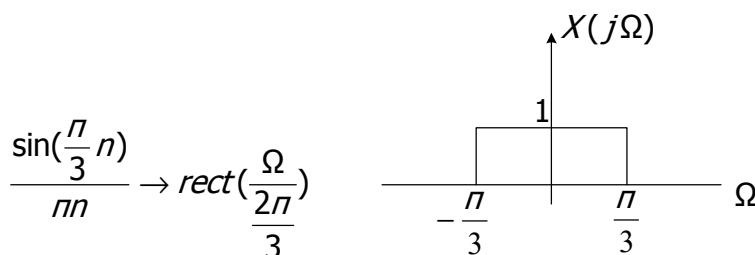


$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi n} (e^{j\frac{\tau}{2}n} - e^{-j\frac{\tau}{2}n}) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\tau})$$

مثال ۶)



$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{3}})$$

مثال ۷) با توجه به پاسخ ضربه  $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$  مطلوبست:

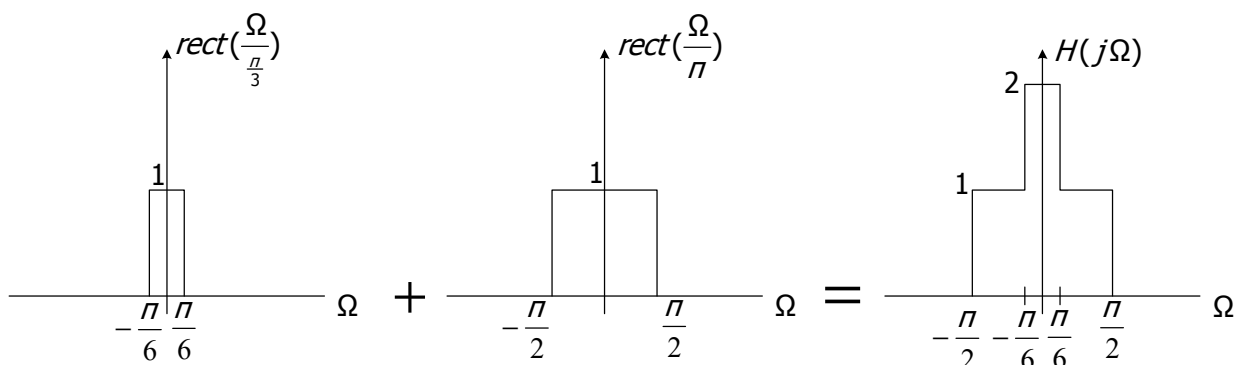
الف) پاسخ فرکانسی سیستم  $H(j\Omega)$

ب) خروجی  $y[n]$  اگر ورودی  $x[n] = 2 \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2 \cos(\frac{\pi}{4}n)$

حل الف:

$$\text{داريم } \frac{\sin(\frac{\tau}{2} n)}{n\pi} \leftrightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\tau}) \Rightarrow \begin{cases} \tau = \frac{\pi}{3}; & \frac{\sin(\frac{\pi}{6} n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) \\ \tau = \pi; & \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi}) \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6} n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = \text{rect}(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) + \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi})$$



حل ب:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

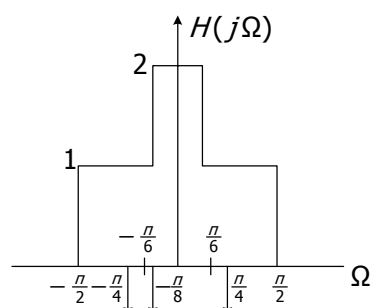
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{8}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega) = 2\pi \left( \frac{1}{2j} \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$Y(j\Omega) = 2\pi \left( \frac{1}{2j} H(j\frac{\pi}{8}) \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j} H(j(-\frac{\pi}{8})) \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - H(j\frac{\pi}{4}) \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) \right.$$

$$\left. - H(j(-\frac{\pi}{4})) \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) \right) = 2\pi \left( 2 \cdot \frac{1}{2j} \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - 2 \cdot \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$y[n] = 2 \sin(\frac{\pi}{8} n) - 2 \cos(\frac{\pi}{4} n)$$



يادآوری:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

$$x[n] = (-\alpha)^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

$$\begin{aligned} x[n] = \alpha^n u[-n] &\leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^0 \alpha^n \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 (\alpha^{-l} e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha^{-l} e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-l}| < 1 \not\Leftrightarrow |\alpha| > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] = (-\alpha)^n u[-n] &\leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^0 (-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 (-\alpha^{-l} e^{j\Omega})^n = \frac{1}{1 + \alpha^{-l} e^{j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-l}| < 1 \not\Leftrightarrow |\alpha| > 1 \end{aligned}$$

## ۵-۴- سیستم‌های LTI و تبدیل فوریه زمان پیوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad \begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ Y(j\omega) &= X(j\omega) \cdot H(j\omega) \end{aligned}$$

اتصال سری

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1} \longrightarrow \boxed{h_2} \longrightarrow y(t) \quad \begin{aligned} y(t) &= x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \\ h(t) &= h_1(t) * h_2(t) \\ H(j\omega) &= H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) \end{aligned}$$

اتصال موازی

$$x(t) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{h_1} \\ \boxed{h_2} \end{array} \right. \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow y(t) \quad \begin{aligned} y(t) &= x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) \\ h(t) &= h_1(t) + h_2(t) \\ H(j\omega) &= H_1(j\omega) + H_2(j\omega) \end{aligned}$$

مثال ۱) تبدیل فوریه تابع  $h(t) = \frac{\sin(t) \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$  را بدست آورید.

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t} = \frac{\sin(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n} \cdot n} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2n})}{\frac{t}{2n} \cdot 2n} = \frac{1}{2n} \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{2n}\right)$$

داریم  $\rightarrow \begin{cases} \text{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow a \text{sinc}(\frac{\omega}{n} \cdot \frac{\tau}{2}) \\ \tau \text{sinc}(\frac{t}{n} \cdot \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow 2n \text{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \end{cases}$



$$\tau = 2 \Rightarrow 2\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\tau = 1 \Rightarrow 1\text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)$$

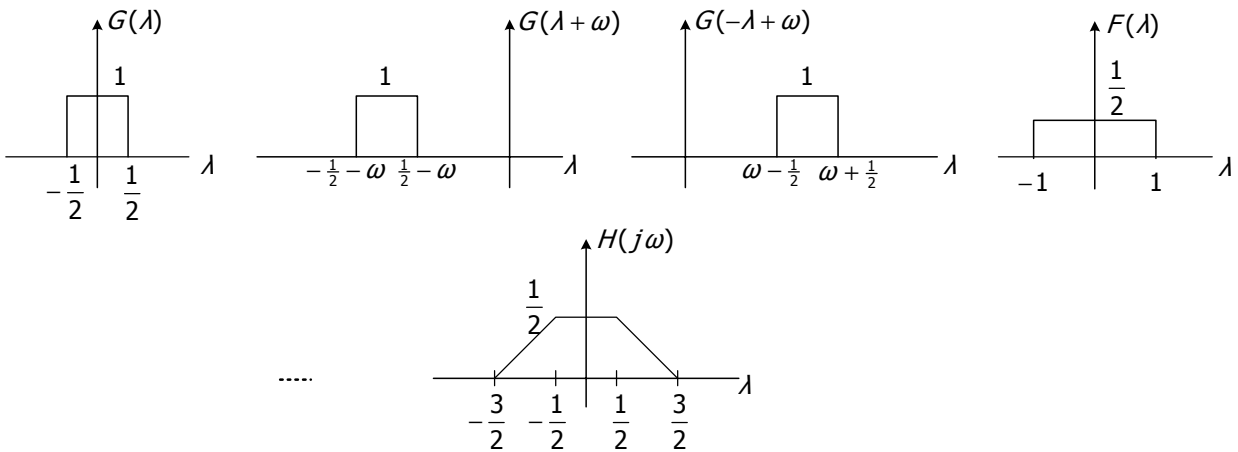
داریم

$$\rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)2} (\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) * 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)) = \frac{1}{2} \underbrace{\text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{F(\omega)} * \underbrace{\text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)}_{G(\omega)}$$

$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\omega - \lambda) d\lambda$$

از روش گرافیکی حل می‌کنیم:



مثال ۲) ورودی سیستم LTI و پاسخ ضربه سیستم در ذیل داده شده است. مطلوبست خروجی سیستم؟

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}, \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} = \frac{\omega_i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right), \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\omega_i \Rightarrow 2\omega_i \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right) \xrightarrow{f} 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) \\ \tau = 2\omega_c \Rightarrow 2\omega_c \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right) \xrightarrow{f} 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$

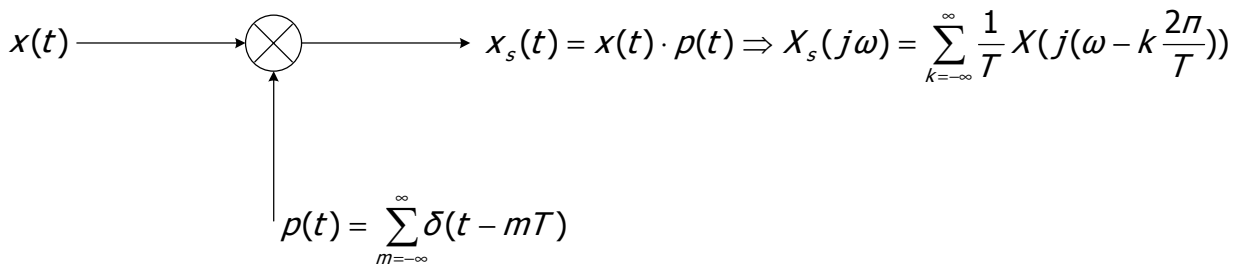
$$Y(j\omega) = \begin{cases} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) & ; \quad \omega_i < \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right) \\ \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) & ; \quad \omega_i > \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right) \end{cases}$$

مثال ۳) اگر  $p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$  باشد، مطلوبست  $X_s(j\omega)$  با استفاده از تئوری نمونه‌برداری؟

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(j\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

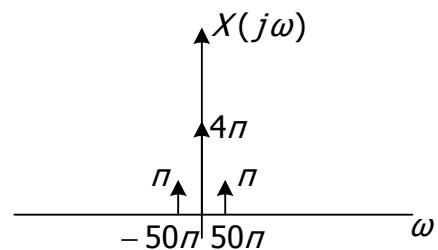
مثال ۴) از سیگنال  $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$  تحت شرایط زیر نمونه‌برداری می‌شود. مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال نمونه‌برداری شده  $X_s(j\omega)$  ؟



الف)  $T = \frac{1}{100}$

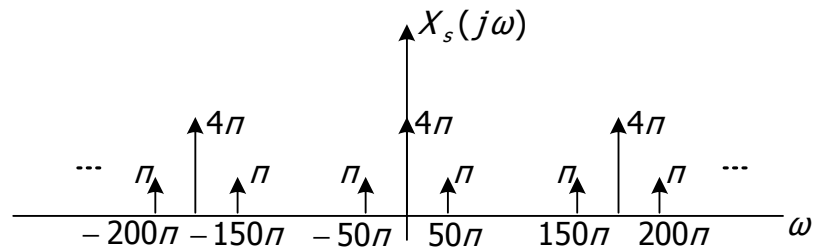
ب)  $T = \frac{1}{40}$

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 50\pi) + \pi\delta(\omega - 50\pi)$$



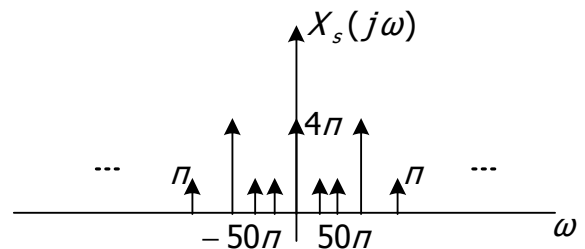
$$\frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$$

حل الف:



$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$

حل ب:



#### ۵-۴-۱- سیستم‌های LTI با معادلات دیفرانسیل

بدست آوردن  $h(t)$  دارای اهمیت زیادی است چون نشان دهنده رفتار تابع است.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

برای حل معادلات دیفرانسیل دو راه وجود دارد:

(۱) ابتدا  $h(t)$  را بدست آورده و سپس  $H(j\omega)$  که تبدیل فوری  $h(t)$  است را بدست می‌آوریم.

(۲) ابتدا  $H(j\omega)$  را بدست آورده و سپس  $h(t)$  را با عکس تبدیل فوری گرفتن از  $H(j\omega)$  بدست می‌آوریم.

مثال (۵) پاسخ سیستم LTI زیر به ورودی  $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$  داده شده است،

$$y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم  $H(j\omega)$

(ب) پاسخ ضربه  $h(t)$

(ج) معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ورودی و خروجی

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

حل الف:

$$X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} + \frac{1}{3 + j\omega}, \quad Y(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} - \frac{2}{4 + j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2 \left( \frac{3}{(1 + j\omega)(4 + j\omega)} \right)}{\frac{4 + 2j\omega}{(1 + j\omega)(3 + j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{3(3 + j\omega)}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

حل ب:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{3}{2}}{2 + j\omega} + \frac{\frac{3}{2}}{4 + j\omega} \Rightarrow h(t) = \frac{3}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

حل ج:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{9 + 3(j\omega)}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 9X(j\omega) + 3(j\omega)X(j\omega)$$

با توجه به خاصیت مشتق زمانی رابطه زیر بدست می آید:

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 3x'(t) + 9x(t)$$

مثال ۶) ورودی و خروجی یک سیستم LTI با معادله  $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2x(t)$  به هم مربوط می شوند. مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سیستم  $h(t)$

ب) اگر ورودی  $x(t) = te^{-2t}u(t)$  خروجی را بدست آورید.

حل الف:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} = \frac{1}{(j\omega + 2)} + \frac{-1}{(j\omega + 4)}$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

حل ب: چون  $x(t)$  و  $h(t)$  هر دو توابع پیچیده‌ای هستند به جای استفاده از کانولوشن می‌توان ابتدا تبدیل فوریه هر دو را بدست آورد سپس با عکس تبدیل فوریه گرفتن از  $Y(j\omega)$  پاسخ زمانی سیستم  $y(t)$  را بدست آورد.

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{2+j\omega} \right) = \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \left( \frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)} \right) = \dots$$

به روش تجزیه کسر ها  $Y(j\omega)$  بدست می‌آید و با استفاده از عکس تبدیل فوریه  $y(t)$  محاسبه خواهد شد.

مثال ۷) یک سیستم LTI و علی با پاسخ فرکانسی  $H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$  را در نظر بگیرید. برای یک ورودی خاص  $x(t)$

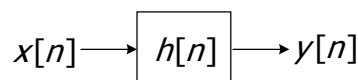
مشاهده می‌شود که خروجی به فرم  $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$  است.

مطلوبست ورودی  $x(t)$  ؟

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}}{\frac{1}{(3+j\omega)}} = \frac{1}{(4+j\omega)} \Leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

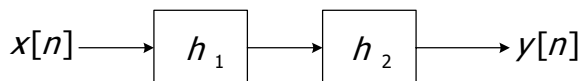
## ۵-۵- سیستم‌های LTI و تبدیل فوریه زمان گسسته



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

اتصال سری:

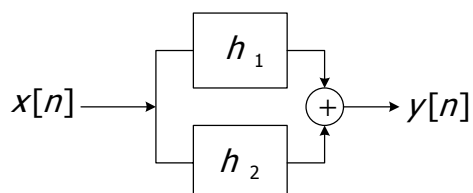


$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) \cdot H_2(j\Omega)$$

اتصال موازي:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)$$

### ۱-۵-۵- سیستم‌های LTI با معادلات تفاضلي

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال ۸) سیستم LTI زمان گسسته علي توصيف شده با معادله تفاضلي زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سیستم  $h[n]$ .

ب) پاسخ ضربه سیستم معکوس  $h_I[n]$ .

حل الف:

$$\begin{aligned}
Y(j\Omega) + e^{-j\Omega} Y(j\Omega) + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega} Y(j\Omega) &= e^{-j\Omega} X(j\Omega) - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega} X(j\Omega) \\
\Rightarrow (1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega}) Y(j\Omega) &= (e^{-j\Omega} - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega}) X(j\Omega) \\
H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} &= \frac{e^{-j\Omega} (1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} = \frac{e^{-j\Omega} (1 - (\frac{1}{2} e^{-j\Omega} + 1 - 1))}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} \\
&= \frac{e^{-j\Omega} - e^{-j\Omega} (1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}) + e^{-j\Omega}}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} = 2e^{-j\Omega} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} - \frac{e^{-j\Omega}}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2} \\
\Rightarrow h[n] &= 2(-2n - \frac{1}{2})^n u[n] - (-\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]
\end{aligned}$$

حل ب:

$$\begin{aligned}
h[n] * h_I[n] &= \delta[n] \leftrightarrow H(j\Omega) \cdot H_I(j\Omega) = 1 \\
H(j\Omega) &= \frac{e^{-j\Omega} (1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_I(j\Omega) &= \frac{(1 + \frac{1}{2} e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega} (1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega} (1 + \frac{1}{4} e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega})}{(1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{4} e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} \\
h_I[n] &= (\frac{1}{2})^{n+1} u[n+1] + \frac{1}{4} (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]
\end{aligned}$$

مثال ۹) در يك سيستم LTI و علي با توجه به پاسخ ضربه داده شده مطلوبست:

$$h[n] = a^{|n|}, \quad 0 < a < 1 \quad H(j\Omega) \text{ پاسخ فرکانسي}$$

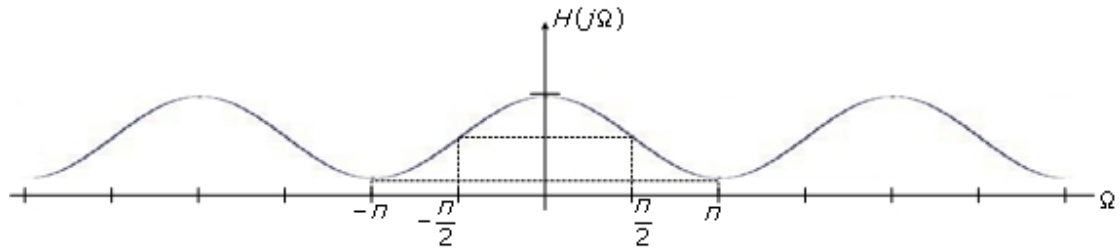
ب) نوع فیلتر.

حل الف:

$$\begin{aligned}
H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} \cdot e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (a e^{j\Omega})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\Omega})^n = \frac{a e^{j\Omega}}{1 - a e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} = \frac{a e^{j\Omega} (1 - a e^{-j\Omega}) + 1 - a e^{j\Omega}}{(1 - a e^{j\Omega})(1 - a e^{-j\Omega})} \\
&= \frac{1 - a^2}{a^2 + 1 - a e^{-j\Omega} - a e^{j\Omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\Omega)}
\end{aligned}$$

حل ب:

$$H(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} & \Omega = 0 \\ \frac{1-a^2}{(1-a)^2} & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1-a}{1+a} & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با توجه به شکل بدست آمده نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

*amir javedani malak*