

فصل دوم

سیستم‌های LTI زمان پیوسته و زمان گسسته

۱-۲- خواص سیستم‌های LTI با توجه به رابطه کانولوشن

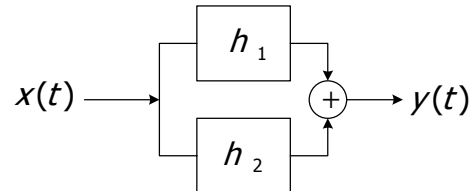


۱-۱-۲- جابه‌جایی پذیری

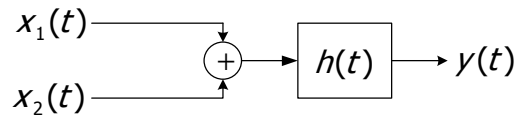
$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \\
 &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda
 \end{aligned}
 , \quad
 \begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] \\
 &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]
 \end{aligned}$$

۲-۱-۲- توزیع پذیری

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

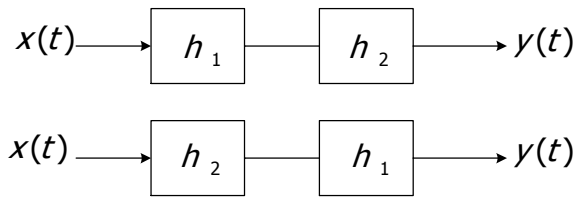


$$y(t) = (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

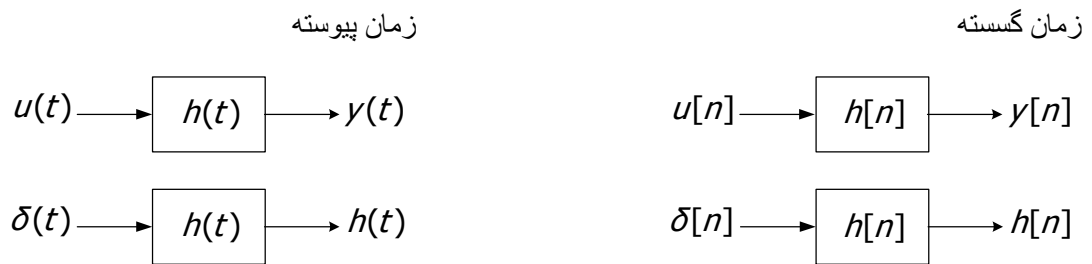


۳-۱-۲- شرکت پذیری

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \\
 &= x(t) * (h_2(t) * h_1(t))
 \end{aligned}$$



۲-۲- رابطه بین پاسخ ضربه $h(t)$ و پاسخ پله



$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$$

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

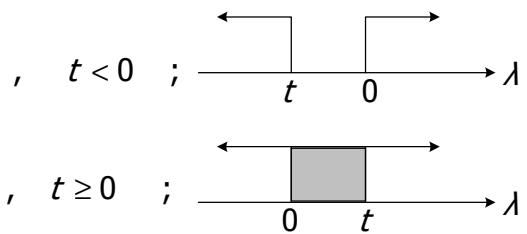
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$h[n] = y[n] - y[n-1]$$

مثال ۱) پاسخ پله سیستم‌های LTI زیر را بدست آورید.

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \int_0^t \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} d\lambda = 1 - e^{\frac{-t}{RC}} & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$



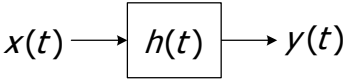
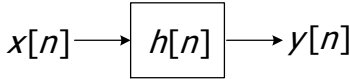
$$y(t) = (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) u(t)$$

$$h[n] = (-a)^n u[n] \quad (\text{ب})$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (-a)^k u[k] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ \sum_{k=0}^n (-a)^k = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 - (-a)} & , \quad n \geq 0 \end{cases} = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 + a} u[n]$$

۳-۲- خواص سیستم‌های LTI با توجه به تابع تبدیل

۳-۲-۱- حافظه

زمان پیوسته  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$ $h(t) = 0 \quad ; \quad t \neq 0$	زمان گسسته  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]$ شرط بدون حافظه بودن سیستم: $h[n] = 0 \quad ; \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
---	--

اثبات (سیستم زمان گسسته):

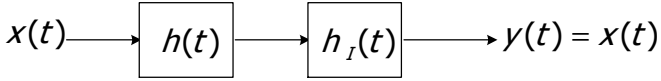
$$y[n] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots$$

این سیستم به شرطی بدون حافظه است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه وابسته باشد که برای این منظور بایستی:

$$h[n] = 0 \quad , \quad n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad h[n] = \delta[n] \quad \text{یا} \quad h[n] = k \delta[n] \quad ; \quad k = cte$$

۳-۲-۲- معکوس پذیری

زمان پیوسته

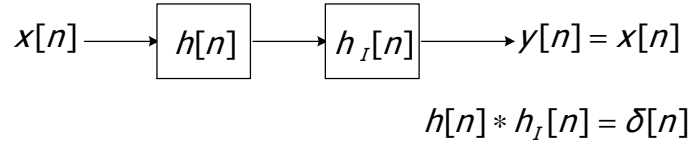


$$y(t) = x(t)$$

$$x(t) = (h(t) * h_I(t)) * x(t)$$

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \Rightarrow h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

زمان گسسته



۲-۳-۳- علیت

در سیستم علی خروجی به آینده ورودی بستگی ندارد. با توجه به رابطه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$ شرط زیر برای

تابع تبدیل (پاسخ ضربه) بیانگر سیستم علی خواهد بود.

زمان پیوسته

زمان گسسته

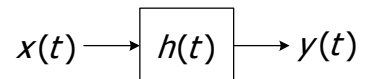
$$h(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n < 0$$

تذکر: تابع تبدیل $h(t) = u(t)$ ($h[n] = u[n]$) بیانگر سیستم علی است.

۲-۳-۴- پایداري (BIBO*)

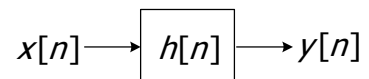
زمان پیوسته



$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| |x(t-\lambda)| d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda < \infty$$

$$\text{شرط پایداري: } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

زمان گسسته



Bounded Input Bounded Output *

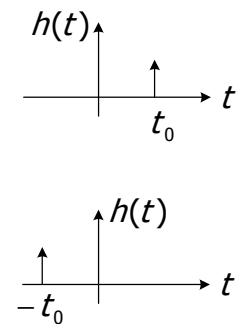
$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad \text{شرط پایداری:}$$

مثال ۲) با استفاده از تابع تبدیل خواص سیستم‌های LTI را بررسی کنید.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t - t_0)$$

الف) علی بودن

$$h(t) = y(t) \Big|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} t_0 \geq 0; & \text{سیستم علی} \\ t_0 < 0; & \text{سیستم غیر علی} \end{cases}$$


ب) سیستم معکوس

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t), \quad \delta(t - t_0) * h_I(t) = \delta(t), \quad h_I(t - t_0) = \delta(t) \xrightarrow{t-t_0=t'} h_I(t') = \delta(t' + t_0)$$

معکوس پذیر

ج) پایداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t - t_0)| dt < \infty \quad \text{پایدار}$$

مثال ۳)

$$h(t) = e^{at} u(t) \quad \text{الف)}$$

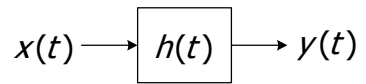
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at} u(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \begin{cases} a < 0 & \text{پایدار} \\ a \geq 0 & \text{ناپایدار} \end{cases}, \quad \text{علی و حافظه دار}$$

$$n \geq -2, \quad h[n] = a^n u[n+2] \quad \text{ب)}$$

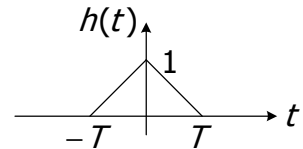
غیر علی و حافظه دار

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k+2]| = \sum_{k=-2}^{\infty} |a^k| \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 & , \text{پایدار} \\ |a| > 1 & , \text{ناپایدار} \end{cases}$$

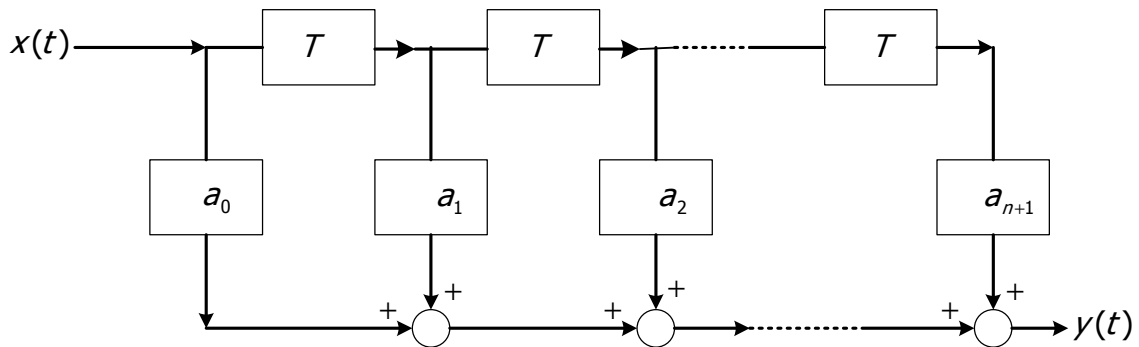
تمرین ۱: مطلوب است ترسیم $y(t)$ ؟



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT)$$



تمرین ۲: مطلوب است پاسخ ضربه سیستم ذیل $h(t)=?$



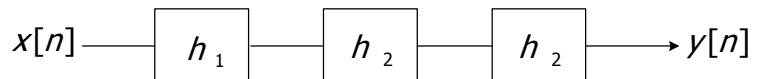
مثال ۳) رابطه بین ورودی دلخواه $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را برای پاسخ ضربه سیستم LTI داده شده بدست آورید.

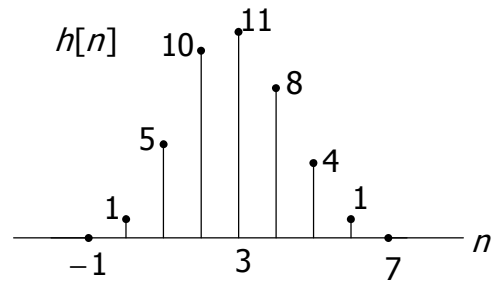
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{1}{4}(u[n] - u[n-4]) = \frac{1}{4}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3])$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$$

مثال ۴) اگر $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$ (الف) مقدار $h_1[n]$ را بدست آورید، تابع تبدیل کل سیستم $h[n]$ داده شده است.





$$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad , \quad h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

$$\begin{aligned} h_2[n] * h_2[n] &= (\delta[n] + \delta[n-1]) * (h_2[n]) = h_2[n] + h_2[n-1] \\ &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$$

اولین جایی که $h[n]$ مقدار دارد $n = 0$ است پس در نمودارهای بالا به ازای $n = 0$ داریم:

$$a_0 + 2a_{-1} + a_{-2} = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_1 + 2a_0 = 5 \Rightarrow a_1 = 3$$

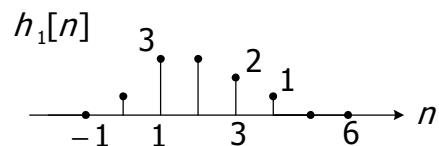
$$a_2 + 2a_1 + a_0 = 10 \Rightarrow a_2 = 3$$

$$a_3 + 2a_2 + a_1 = 11 \Rightarrow a_3 = 2$$

$$a_4 + 2a_3 + a_2 + 8 = 4 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$a_5 + 2a_4 + a_3 = 4 \Rightarrow a_5 = 0$$

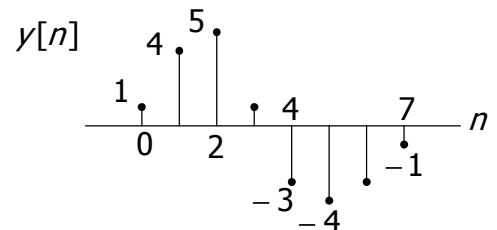
$$a_6 + 2a_5 + a_4 + 1 = 0 \Rightarrow a_6 = 0 \dots$$



ب) اگر $x[n]$ برابر باشد با $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ مطلوب است مقدار خروجی $y[n]$ ؟

این قسمت کاملاً مستقل از قسمت قبل است چون $x[n]$ داده شده است.

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] - h[n-1]$$



۲-۴- کانولوشن (زمان پیوسته)

۲-۴-۱- روش ترسیمی

توصیه می‌شود اگر $f(t)$ به لحاظ ریاضی ساده‌تر است از فرمول ۲ و اگر $g(t)$ ساده‌تر است از فرمول ۱ استفاده می‌کنیم. در این مثال از فرمول ۲ استفاده می‌کنیم.

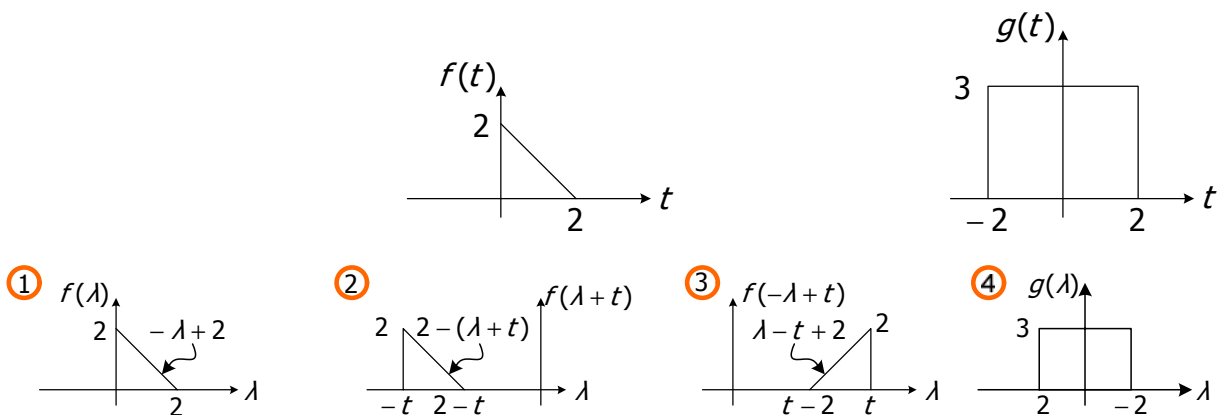
$$y(t) = f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\lambda}_1 g(t - \lambda) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d\lambda}_2 f(t - \lambda)$$

$f(\lambda)$, $g(\lambda)$ را می‌سازیم.

برای ساخت $f(t - \lambda)$ اول باید $f(t + \lambda)$ را ساخت چون نمی‌دانیم که t مثبت است یا منفی است پس به صورت قراردادی t واحد به سمت چپ شیفت می‌دهیم. سپس $f(t - \lambda)$ را می‌سازیم از این مرحله به بعد باید در هر مرحله معادله خط کنار نمودار نوشته شود.

حال $g(\lambda)$ را ثابت نگه داشته و $f(t - \lambda)$ را از $-\infty$ به سمت $+\infty$ شیفت می‌دهیم. بدیهی است در جایی که دو تابع همپوشانی نداشته باشند حاصلضرب صفر است. سپس به نقطه ای می‌رسد که $\max$ همپوشانی را دارد و بعد دوباره به جایی می‌رسد که هیچ همپوشانی نداشته باشند:

(مثال ۵)



$$\left\{ \begin{array}{ll} t < -2, & * = 0 \\ -2 \leq t < 0, & * = \int_{-2}^t (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = \frac{3}{4}(4 - t^2) \\ 0 \leq t < 2, & * = \int_{t-2}^t (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = 6 \\ 2 \leq t \leq 4, & * = \int_{t-2}^2 (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = \frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) \\ t \geq 4, & * = 0 \end{array} \right.$$

۲-۴-۲- استفاده از فرمول

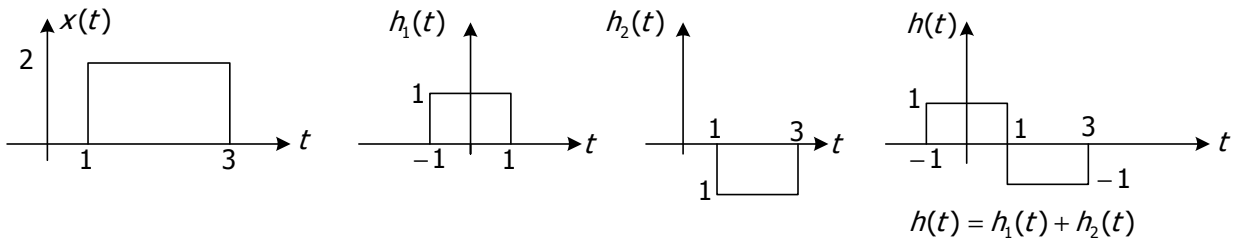
اگر با استفاده از فرمول خواهیم کانولوشن دو سیگنال را بدست بیاوریم. باید معادله دو سیگنال بر حسب توابع ریاضی داده شده باشند یا اینکه بتوان آنها را بر حسب توابع ویژه فرموله نمود.

برای مثال قبل $f(t)$, $g(t)$ را باید به فرم زیر نوشت و سپس در فرمول کانولوشن جایگذاری کرد:

$$f(t) = 2u(t) - r(t) + r(t-2), \quad g(t) = 3(u(t+2) - u(t-2))$$

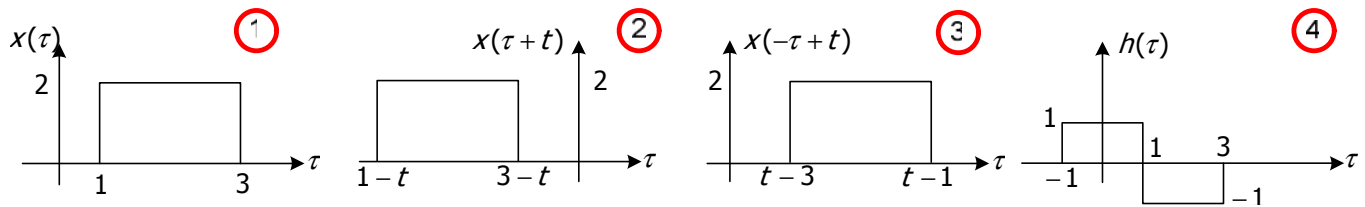
مثال (١)

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3) \quad , \quad h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$

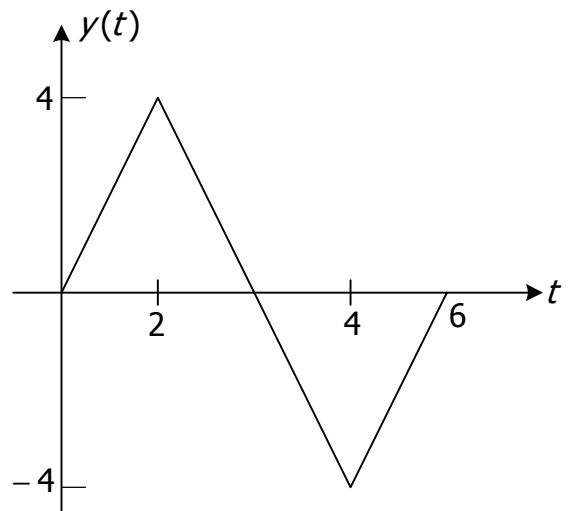


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

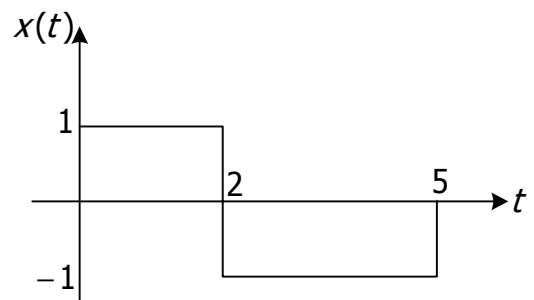
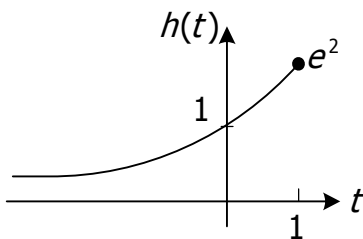


$$\left\{ \begin{array}{ll} t-1 < 1 & , \quad * = 0 \\ -1 \leq t-1 < 1 & , \quad * = \int_{-1}^{t-1} 2d\tau = 2t \\ 1 \leq t-1 < 2 & , \quad * = \int_{t-3}^1 2d\tau + \int_1^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 2 \leq t-1 < 3 & , \quad * = \int_{t-3}^1 2d\tau + \int_1^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 3 \leq t-1 < 4 & , \quad * = \int_{t-3}^3 -2d\tau = -2(6-t) \\ t-1 \geq 5 & , \quad * = 0 \end{array} \right.$$

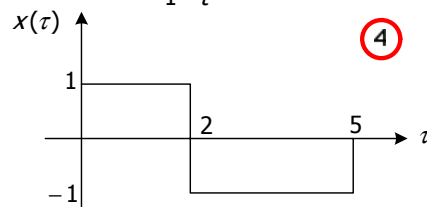
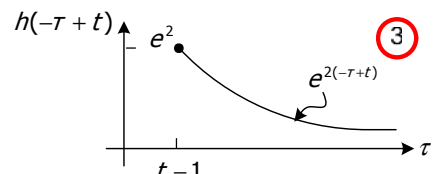
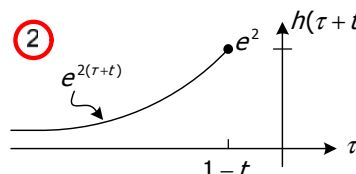
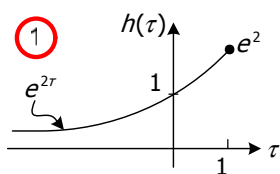


تذكر: وقتي دو تابع پالسي باهم كانوالو مي‌شوند حاصل يك تابع دوزنقه مي‌شود و اگر اين دو تابع پالسي هم عرض باشد شكل حاصل يك تابع مثلثي خواهد بود.

$$h(t) = e^{2t}u(1-t) \quad , \quad x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \quad (\text{مثال ۲})$$



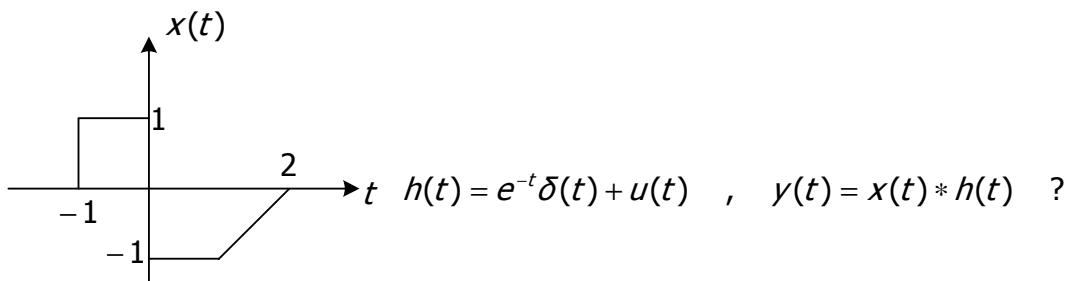
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} t-1 > 5 & , \quad * = 0 \\ 2 < t-1 \leq 5 & , \quad * = \int_{t-1}^5 e^{2(-\tau+t)} (-1) d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-5)} - e^2 \\ 0 < t-1 \leq 2 & , \quad * = \int_{t-1}^2 e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_2^5 e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2} (e^2 - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \\ t-1 \leq 0 & , \quad * = \int_0^2 e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_2^5 -e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2} (e^{2t} - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \end{array} \right.$$

تمرین: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ داده شده. پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را بدست آورید و مقدار خروجی را در

لحظات $t = -\frac{1}{4}$, $t = \frac{3}{4}$, $t = \frac{3}{2}$, $t = +\infty$ محاسبه کنید.



۵-۲- کانولوشن زمان گسسته

۵-۲-۱- روش ترسیمی

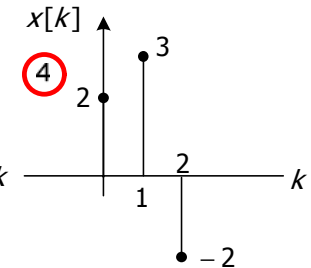
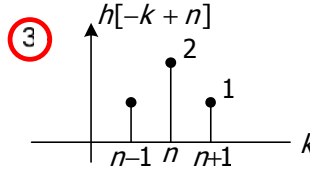
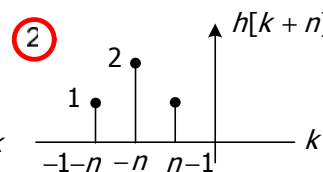
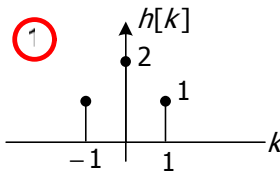
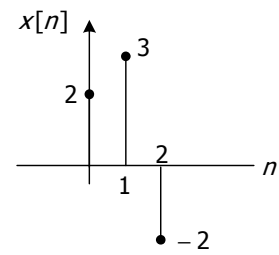
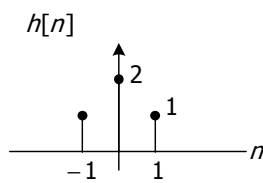
$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]}_1 = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]}_2$$

پس از تصمیم‌گیری راجع به اینکه از رابطه ۱ یا رابطه ۲ خروجی $y[n]$ را حساب کنیم، مراحل انجام عملیات عیناً شبیه زمان پیوسته است.

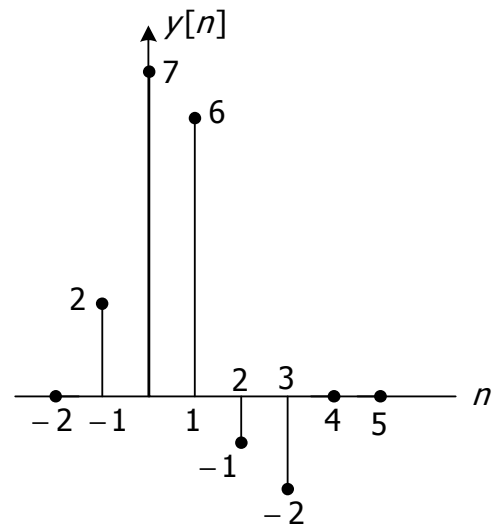
روش ترسیمی را برای تعیین خروجی سیستم زمان گسسته مطرح می‌کنیم:

مثال ۳)

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \\ 2 & n = 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad x[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ -2 & n = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} n+1 < 0, & * = 0 \\ n+1 = 0, & * = 1 \quad 2 = 2 \\ n+1 = 1, & * = 2 \quad 2+1 \quad 3 = 7 \\ n+1 = 2, & * = 1 \quad 2+2 \quad 3-2 \quad 1 = 6 \\ n+1 = 3, & * = 1 \quad 3+2 \quad (-2) = -1 \\ n+1 = 4, & * = 1 \quad (-2) = -2 \\ n+1 \geq 5, & * = 0 \end{cases}$$



۲-۵-۲- استفاده از فرمول

ابتدا باید توابع را بر حسب توابع ویژه و یا توابع ریاضی بیان کرد. اگر ورودی و یا پاسخ ضربه بر حسب تابع ضربه بیان شده باشند، بدلیل خاصیت تابع ضربه محاسبه کانولوشن بسیار راحت خواهد بود.

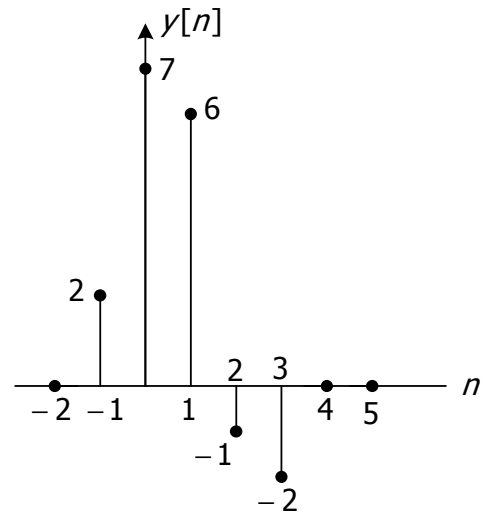
مثال ۴)

$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] \quad , \quad x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= (2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]) * h[n] \\
 &= 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]
 \end{aligned}$$

ل

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]) \\
 &= x[n+1] + 2x[n] + x[n-1]
 \end{aligned}$$



بدیهي است پاسخ محاسبه شده در هر دو حالت یکسان خواهد بود:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1] \quad , \quad h[n] = u[n-1] \quad (\text{مثال ۵})$$

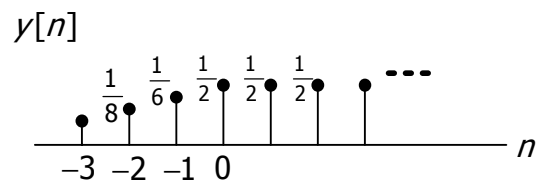
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} u[-k-1] \cdot u[n-k-1]$$

$$u[-K-1] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \leq -1 \\ 0 & ; \quad k > -1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \cdots \\ \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ -3 \quad -2 \quad -1 \end{array} \end{array} \xrightarrow{k} \quad \Rightarrow$$

$$u[n-K-1] = \begin{cases} 0 & ; \quad k \leq n-1 \\ 1 & ; \quad k > n-1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \cdots \\ \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \quad \quad \quad n-1 \end{array} \end{array} \xrightarrow{k}$$

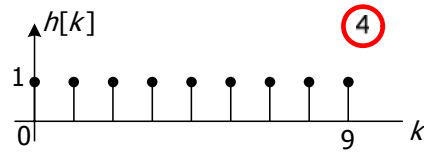
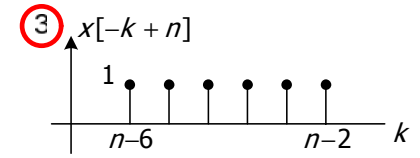
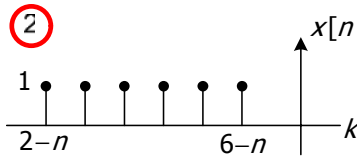
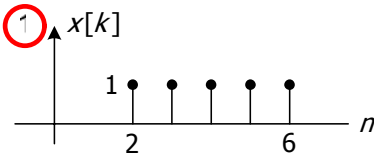
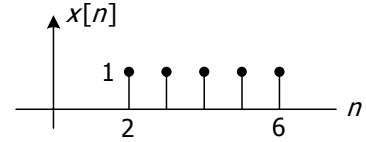
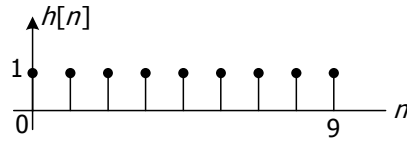
$$n-1 < -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} \stackrel{k \rightarrow -k}{=} \sum_{k=-n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} = \frac{3}{2} (3)^{n-1} = \frac{1}{2} (3)^n$$

$$n-1 \geq -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

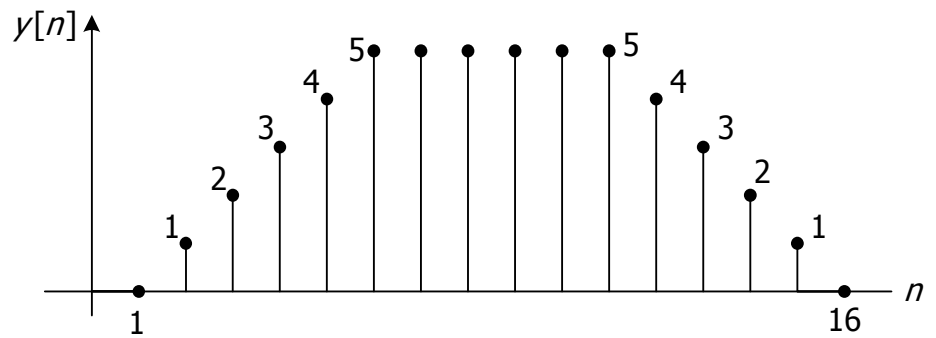


مثال ٦ $x[n] = a^n u[n] \quad 0 < a < 1$, $h[n] = u[n]$, $y[n] = ?$

مثال ٧ $h[n] = u[n] - u[n - 10]$, $x[n] = u[n - 2] - u[n - 7]$



$n - 2 < 0$, $* = 0$	$n - 2 = 10$, $* = 4$
$n - 2 = 0$, $* = 1$	$n - 2 = 11$, $* = 3$
$n - 2 = 2$, $* = 2$	$n - 2 = 12$, $* = 2$
$n - 2 = 3$, $* = 4$	$n - 2 = 13$, $* = 1$
$\left\{ \begin{array}{l} n - 2 = 4 , * = 5 \\ \vdots \\ n - 2 = 9 , * = 5 \end{array} \right.$	$n - 2 \geq 14$, $* = 0$



۶-۲- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل (زمان پیوسته)

به طور کلی معادله دیفرانسیل یک سیستم به فرم روبه‌رو نوشته می‌شود:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y(t)$$

برای حل معادله دیفرانسیل باید

(۱) معادله همگن حل شود.

(۲) جواب خصوصی به ازای ورودی خاص تعیین گردد.

(۳) جواب کلی سیستم عبارت است از پاسخ عمومی + پاسخ خصوصی و با توجه با این که پاسخ عمومی دارای تعدادی ضرایب ثابت است این ضرایب از روی شرایط سکون یا شرایط اولیه به دست می‌آیند.

$$۱) \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \dots$$

$$۲) y_p(t) = \dots$$

$$۳) y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

تذکر: برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است. در غیر اینصورت بایستی شرایط اولیه داده شده باشد.

مثال (۸)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = t \quad , \quad t > 0, \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t}$$

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \quad , \quad t \geq 0 \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + c \Rightarrow y_p(t) = (t - 2)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t} + (t - 2) \quad , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = (2 + t) e^{-t} + (t - 2) \quad , \quad t > 0$$

مثال ۹) معادله دیفرانسیل سیستم LTI و علی داده شده است. مطلوبست پاسخ سیستم به ازای ورودی داده شده:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \begin{cases} 0; & t \leq -1 \\ 1; & t > -1 \end{cases}$$

حل:

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad , \quad y_h(t) = K_1 e^{-2t} \quad (۱)$$

$$y'(t) + 2y(t) = 1; \quad t > -1, \quad y_p(t) = \frac{1}{2} \quad (۲)$$

(۳) اعمال شرط سکون بر اساس علی بودن سیستم

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}; & t > -1 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}; \quad t > -1$$

یا

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}\right) u(t+1)$$

۷-۲- پاسخ به ورودی ضربه:

۷-۲-۱- استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI:

با یک مثال این رابطه را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰) سیستم LTI و علی است. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$

حل: $z''(t) + z'(t) - 2z(t) = u(t)$

$$z''(t) + z'(t) - 2z(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$z_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t$$

$$z_p(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} z(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t - \frac{1}{2}; & t > 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}; \quad t > 0$$

(مشتق پاسخ پله = پاسخ ضربه)

$$z(t) = \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}\right) u(t); \quad y(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t) + \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}\right) \delta(t) \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t)$$

۲-۷-۲- محاسبه پاسخ ضربه سیستم بطور مستقیم

جهت محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI پاسخ معادله همگن را بدست آورده و آن را بعنوان پاسخ کامل سیستم در نظر می‌گیریم. پاسخ کامل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند که بدین ترتیب ضرایب ثابت محاسبه و پاسخ کامل، که همان پاسخ ضربه سیستم LTI است تعیین خواهد شد.

حال مثال ۱۰ را به این روش مجدداً حل می‌کنیم:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t \Rightarrow y(t) = (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t)$$

$$y'(t) = (-2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t) + (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta(t)$$

$$y''(t) = \dots = (4K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t) + (-4K_1 e^{-2t} + 2K_2 e^t) \delta(t) + (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta'(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (-3K_1 e^{-2t} + 3K_2 e^t) \delta(t) + (K_1 + K_2) \delta'(t) - (-2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t) = h(t)$$

۸-۲- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلی (زمان گسسته)

هدف از تحلیل معادله تفاضلی:

(۱) رابطه مستقیمی بین ورودی و خروجی به دست آوریم.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

(۲) خروجی را به ازای ورودی مشخص پیدا کنیم.

۸-۲-۱ روش حل معادله تفاضلی

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

(الف) روش مستقیم:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad \text{پاسخ کامل:} \quad y_p[n] \quad \text{پاسخ خاص:} \quad y_h[n] \quad \text{پاسخ عمومی:}$$

با فرض آنکه معادله تفاضلی مرتبه دوم است $N=2$ ، برای بدست آوردن جواب عمومی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = 0$$

$$y_h[n] = K r^n \Rightarrow (a_0 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2}) \cdot K r^n = 0$$

$$r_1, r_2 \quad \text{حقیقی و متمایز} \quad y_h[n] = k_1 (r_1)^n + k_2 (r_2)^n$$

$$r_1 = r_2 \quad y_h[n] = k_1 (r_1)^n + k_2 n (r_2)^n$$

مثال ۱) مطلوب است خروجی اگر $x[n] = n^2$ و $y[0] = 1$ باشد.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

پاسخ عمومی:

$$y[n] + 2y[n-1] = 0 \Rightarrow y_h[n] = k r^n \Rightarrow k r^n + 2k r^{n-1} = 0$$

$$k r^n (1 + 2 r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = (-2) \Rightarrow y_h[n] = k (-2)^n$$

پاسخ خصوصی:

$$y[n] + 2y[n-1] = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

$$y_p[n] = An + B \Rightarrow An + B + 2(A(n-1) + B) = 2n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ -2A + 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p[n] = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

جواب خصوصي

پاسخ كامل:

$$\begin{cases} y[n] = k(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{8}{9}; & y[n] = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \\ y[0] = 1 \end{cases}$$

(ب) روش بازگشتي

با يك مثال اين روش را پيروي مي كنيم:

مثال ۲) سيستم LTI و علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد.

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه $h[n]$

ب) پاسخ ضربه معكوس $h_I[n]$

ج) به ازاي ورودی داده شده $x[n] = \delta[n-1]$ خروجي را بدست آوريد.

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \quad \text{(الف)}$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] + \delta[n]$$

روش بازگشتي:

$$h[0] = \frac{1}{4}h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = \frac{1}{4}h[0] = \frac{1}{4}(1)$$

$$h[2] = \frac{1}{4}h[1] = \frac{1}{4}(1)^2$$

⋮

$$h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ب) برای بدست آوردن $h_I[n]$ باید فرمول زیر برقرار باشد:

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h_I[n-k] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k u[k] h_I[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k h_I[n-k] = \delta[n]$$

سؤال: اگر سیستمی LTI و علی باشد آیا معکوس سیستم نیز LTI و علی خواهد بود؟

$$h_I[n] + \frac{1}{4} h_I[n-1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 h_I[n-2] + \left(\frac{1}{4}\right)^3 h_I[n-3] + \dots = \delta[n]$$

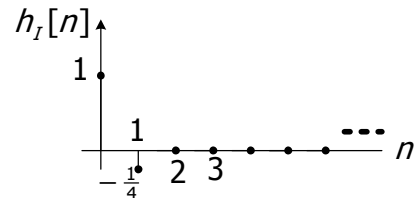
روش بازگشتی:

$$h_I[0] = 1$$

$$h_I[1] + \frac{1}{4} h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[1] = -\frac{1}{4}$$

$$h_I[2] + \frac{1}{4} h_I[1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[2] = 0$$

$$h_I[3] = 0, \dots \Rightarrow h_I[n] = \delta[n] - \frac{1}{4} \delta[n-1]$$



ج) پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ در قسمت الف بدست آورده شد، با توجه به خاصیت TI (نامتغیربازمان) بودن سیستم داریم:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = h[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

مثال ۳) سیستم LTI با معادله تفاضلی $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$ توصیف شده است. با فرض سکون اولیه (علی) پاسخ ضربه را به دست آورید.

تذکر: اگر ورودی ضربه واحد بود پیشنهاد می شود از روش بازگشتی معادله را حل کنید.

روش اول: بکارگیری روابط بازگشتی و تعیین پاسخ به ازاء ورودی خاص با توجه به شرط سکون اولیه

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

$$h[n] + 2h[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$h[0] = -2h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = -2h[0] = -2$$

$$h[2] = -2h[1] = (-2)^2$$

$$h[3] = (-2)^3$$

⋮

○ ○

$$h[k] = (-2)^k \Rightarrow h[n] = (-2)^n u[n]$$

روش دوم: بدست آوردن خروجي بر حسب ورودی بطور کلی با استفاده از روابط بازگشتی.

$$\begin{aligned} y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \\ y[0] + 2y[-1] &= x[0] \\ y[1] + 2y[0] &= x[1] \\ y[2] + 2y[1] &= x[2] \\ &\vdots \\ y[n-2] + 2y[n-3] &= x[n-2] \\ y[n-1] + 2y[n-2] &= x[n-1] \\ y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \end{aligned}$$

برای بدست آوردن رابطه صریح خروجی بر حسب ورودی (FIR) به طریق ذیل عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} (-2)^n (y[0] + 2y[-1] &= x[0]) \\ (-2)^{n-1} (y[1] + 2y[0] &= x[1]) \\ (-2)^{n-2} (y[2] + 2y[1] &= x[2]) \\ &\vdots \\ (-2)^2 (y[n-2] + 2y[n-3] &= x[n-2]) \\ (-2)^1 (y[n-1] + 2y[n-2] &= x[n-1]) \\ (-2)^0 (y[n] + 2y[n-1] &= x[n]) \\ \hline \sum &\Rightarrow y[n] = (-2)^0 x[n] + (-2)^1 x[n-1] + (-2)^2 x[n-2] + \dots + (-2)^n x[0] \\ &= \sum_{k=0}^n (-2)^k x[n-k] = \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} x[k] \\ \Rightarrow h[n] &= \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \delta[k] = (-2)^n \sum_{k=0}^n \delta[k] = (-2)^n u[n] \end{aligned}$$

روش سوم: استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم های LTI

پاسخ پله:

$$z[n] + 2z[n-1] = u[n]$$

پاسخ همگن:

$$z[n] + 2z[n-1] = 0$$

$$z_h[n] = k(r)^n \Rightarrow k r^n (1 + 2r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow z_h[n] = k(-2)^n$$

پاسخ خصوصی:

$$z[n] + 2z[n-1] = 1, n \geq 0 \Rightarrow z_p[n] = A \Rightarrow A + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

پاسخ کامل:

$$z[n] = k(r)^n + \frac{1}{3}, n \geq 0 \Rightarrow z[-1] = k(-2)^{-1} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow z[n] = \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n + \frac{1}{3}, n \geq 0 \Rightarrow z[n] = \left[\left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n + \frac{1}{3}\right]u[n]$$

محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از پاسخ پله:

$$\Rightarrow h[n] = z[n] - z[n-1] = \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n u[n] + \frac{1}{3}u[n] - \frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{3}u[n-1]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n u[n] - \frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n] = \left(\frac{2}{3}\right)(-2)^n \left[\frac{1}{2} + 1\right]u[n] = (-2)^n u[n]$$

۹-۲- نمایش سیستم LTI با استفاده از بلوک دیاگرام (مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر)

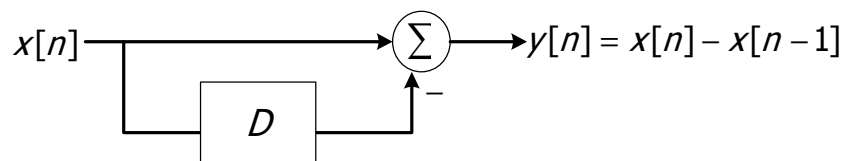
زمان پیوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

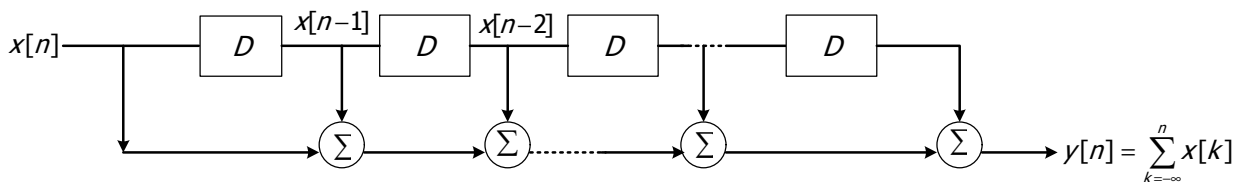
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^t} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

زمان گسسته

هم ارز با مشتق در پیوسته :



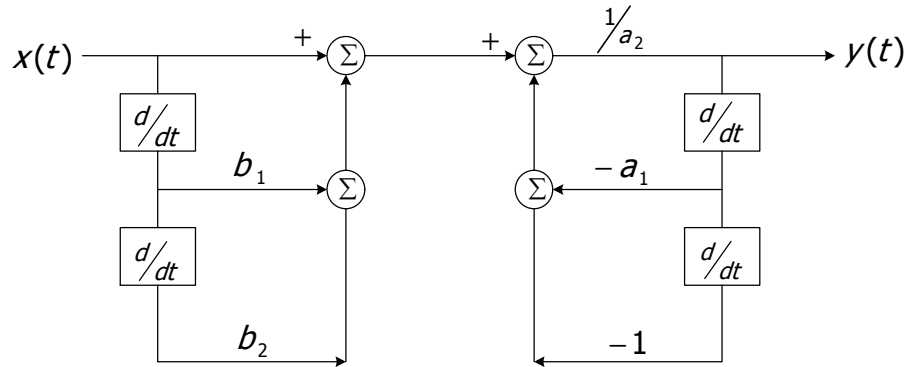
هم ارز با انتگرال در پیوسته :



$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) \quad (\text{مثال ۴})$$

الف) نمایش سیستم با استفاده از بلوک‌های مشتق‌گیر

$$y(t) = -\frac{a_1}{a_2} y'(t) - \frac{1}{a_2} y''(t) + \frac{1}{a_2} x(t) + \frac{b_1}{a_2} x'(t) + \frac{b_2}{a_2} x''(t)$$

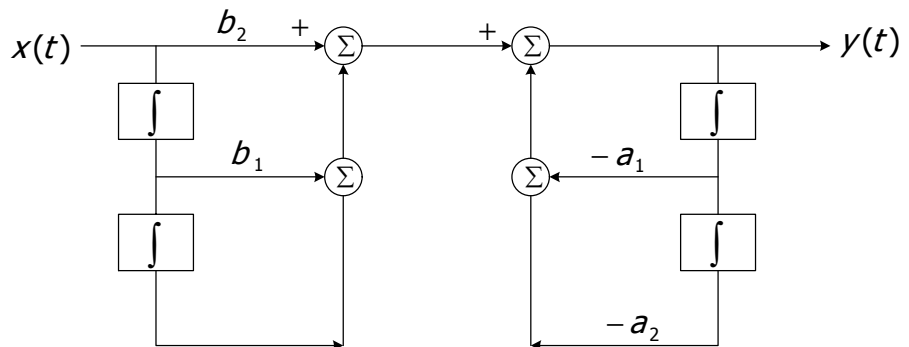


ب) نمایش سیستم با استفاده از بلوک‌های انتگرال‌گیر

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t)$$

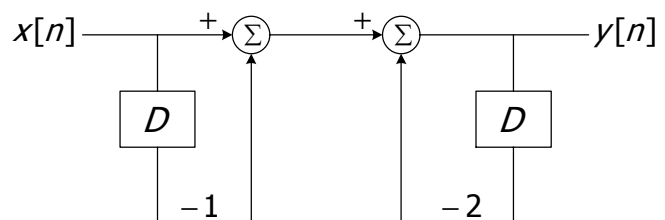
$$\Rightarrow y''(t) = -a_1 y'(t) - a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t)$$

$$y(t) = -a_1 \int y(t) dt - a_2 \iint y(t) dt + \int \int x(t) dt + b_1 \int x(t) dt + b_2 x(t)$$



$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1] \quad (\text{مثال ۵})$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - 2y[n-1]$$



تمرین: رسم بلوک دیاگرام؟

سیستم زمان پیوسته

$$y'''(t) + 3y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x'(t)$$

سیستم زمان گسسته

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

۲-۱۰- خلاصه

با توجه به رابطه کانولوشن می‌توان خواص جابه‌جایی‌پذیری، توزیع‌پذیری و شرکت‌پذیری را برای سیستم‌های LTI تعریف کرد.

با معرفی تابع تبدیل می‌توان خواص جدیدی برای سیستم‌های LTI بیان کرد.

کانولوشن به دو روش ترسیمی و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات دیفرانسیل، با حل معادله همگن و یافتن جواب خصوصی به ازای ورودی خاص، جواب کلی سیستم از جمع پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی بدست می‌آید.

برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است.

با استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI و یا محاسبه پاسخ ضربه سیستم به طور مستقیم می‌توان پاسخ به ورودی ضربه را یافت.

سیستم‌های LTI را با استفاده از بلوک دیاگرام نیز می‌توان نشان داد.