

فصل سوم

سري فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۳-۱- تعاریف

۳-۱-۱- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب است اگر $x(t) = x(t + T)$ و $T > 0$ بوده و دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ کوچکترین مقدار مثبت

غیر صفر T است که در رابطه بالا صدق می‌کند. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ فرکانس اصلی سیگنال خواهد بود. (مثال ۱)

$$x(t) = 2 \sin(3t) \Rightarrow \omega_0 = 3, T = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{الف})$$

$$x(t) = 4 \cos(\sqrt{2}t) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \quad (\text{ب})$$

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال

به طور کلی قانون خاصی برای این حالت وجود ندارد. در بعضی موارد اگر هر یک از سیگنال‌ها متناوب باشند حاصل جمع آنها نیز متناوب است و در بعضی موارد با وجود متناوب بودن هر یک از سیگنال‌ها، حاصل جمع آنها متناوب نیست. (مثال ۲)

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t} \quad (\text{الف})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2}, T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$= 2\pi, = \frac{4\pi}{3}$$

$$= 3\pi, = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$m = \frac{2\pi}{\pi} = 2, n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

$$x(t) = 2 \cos t + 4 \cos(\sqrt{2}t) \quad (\text{ب})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

علیرغم متناوب بودن تک‌تک سیگنال‌های تشکیل‌دهنده $x(t)$ ، این سیگنال نامتناوب است.

تذکر: اگر $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ و دوره تناوب آنها به ترتیب T_1, T_2 باشد حاصل جمع دو سیگنال زمانی متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (n_1, n_2 \text{ باید اعداد صحیح مثبت و } n_2 \text{ عدد کسری صحیح (گویا) باشد})$$

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصلضرب توابع به حاصلجمع دو تابع، دوره تناوب را به دست می‌آوریم (چنانچه دوره تناوب را در همان حالتی که در هم ضرب شده محاسبه کنیم دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلی سیگنال نباشد).

۲- چنانچه سیگنال حاصلضرب قابل تبدیل به حاصلجمع نبود، با توجه به رابطه $z(t) = x(t) \cdot y(t)$ و $z(t) = z(t+T)$ دوره تناوب $z(t)$ را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم.

(مثال ۳)

$$z(t) = e^{j6t} \cos(10t) \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, & T_2 &= \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \\ &= \frac{2\pi}{3}, & &= \frac{2\pi}{5} \\ &= \frac{3\pi}{3} = \pi, & \vdots & \\ & & & \Rightarrow T = \pi \\ & & & = \frac{5\pi}{5} = \pi \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{j6t} \cdot \frac{1}{2}(e^{j10t} + e^{-j10t}) = \frac{1}{2}e^{j16t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}, & T_2 &= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2\pi}{8} \\ &= \frac{3\pi}{8} \\ &= \frac{4\pi}{8} \end{aligned} \quad \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود دوره تناوب محاسبه شده از حاصل ضرب دو سیگنال (n) دوره تناوب اصلی سیگنال یا

کوچکترین دوره تناوب سیگنال $\left(\frac{n}{2}\right)$ نمی‌باشد.

قضیه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t) = f(t+T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست.

(مثال ۴)

(الف)

$$f(t) = \cos(t) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T = 4\pi = 6\pi = \dots$$

$$g(t) = f^3(t) \Rightarrow g(t) = \cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3}$$

(ب)

$$g(t) = \cos^4 t$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t$$

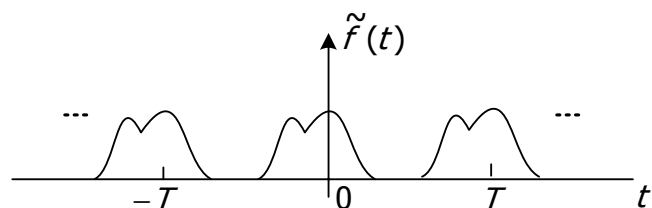
$$T_1 = \frac{2\pi}{2}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{4\pi}{4}$$

۳-۱-۴- روش نوشتن توابع به صورت پریودیک

اگر سیگنال در طی یک دوره تناوب (T) فرموله شود $(f(t))$ ، با استفاده از رابطه زیر سیگنال متناوب در کل زمان‌ها بیان

می‌شود $(\tilde{f}(t))$.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$$



۳-۲- سری فوریه زمان پیوسته

سری فوریه، تنها برای توابع متناوب بیان می‌شود، توابعی که دارای دوره تناوب

$$x(t) = x(t + T) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

اصلی می‌باشند. سری فوریه را به هر یک از دو فرم زیر می‌توان نمایش داد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

سؤال: چرا علاقمند هستیم که سیگنال متناوب را به صورت مجموعی از نمایی‌های مختلط نمایش دهیم؟

(۱) در صورت موفقیت، شناخت بهتری نسبت به سیگنال و محتوای فرکانسی آن به دست می‌آوریم. (در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از هارمونی‌ها بسط داد، می‌توان به این سوال که در یک سیگنال چه فرکانس‌هایی و با چه قدرتی وجود دارند را پاسخ داد.)

(۲) پاسخ سیستم LTI به نمایی مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ یا به طور کلی $e^{j\omega t}$ به فرم بسیار ساده‌ای تعریف می‌شود.

تذکر ۱: هرچه هارمونی‌ها بالاتر باشد فرکانس‌ها بالاتر است و برعکس هر چه هارمونی‌ها پایین‌تر باشد فرکانس‌ها پایین‌تر است.

تذکر ۲: اگر سیگنالی در هارمونی‌های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و برعکس اگر سیگنالی در هارمونی‌های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \Rightarrow T_1|_{k=\pm 1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad T_2|_{k=\pm 2} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \quad , \quad T_3|_{k=\pm 3} = \frac{2\pi}{3\omega_0} \quad , \dots$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلی سیگنال زیر چیست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad , \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_0 = 1 \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اوایلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4} e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \quad , \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

فرم دیگر سری فوریه (سیگنال‌های حقیقی):

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
&\stackrel{k \rightarrow -k}{\Rightarrow} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \\
&\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + (a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t})^*)
\end{aligned}$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{jk\omega_0 t}, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \quad \text{اگر } x(t) = x^*(t) \text{ باشد:}$$

$$\Rightarrow x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t} + (a_k e^{jk\omega_0 t})^*) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(a_k e^{jk\omega_0 t}), \quad a_k = A_k \cdot e^{j\theta_k}$$

$$\Rightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}(A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

۳-۲-۱- تعیین ضرایب سری فوریه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

طرفین رابطه بالا را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم و از طرفین رابطه روی یک دوره تناوب انتگرال می‌گیریم:

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt}_I$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + \frac{1}{T} \int_0^T j \sin(k-n)\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}
\end{aligned}$$

اگر $k=n$ باشد، مقدار I طبق اثبات برابر واحد شده که در نتیجه ضرایب سری فوریه از رابطه زیر بدست می‌آیند

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

۳-۲-۲- همگرایی سری فوریه

سؤال: سیگنال متناوب $x(t)$ تحت چه شرایطی دارای نمایش سری فوریه است؟

شرایط دیریکله:

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot x(t)^* dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

(۱) سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند:

۲) برای يك سیگنال متناوب که تعداد محدودی ناپیوستگی در هر دوره تناوب دارد، نمایش سری فوریه در همه جا به جز نقاط منفرد ناپیوستگی برابر سیگنال است و در نقاط ناپیوستگی سری به مقدار متوسط سیگنال در آن نقطه همگرا می‌شود. تذکر: در کلیه موارد عملی سری فوریه را می‌توان به کار برد. اما سیگنال‌هایی که شرایط دیریکله را ارضاء نمی‌کنند طبیعت نامعقولی دارند، در نتیجه عموماً در زمینه‌های عملی ظاهر نمی‌شوند.

مثال ۶

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \quad (\text{الف})$$

$$= 1 + (\frac{1}{2j} + 1) e^{j\omega_0 t} + (-\frac{1}{2j} + 1) e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1, a_1 = a_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j}, \quad a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j)$$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j} \quad (\text{ب})$$

تمرین: سیگنال زیر شامل چه هارمونی‌هایی است؟

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j10\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j10\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j11\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-j11\omega_0 t}$$

یادآوری:

اگر $x(t) = x(t + T)$ در این صورت سیگنال دارای سری فوریه است پس:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

"فرمول سنتز"

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt$$

"فرمول آنالیز"

تذکر ۱: مجموعه ضرایب $\{a_k\}$ را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ می‌نامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متناظر است.

تذکر ۲: ضریب a_0 مؤلفه DC یا ثابت سیگنال است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

مقدار متوسط

تمرین ۱: چه تفاوتی میان $u(t)$ و $u(2t)$ و $u(\frac{t}{2})$ وجود دارد؟

تمرین ۲: چه تفاوتی میان $u(t - T_0)$ و $u(2t - T_0)$ و $u(\frac{t}{2} - T_0)$ وجود دارد؟

۳-۳- خواص سری فوریه زمان پیوسته

۳-۳-۱- خطی بودن

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) &\xrightarrow{f_s} b_k \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ z(t) = Ax(t) + By(t) &\xrightarrow{f_s} z(t) = Aa_k + Bb_k \quad ; \quad z(t) = z(t + T_0) \end{aligned}$$

۳-۳-۲- انتقال زمانی

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) = x(t - t_0) &\xrightarrow{f_s} b_k = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} &\Rightarrow x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \end{aligned}$$

۳-۳-۳- وارون سازی زمانی

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) = x(-t) &\xrightarrow{f_s} b_k = a_{-k} \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} &\Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \end{aligned}$$

$$x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k} \quad (\text{الف})$$

$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k} \quad (\text{ب})$$

۳-۳-۴- تغییر مقیاس زمانی

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k ; \quad x(t) = x(t + T_0)$$

$$y(t) = x(at) \xrightarrow{f_s} a_k ; \quad y(t) = y(t + \frac{T_0}{a})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0/a})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jka\omega_0 t}$$

۳-۳-۵- مزدوج گیری

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$

$$x^*(t) \xrightarrow{f_s} a_{-k}^*$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{+jk(\frac{2\pi}{T_0})at}$$

(۱) اگر سیگنال حقیقی باشد چون $x(t) = x^*(t)$ پس $a_k = a_{-k}^*$

(۲) اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد، $a_k = a_{-k}^*$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرایب سری فوریه مطلقاً حقیقی و زوج هستند.

(۳) اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد، $a_k = -a_{-k}^*$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرایب سری فوریه مطلقاً موهومی و فرد هستند.

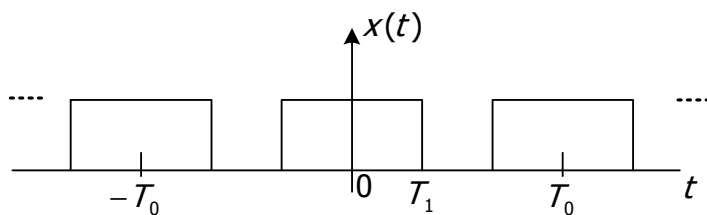
۳-۳-۶- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$|a_k|^2$ نشان دهنده قدرت سیگنال در هارمونی k ام است.

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

مثال (۱) ضرایب سری فوریه شکل مقابل را به دست آورید.

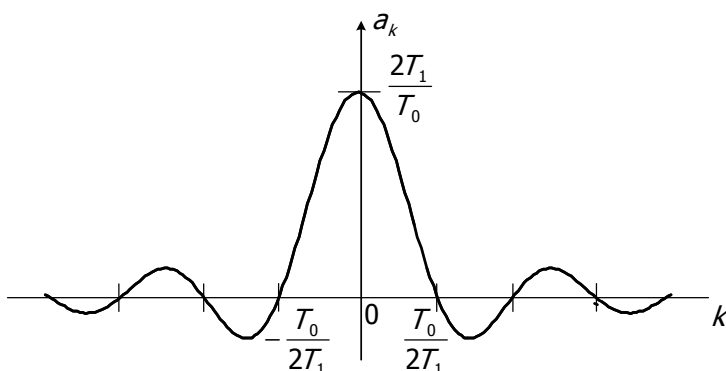


$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{-1}{jk \frac{2\pi}{T_0}} e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \bigg|_{-T_1}^{T_1} \\ &= \frac{-1}{jk2\pi} \cdot (e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1} - e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}) = \frac{-1}{jk2\pi} (-2j) \sin(k \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_1) \\ &\Rightarrow a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \end{aligned}$$

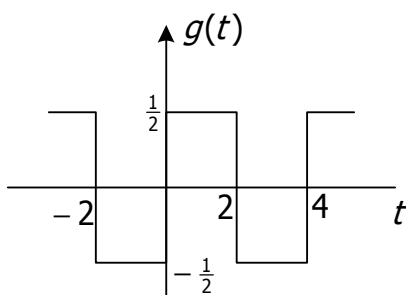
$$\text{sinc}(k) = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} \Rightarrow a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}(\frac{2T_1}{T_0} k)$$

: با توجه به تعریف



$$\begin{cases} a) T_0 = \text{cte}, T_1 \rightarrow 0 \\ b) T_1 = \text{cte}, T_0 \rightarrow \infty \end{cases}$$

مثال ۲)



$$\begin{aligned} g(t) &= x(t-1) - \frac{1}{2} \\ T_0 &= 4, \quad T_1 = 1 \end{aligned}$$

$$x(t) \rightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \rightarrow a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{4})t}$$

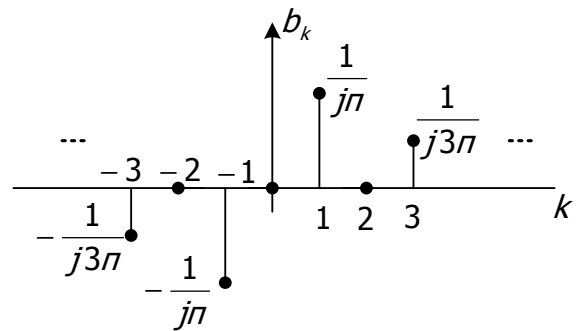
$$e^{jk2\pi} = 1 \quad *$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2}$$

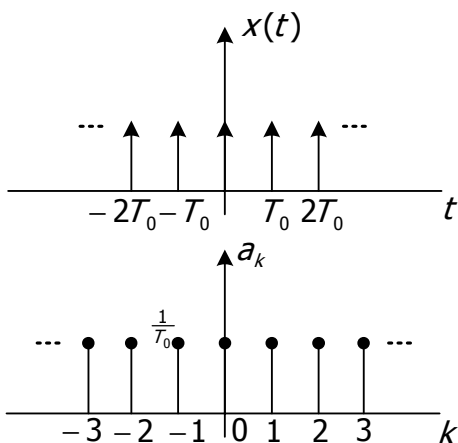
$$\Rightarrow g(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk \frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{\pi}{2})t}$$

$$b_k = \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk} = \frac{e^{-jk \frac{\pi}{2}}}{k\pi} \cdot \left(\frac{e^{jk \frac{\pi}{2}} - e^{-jk \frac{\pi}{2}}}{2j} \right) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = 0 & k : \text{even} \\ b_k = \frac{1}{jk\pi} & k : \text{odd} \end{cases}$$



٣-٤- قطار ضربه

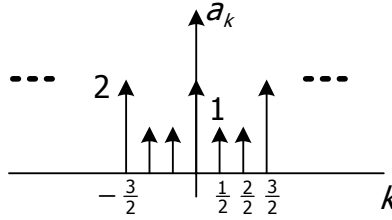


$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{m}{2}) + \delta(t - \frac{3m}{2}) \quad \text{مثال ۳}$$



$$T_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_{T_0=\frac{3}{2}} (\delta(t + \frac{1}{2}) + 2\delta(t) + \delta(t - \frac{1}{2})) e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt = \frac{2}{3} (2 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}k)) = \frac{4}{3} (1 + \cos(\frac{2\pi}{3}k))$$

۳-۵- سری فوریه زمان گسسته

$$\varphi[n] = e^{j\Omega n}$$

$$\varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \cos(k\frac{2\pi}{N}n) + j\sin(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$\frac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N}} = \frac{N}{K}, (k \in Z)$$

تک تک هارمونی‌ها دوره تناوب N دارند:

$$\varphi_k[n] = \varphi_k[n+N] \Rightarrow \varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \cdot e^{j2\pi n} = \varphi_k[n], \quad (n \in Z)$$

$$\Rightarrow \varphi_k[n] = \varphi_{k+rN}[n+N], \quad (r \in Z)$$

$$x[n] = x[n+N]$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \Rightarrow a_k = a_{k+rN}, \quad \begin{cases} N \in Z^+ \\ r \in Z \\ k \in Z \end{cases}$$

۳-۶-۲. خواص سری فوریه زمان گسسته

۳-۶-۱. تفاضل اول

$$x[n] = x[n+N] \Rightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$x[n-1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k (1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}) \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

۳-۶-۲. رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

مثال ۴) فرض کنید اطلاعات زیر درباره دنباله $x[n]$ داده شده:

$$N = 6, \quad x[n] = x[n+N] \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1 \quad (\text{ج})$$

در میان مجموعه سیگنال‌هایی که در سه شرط بالا صدق می‌کنند $x[n]$ را پیدا کنید که کمترین توان را در هر دوره تناوب دارد.

$$x[n] = \sum_{k=\langle 6 \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{6})n} = \sum_{k=0}^5 a_k \cdot e^{jk(\frac{\pi}{3})n} \quad ; \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \text{ ضرایب مجموعه}$$

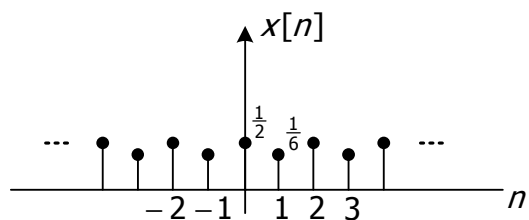
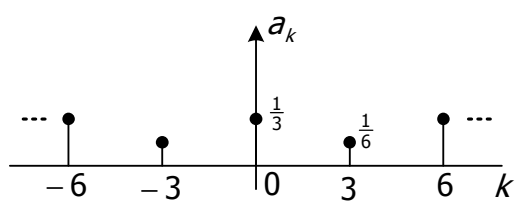
$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk(\frac{\pi}{3})n} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] = \frac{1}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 x[n] e^{-jk(\frac{\pi}{3})n} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 x[n] e^{-jn\pi} = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = \frac{1}{6}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6}$$

با توجه به رابطه پارسوال، برای احراز آخرین شرط ($x[n]$ کمترین توان را در هر دوره تناوب دارد) بایستی سایر ضرایب صفر در نظر گرفته شود ($a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$). بدین ترتیب با توجه به ضرایب a_0 و a_3 بدست آمده می‌توان سیگنال $x[n]$ را با استفاده از فرمول سنتز بدست آورد.

$$x[n] = \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-1)^n$$

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ \frac{1}{6} & n=1 \\ \frac{1}{2} & n=2 \\ \frac{1}{6} & n=3 \\ \frac{1}{2} & n=4 \\ \frac{1}{6} & n=5 \end{cases}$$



۷-۳- سیستم‌های LTI و سری فوریه زمان پیوسته

سیستم LTI با ورودی $x(t)$ ، خروجی $y(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{c} LTI \\ \boxed{h(t)} \end{array} \quad x(t) \longrightarrow \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

پاسخ سیستم را به ورودی نمایی $x(t) = e^{st}$ را در حالت کلی بدست می‌آوریم:

$$x(t) = e^{st} \Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

۷-۳-۱- پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$s = j\omega, x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{الف})$$

پس به این ترتیب خروجی سیستم همان ورودی $x(t) = e^{j\omega t}$ در حاصل ضرب پاسخ فرکانسی سیستم خواهد بود. پاسخ فرکانسی هر سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = x(t + T_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots \quad (\text{ب})$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به مجموعه ورودی‌ها برابر مجموع پاسخ‌ها به تک‌تک ورودی‌هاست.

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \dots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} \cdot H(-j\omega_0) + a_0 \cdot H(j0) + a_1 e^{j\omega_0 t} \cdot H(j\omega_0) + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot H(jk\omega_0), \quad H(jk\omega_0) = H(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} &\Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

اگر ورودی به سیستم LTI متناوب و با ضرایب سری فوریه a_k باشند، خروجی سیستم نیز متناوب (با همان دوره تناوب ورودی) $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ خواهد بود. با عبور ورودی متناوب از سیستم می‌توان برخی از هارمونی‌ها را تقویت، تضعیف و یا به طور کامل حذف نمود.

مثال ۱) اگر $x(t) = e^{j2t}$, $y(t) = x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

روش اول:

$$x(t) = e^{j2t} , y(t) = x(t-3) \Rightarrow y(t) = e^{j2(t-3)}$$

روش دوم:

$$h(t) = \delta(t-3) , H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3) e^{-j\omega t} dt = e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{j2t} \cdot H(j\omega) \Big|_{\omega=2} = e^{j2t} \cdot e^{-j6}$$

روش سوم:

$$h(t) = \delta(t-3) , x(t) = e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda-3) e^{j2(t-\lambda)} d\lambda = e^{j2(t-3)}$$

مثال ۲) اگر $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$, $y(t) = x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

ابتدا سري فوريه ورودي را نوشته و آنگاه سري فوريه خروجي را بدست مي آوريم.

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t}$$

$$h(t) = \delta(t-3) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j3\omega}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} H(j4) + \frac{1}{2} e^{-j4t} H(-j4) + \frac{1}{2} e^{j7t} H(j7) + \frac{1}{2} e^{-j7t} H(-j7)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j4t} \cdot e^{-j12} + \frac{1}{2} e^{-j4t} \cdot e^{j12} + \frac{1}{2} e^{j7t} \cdot e^{-j21} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \cdot e^{j21}$$

$$= \cos(4t-12) + \cos(7t-21)$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \\ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \\ a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

به سيستم LTI با پاسخ

با ضرايب سري فوريه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi)t}$$

مثال ۳) ورودي

ضربه $h(t) = e^{-t} u(t)$ اعمال مي شود. مطلوب است ضرايب سري فوريه خروجي؟

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \frac{-1}{j\omega + 1} e^{-(1+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

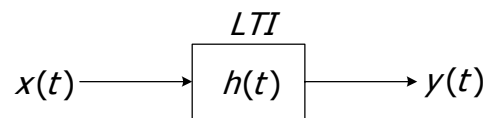
$$H(jk\omega_0) = H(jk2\pi) = \frac{1}{1 + jk2\pi}$$

$$b_0 = 1 \quad 1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + j2\pi}, \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - j2\pi},$$

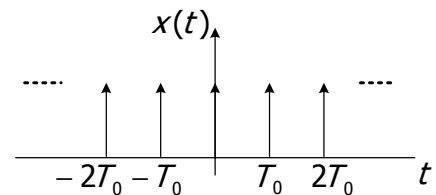
$$b_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j4\pi}, \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j4\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + j6\pi}, \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + j6\pi}$$

۳-۷-۲- پاسخ سیستم LTI به قطار ضربه

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT_0)$$



$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_0}, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t}$$



$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T_0} H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

سری فوریه خروجی:

۳-۸- فیلتر کردن (زمان پیوسته)

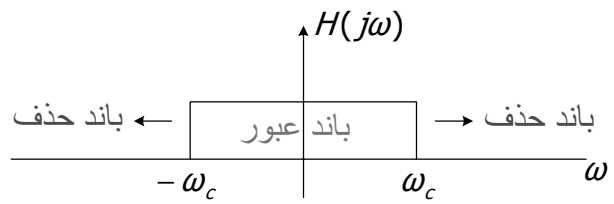
فیلترهای شکل دهنده فرکانسی: شکل طیف سیگنال ورودی را تغییر می دهد.

فیلترهای انتخابگر فرکانسی: بعضی از فرکانس ها را اساساً بدون اعوجاج عبور داده و سایر فرکانس ها را تضعیف یا حذف می کند. (notch filter)

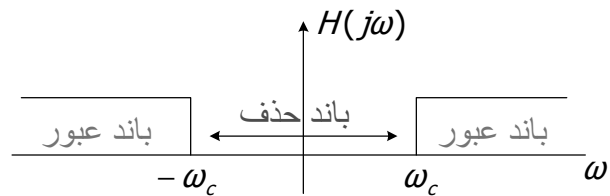
۳-۸-۱- انواع فیلترها

فیلتر پایین گذر (LPF*):

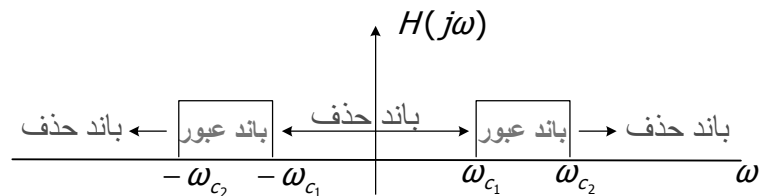
* 1. Low Pass Filter



فیلتر بالا گذر (HPF*):



فیلتر میان گذر (BPF*):



۳-۸-۲- تشخیص نوع فیلتر:

با توجه به داده‌های مسئله به دو روش می‌توان نوع فیلتر را تشخیص داد:

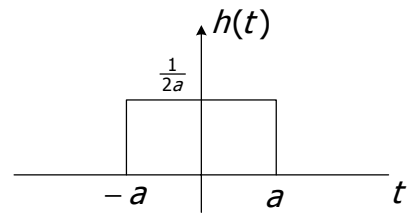
۱) اگر در صورت مسئله پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ داده شده باشد، با بدست آوردن $H(j\omega)$ و سپس رسم اندازه پاسخ فرکانسی $|H(j\omega)|$ به ازای فرکانس‌های مختلف، نوع فیلتر را تشخیص می‌دهیم.

۲- اگر در صورت مسئله معادله دیفرانسیل سیستم LTI داده شده باشد، ابتدا با اعمال تابع $x(t) = e^{j\omega t}$ بعنوان ورودی سیستم، $H(j\omega)$ را با توجه به رابطه $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$ بدست می‌آوریم. سپس اندازه پاسخ فرکانسی سیستم $|H(j\omega)|$ را ترسیم می‌کنیم تا نوع فیلتر را تشخیص دهیم.

مثال ۴: پاسخ ضربه سیستم $h(t) = \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{t}{2a}\right)$ داده شده است. سیستم LTI مذکور همانند چه نوع فیلتری عمل می‌کند؟

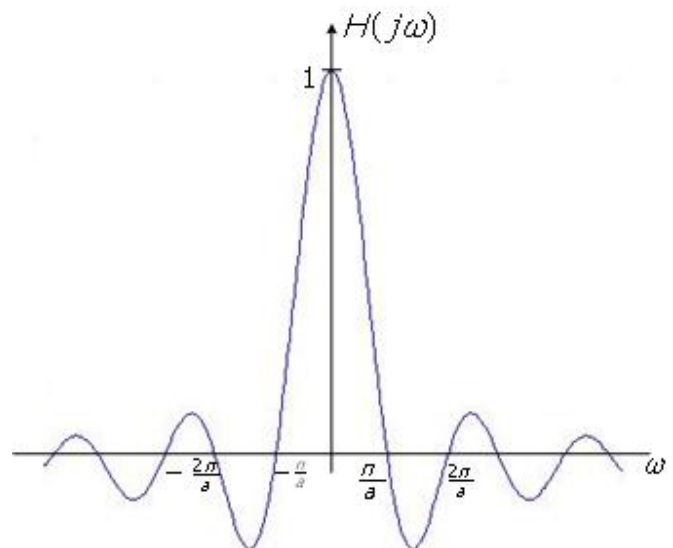
2. High Pass Filter

3. Band Pass Filter

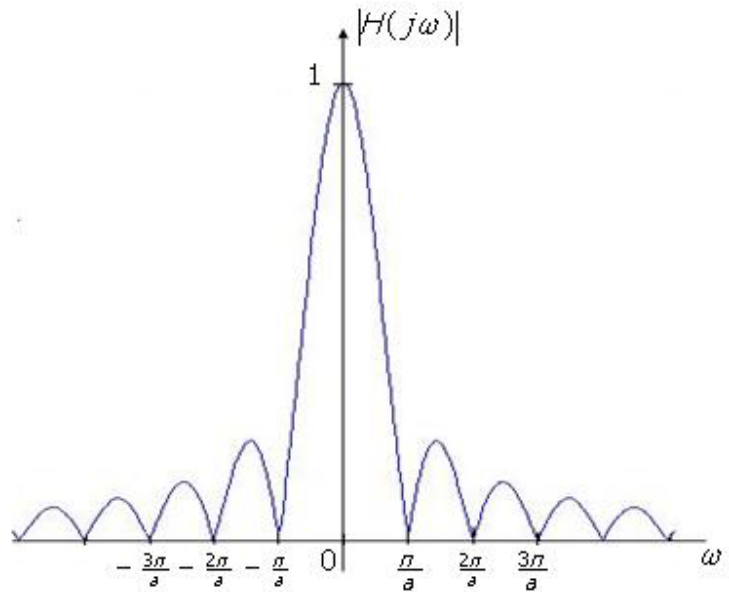


$$H(j\omega) = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j2a\omega} (e^{-ja\omega} - e^{ja\omega}) = \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = \frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi} \pi)}{\frac{a\omega}{\pi} \pi}$$

$$= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot a\right); \quad \frac{\omega}{\pi} \cdot a = m, \quad m \in \mathbb{Z}$$



برای تشخیص نوع فیلتر بایستی $|H(j\omega)|$ را ترسیم نمائیم.



که با توجه به اندازه پاسخ فرکانسی سیستم نوع فیلتر، فیلتر پایین گذر LPF غیرایده‌آل است چون نزدیک صفر بیشترین دامنه را دارد و با افزایش فرکانس اندازه پاسخ فرکانسی بشدت کاهش و به سمت صفر میل می‌کند.

مثال ۵: اگر $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t) = e^{j\omega t}$ نوع فیلتر را تعیین کنید.

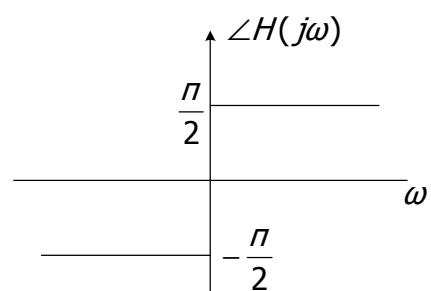
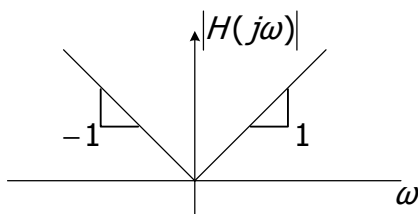
$$x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$X(t)$ و $y(t)$ را در رابطه داده شده برای سیستم LTI جایگذاری می‌کنیم تا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آوریم.

$$e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) = j\omega$$

$$|H(j\omega)| = |\omega|$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & \omega < 0 \end{cases}$$



با توجه به اندازه پاسخ فرکانسی سیستم نوع فیلتر بالاگذر HPF است.

مثال ۶) اگر $y'(t) + 2y(t) = \cos 3t$ مطلوب است:

الف) این سیستم به عنوان چه فیلتری عمل می‌کند.

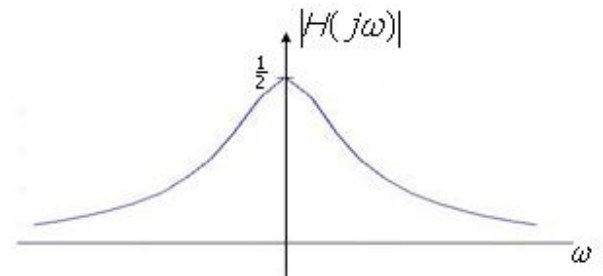
ب) سری فوریه خروجی را با توجه به ورودی داده شده به دست آورید.

حل الف:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t); \quad x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$j\omega e^{j\omega t} H(j\omega) + 2e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t};$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}, \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$



با توجه به شکل نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

حل ب:

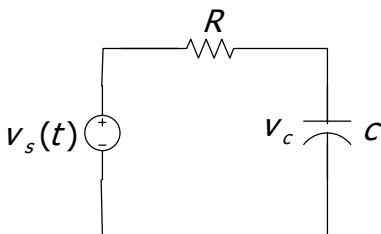
$$x(t) = \cos 3t = \frac{1}{2} e^{j3t} + \frac{1}{2} e^{-j3t}; \quad \omega_0 = 3$$

$$b_1 = \frac{1}{2} H(j3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + 3j}, \quad b_{-1} = \frac{1}{2} H(-j3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - 3j}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 + 3j} e^{j3t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - 3j} e^{-j3t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13} e^{j56.3}} e^{j3t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13} e^{-j56.3}} e^{-j3t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cos(3t - 56.3)$$

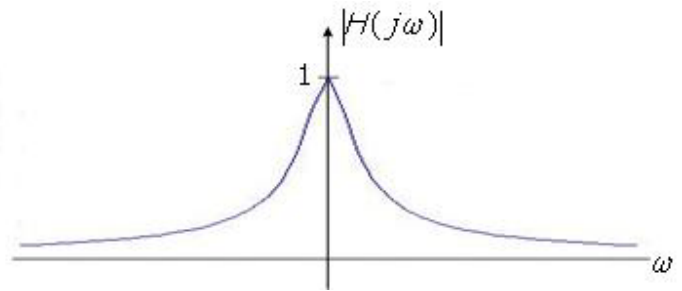
مثال ۷) $H(j\omega)$ و نوع فیلتر را تعیین کنید.



$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t); \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_c(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow RC(j\omega) e^{j\omega t} H(j\omega) + e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC(j\omega) + 1}; \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

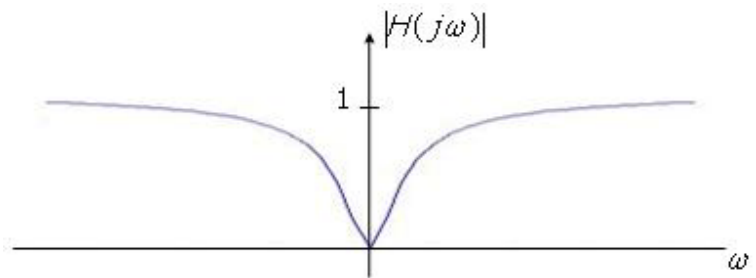


حال اگر خروجی دو سر مقاومت باشد:

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_R(t) = \frac{dv_s(t)}{dt}; \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_R(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega e^{j\omega t} + \frac{1}{RC}e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} + j\omega}; \quad |H(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{(\frac{1}{RC})^2 + \omega^2}}$$



تذکر: همانطوریکه ملاحظه می‌شود بسته به اینکه خروجی در سر خازن و یا مقاومت در نظر گرفته شود نوع فیلترینگ از پایین‌گذر به بالاگذر تغییر می‌کند.

۹-۳- سیستم‌های LTI و سری فوریه زمان گسسته

$$x[n] = Z^n \Rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m} \cdot h[m] = Z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] Z^{-m} = Z^n \cdot H(z) \quad (\text{الف})$$

$$; H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] Z^{-n}$$

$$Z = e^{j\Omega}; x[n] = e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n] = e^{j\Omega n} \cdot H(e^{j\Omega}); H(e^{j\Omega}) \stackrel{\Delta}{=} H(j\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \quad (\text{ب})$$

$$x[n] = x[n+N] \quad ; \quad x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (\text{ج})$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k \cdot H(jk \frac{2\pi}{N}) \quad ; \quad H(jk \frac{2\pi}{N}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

تذکر: در مورد سیستم زمان گسسته و LTI با ورودی متناوب، خروجی نیز متناوب خواهد بود. دوره تناوب خروجی و ورودی یکسان بوده و ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه داده شده در بند ۳ بدست می‌آید.

یادآوری (سری هندسی):

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) \stackrel{?}{=} \frac{4}{5} \quad \text{تمرین:}$$

مثال ۱) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \alpha^n u[n]$ داده شده است. پاسخ $y[n]$ را به ورودی $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N}n)$ بدست آورید.

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به تک‌تک ورودی‌های نمایی مختلط طبق بند ۲ را بدست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم تا پاسخ کلی سیستم به ورودی مذکور تعیین شود.

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

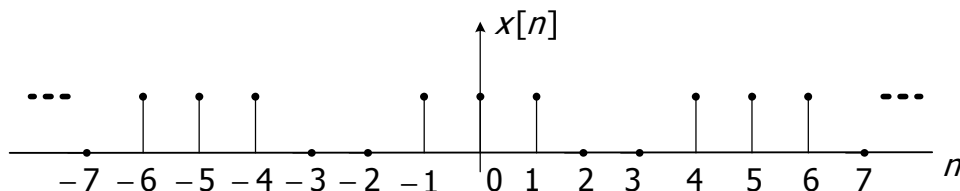
$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} \quad , \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

مثال ۲) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی متناوب $x[n]$ داده شده است. سری فوریه خروجی را بدست آورید.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \quad , \quad x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm 1 \\ 0 & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases} ; N = 6$$



$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{6} (e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)} + 1 + e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)}) = \frac{1}{6} (1 + 2 \cos(k \frac{\pi}{3}))$$

$$\begin{aligned}
 H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega}\right)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^n \\
 \Rightarrow H(j\Omega) &= \frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \cos(\Omega) + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5 - 4\cos(\Omega)} \\
 H(jk\frac{2\pi}{6}) &= \frac{3}{5 - 4\cos(k\frac{\pi}{3})} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle 6 \rangle} \frac{1}{6} (1 + 2\cos(k\frac{\pi}{3})) \cdot H(jk\frac{\pi}{3}) e^{jk\frac{\pi}{3}n}
 \end{aligned}$$

۱۰-۳- فیلتر کردن (زمان گسسته)

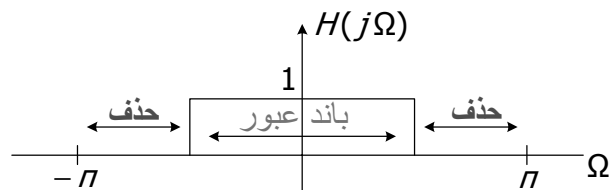
$$x[n] \xrightarrow{\text{LTI}} \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] \quad H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

$$H(j\Omega) = H(j(\Omega + 2\pi)) \quad \text{با دوره تناوب } 2\pi \text{ متناوب است پس می‌توان نوشت:}$$

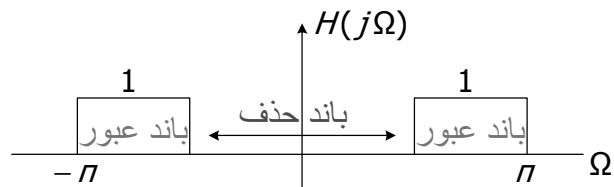
بدین ترتیب برای تشخیص نوع فیلتر در سیستم‌های زمان گسسته به اندازه پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ توجه شود.

۱۰-۱-۳- انواع فیلترها

فیلتر پائین‌گذر (LPF*):



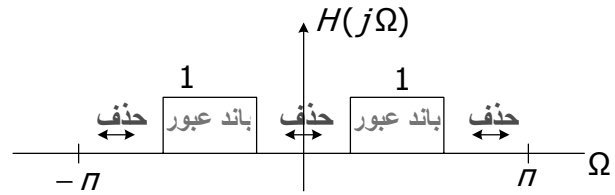
فیلتر بالاگذر (HPF*):



* 1. Low Pass Filter

2. High Pass Filter

فیلتر میان‌گذر (BPF*):



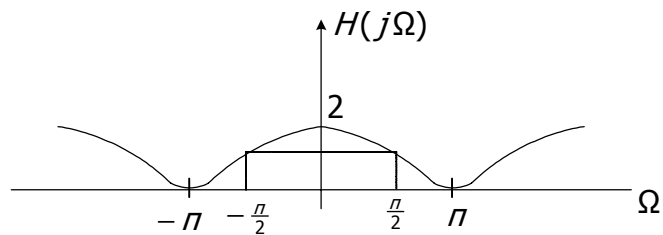
مثال ۳) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$ ، پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n] = y[n]|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \right) e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = 1 + \cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = -\pi \\ 1 & \Omega = -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \Omega = \pi \end{cases}$$



با توجه به $H(j\Omega)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ (چون همواره مثبت است لذا با $|H(j\Omega)|$ برابر خواهد بود) نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

مثال ۴) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = -\frac{1}{2}x[n+2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

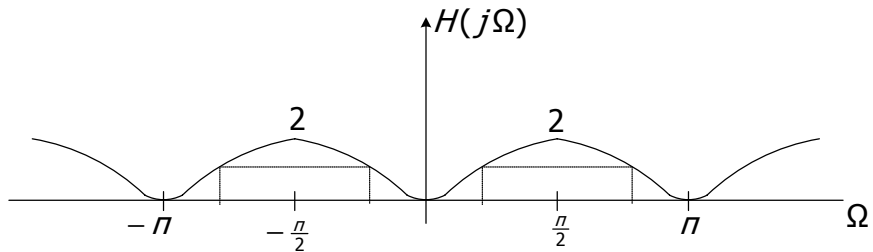
از آنجایی که $h[n]$ در مسئله خواسته شده است، طبق بند ۲ مستقیماً $H(j\Omega)$ را بدست می‌آوریم.

$$x[n] = e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n] = e^{j\Omega n} H(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega n} H(j\Omega) = -\frac{1}{2} e^{j\Omega(n+2)} + e^{j\Omega n} - \frac{1}{2} e^{j\Omega(n-2)}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = -\frac{1}{2} e^{j2\Omega} + 1 - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega} = 1 - \cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \pm \frac{\pi}{4} \\ 2 & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ 1 & \Omega = \pm \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با در نظر گرفتن پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ نوع فیلتر میان‌گذر BPF است.

مثال ۵) سیستم LTI و علی با معادله تفاضلی زیر داده شده است.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) x[n-k]$$

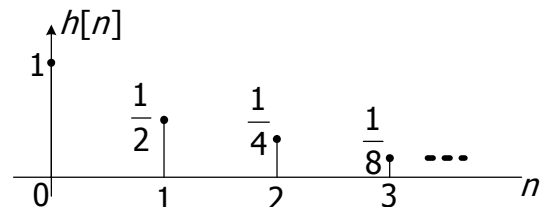
مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه $h[n]$ ؟

ب) پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ ؟

ج) نوع فیلتر ؟

$$h[n] = y[n] \big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) \delta[n-k] = \delta[n] + 2^{-1} \delta[n-1] + 2^{-2} \delta[n-2] + \dots$$

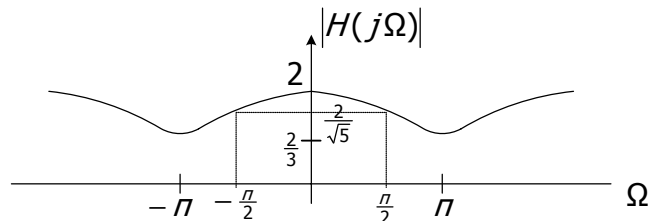


$$H(j\Omega) = 1 + 2^{-1} e^{-j\Omega} + 2^{-2} e^{-j2\Omega} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos \Omega + j \frac{1}{2} \sin \Omega}$$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} \cos \Omega)^2 + (\frac{1}{2} \sin \Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} - \cos(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}$$

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} 2 & \Omega = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3} & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با در نظر گرفتن اندازه پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ ، از آنجایی که با افزایش فرکانس میزان تضعیف با توجه به شکل زیاد می‌شود، نوع فیلتر را می‌توان پایین‌گذر LPF دانست.

۱۱-۳- خلاصه

اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t) = f(t + T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست. اگر سیگنال در طی یک دوره تناوب (T) فرموله شود $(f(t))$ ، با توجه به رابطه گفته شده سیگنال متناوب در کل زمان‌ها بیان می‌شود $(\tilde{f}(t))$.

سری فوریه، تنها برای توابع متناوب بیان می‌شود، توابعی که دارای دوره تناوب

$$x(t) = x(t + T) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ اصلی می‌باشند.}$$

در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از هارمونی‌ها بسط داد، می‌توان به این سوال که در یک سیگنال چه فرکانس‌هایی و با چه قدرتی وجود دارند را پاسخ داد.

پاسخ سیستم LTI به نمایی مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ یا به طور کلی $e^{j\omega t}$ به فرم بسیار ساده‌ای تعریف می‌شود.

هرچه هارمونی‌ها بالاتر باشد فرکانس‌ها بالاتر است و برعکس هر چه هارمونی‌ها پایین‌تر باشد فرکانس‌ها پایین‌تر است.

اگر سیگنالی در هارمونی‌های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و برعکس اگر سیگنالی در هارمونی‌های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

به شرط برقرار بودن شرایط دیریکله همگرایی سری فوریه قابل بررسی است.

مجموعه ضرایب $\{a_k\}$ را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ می‌نامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و

اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متناظر است. ضریب a_0 مؤلفه DC یا ثابت سیگنال است.

با دانستن خواص سری فوریه، در برخی مسائل برای پیدا کردن ضرایب سری فوریه لزومی به استفاده از تعریف گفته شده برای سری فوریه نیست.

اگر ورودی ضرایب فوریه a_k باشند، خروجی $b_k e^{jk\omega_0}$ می‌باشد. می‌توان تعدادی از ورودی‌ها را از خروجی حذف کرد.

اگر سیستم ورودی سیستم LTI متناوب باشد، خروجی نیز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودی و خروجی سیستم می‌توان نوع فیلتر و شکل آن را بدست آورد.

amir javedani malak