

فصل اول

معرفي سيگنال هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۱-۱- تعریف سیگنال

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است.

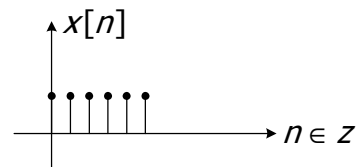
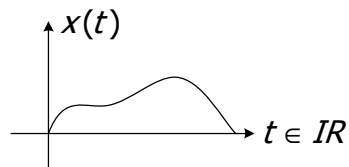
$x[n]$ سیگنال زمان گسسته $x(t)$ سیگنال زمان پیوسته

t, n متغیرهای مستقل و x متغیر وابسته یا تابع می‌باشد.

سیستم: مجموعه‌ای از اجزای گرد آمده در کنار هم.

۱-۲- طبقه‌بندی سیگنال‌ها

۱-۲-۱- سیگنال‌های زمان گسسته



بدیهی است که با نمونه‌برداری از سیگنال زمان پیوسته می‌توان سیگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۱-۳- سیگنال‌های زوج و سیگنال‌های فرد

$$x[n] = x[-n] \quad \text{یا زوج, Even} \quad x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = -x[-n] \quad \text{یا فرد, Odd} \quad x(t) = -x(-t)$$

تذکر ۱: سیگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

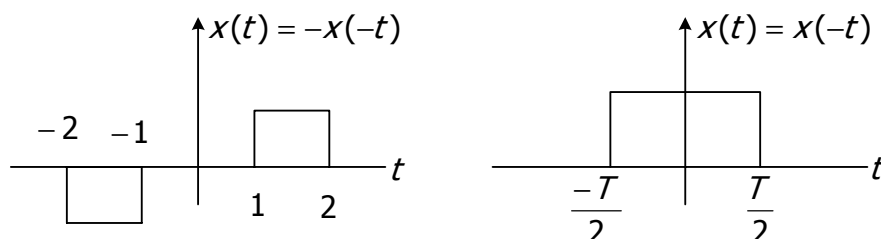
تذکر ۲: هر سیگنال دلخواه را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = \text{Even}(x(t)) + \text{Odd}(x(t))$$

$$\text{Even}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$\text{Odd}(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

مثال ۱)



۱-۴- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب به سیگنالی گفته می‌شود که در بازه‌های زمانی مشخص عیناً تکرار شده باشد.

$$x(t) = x(t+T) = x(t+kT) \quad \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x[n] = x[n+N] = x[n+kN] \quad \Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad k \in \mathbb{Z}$$

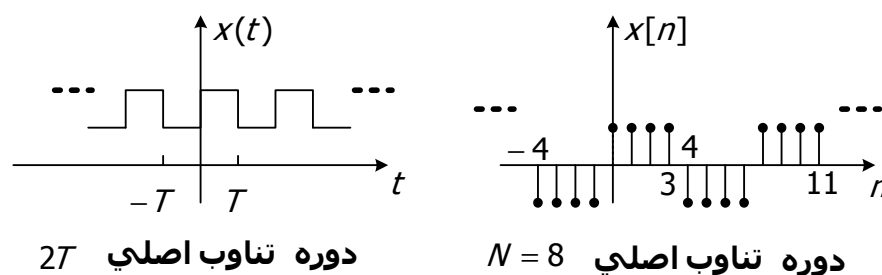
تذکر ۱: بدیهی است که اگر N, T دوره تناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره تناوب است.

تذکر ۲: کوچکترین دوره تناوب دوره تناوب اصلی است (T در پیوسته، N در گسسته) و فرکانس تعریف شده با کوچکترین

دوره تناوب، فرکانس اصلی است. (ω_0 در پیوسته، Ω_0 در گسسته)

تذکر ۳: دوره تناوب سیگنال زمان پیوسته (T) باید عدد مثبت باشد، درحالیکه دوره تناوب سیگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بایستی صحیح نیز باشد.

مثال ۲)



۱-۵- سیگنال‌های انرژی و توان

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

انرژی

توان متوسط

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

يك سيگنال به عنوان سيگنال انرژي شناخته مي شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۶-۱- عملیات روی متغیر وابسته

$$y[n] = Ax[n] \quad y(t) = Ax(t) \quad (1)$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (2)$$

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \quad y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (3)$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (4)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

۷-۱- عملیات روی متغیر مستقل

۱-۷-۱- شیفت زمانی

$$y[n] = x[n - n_0] \quad y(t) = x(t - t_0)$$

شیفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت می دهیم تا $y(t)$ بدست آید.

شیفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت چپ شیفت می دهیم تا $y(t)$ بدست آید.

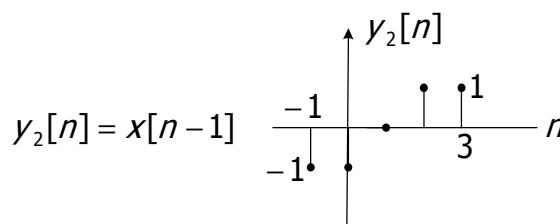
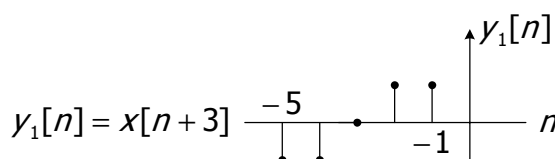
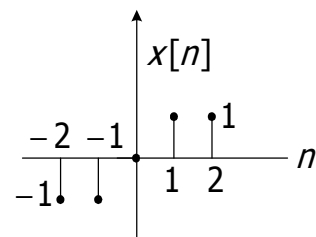
تذکر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سیگنال $x(t - t_0)$ از $x(t)$ عقبتر است (به لحاظ زمانی) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سیگنال

$x(t - t_0)$ از $x(t)$ جلوتر است.

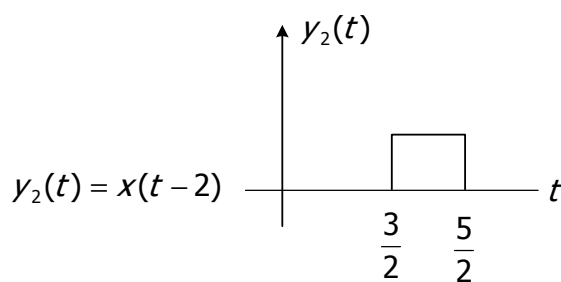
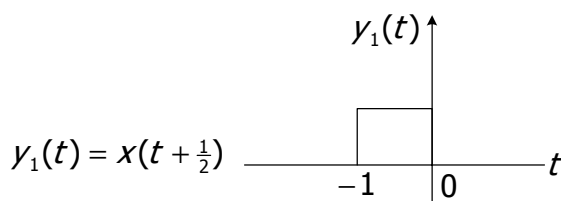
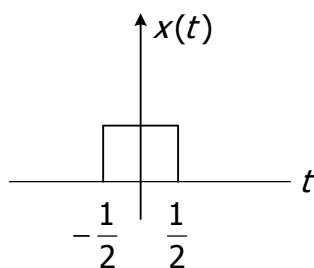
تذکر ۲: در مورد سیگنال های زمان گسسته نیز بسته به اینکه n_0 مثبت و یا منفی باشد سیگنال $x[n]$ را به راست و یا چپ به

اندازه n_0 واحد شیفت می دهیم تا $y[n]$ بدست آید.

مثال ۳)



مثال ۴)



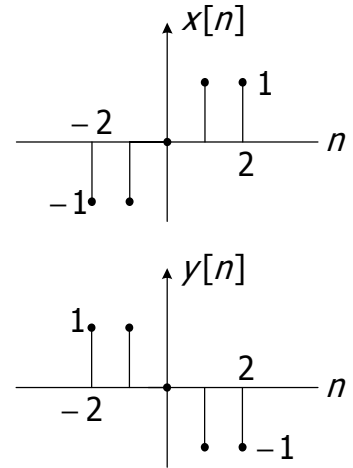
در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

۱-۷-۲- وارون سازي زماني

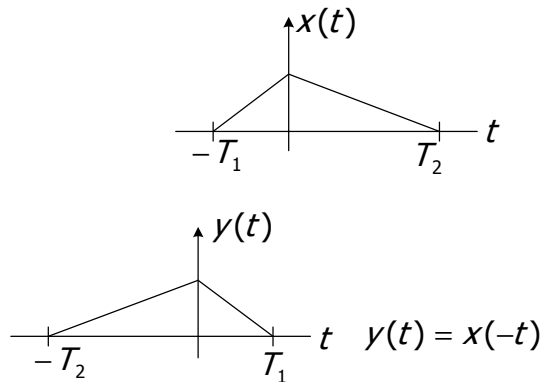
$$y[n] = x[-n] \quad y(t) = x(-t) \quad (2)$$

$x(-t)$ يا $x[-n]$ انعكاس $x(t)$ و يا $x[n]$ نسبت به محور قائم هستند.

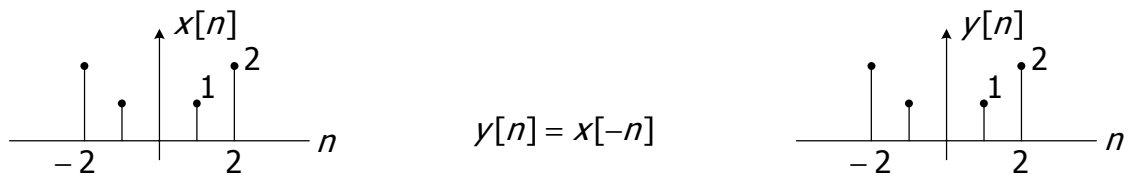
مثال ۵)



مثال ۶)



مثال ۷)



برای سیگنالی که نه زوج و نه فرد است واریون زمانی آن نه فرد و نه زوج است. اما برای سیگنال زوج واریون زمانی زوج است ولی برای سیگنال فرد با توجه به خاصیت $x[n] = -x[-n]$ واریون زمانی آن $-x[n]$ است.

۱-۷-۳- تغییر مقیاس زمانی

$$y[n] = x\left[\frac{1}{k}n\right] \quad ; k \in \mathbb{Z} \quad \text{یا} \quad y[n] = x[kn] \quad y(t) = x(at) \quad ; a \in \mathbb{R} \quad (3)$$

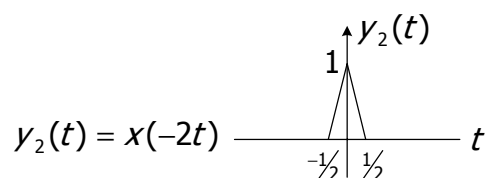
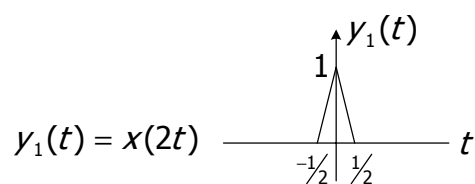
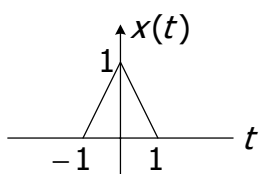
الف) اگر $|a| > 1$ باشد $y(t)$ فشرده شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود.

ب) اگر $|a| < 1$ باشد $y(t)$ باز شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود.

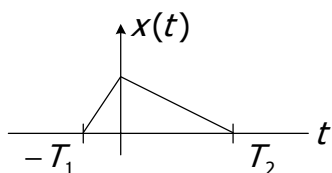
ج) اگر $a < 0$ باشد باید بعد از تغییر مقیاس، واریون زمانی انجام داد.

تذکر: در زمان پیوسته ماهیت سیگنال عوض نمی‌شود، اما در زمان گسسته ماهیت سیگنال تغییر می‌کند و سیگنال جدیدی بدست می‌آید.

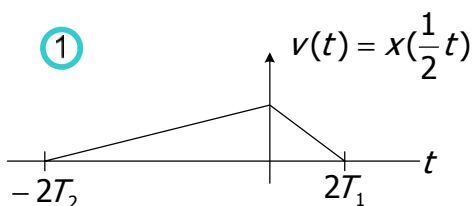
مثال ۸)



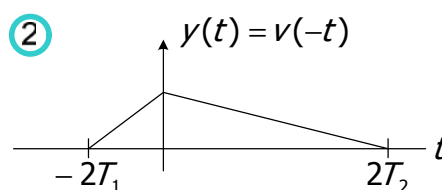
مثال ۹



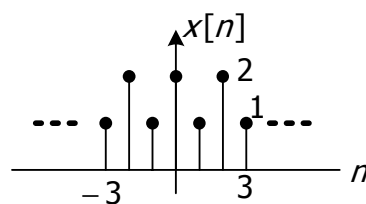
$$y(t) = x\left(-\frac{1}{2}t\right)$$



وارون زمانی



$$y_1[n] = x[2n], \quad N = 2 \quad \text{مثال ۱۰}$$



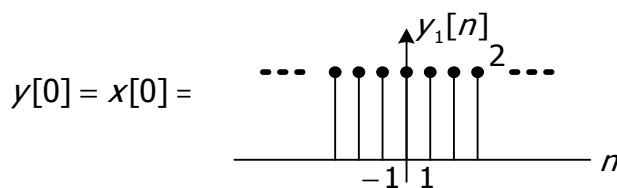
برای حل اینگونه مسائل به روش زیر عمل می‌کنیم:

با جایگذاری n در فرمول $y[n]$ مقادیر بدست آمده برحسب $x[n]$ می‌باشند.

⋮

$$y[-1] = x[-2] = 2$$

$$y[1] = x[2] = 2$$



$$y[0] = x[0] = 1$$

$$y[2] = x[4]$$

⋮

دوره تناوب سیگنال جدید $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

تذکر: $y[n] = x[kn]$ نسبت به $x[n]$ فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می‌دهد.

$$y_2[n] = x\left[\frac{1}{2}n\right] \quad \text{مثال ۱۱}$$

⋮

$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = x[0] = 2$$

$$y[1] = x\left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$y[2] = x[1] = 1$$

⋮

دوره تناوب سیگنال جدید برابر $N = 4$ است.

$$y[n] = x\left[\frac{1}{k}n\right]$$

تذکر: نسبت به $x[n]$ باز شده که در نتیجه تعدادی صفر به $y[n]$ اضافه خواهد شد. بدین ترتیب

ماهیت سیگنال گسسته در اثر تغییر مقیاس زمانی تغییر می‌کند.

تذکر: اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زمانی در اثر فشرده شدن، دوره تناوب

سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش می‌یابد.

۱-۷-۴- رسم سیگنال به روش منظم

$$y(t) = x(at - b)$$

$$x(t) \rightarrow v(t) = x(t - b)$$

$$v(t) \rightarrow y(t) = v(at) = x(at - b)$$

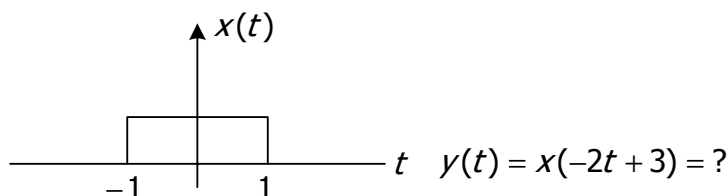
4)

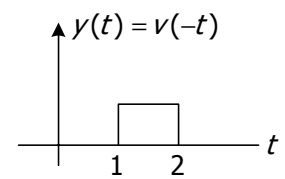
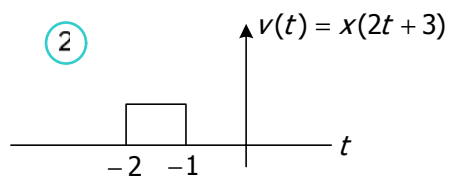
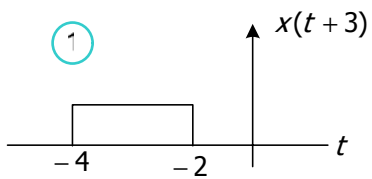
$$y[n] = x[kn - n_0] \quad \left(x\left[\frac{1}{k}n - n_0\right]\right)$$

$$x[n] \rightarrow v[n] = x[n - n_0]$$

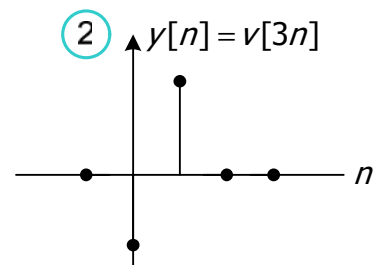
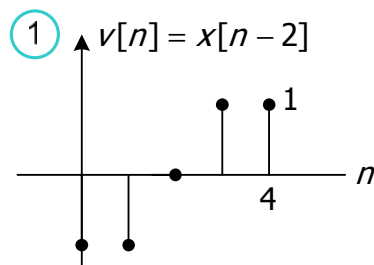
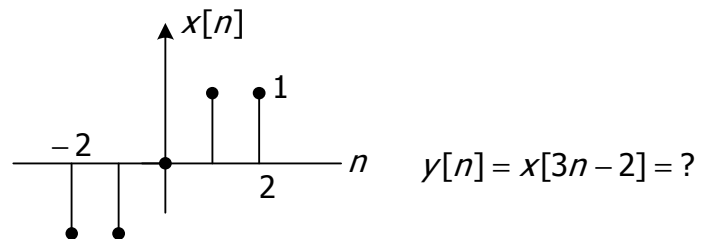
$$v[n] \rightarrow y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad \left(x\left[\frac{1}{k}n - n_0\right]\right)$$

مثال ۱۲



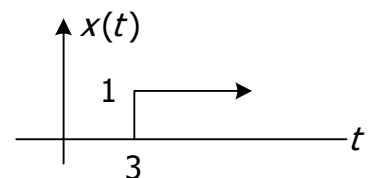


مثال ١٣

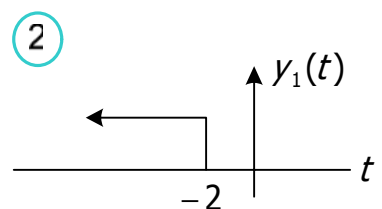
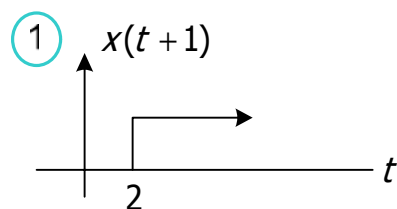


مثال ١٤

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

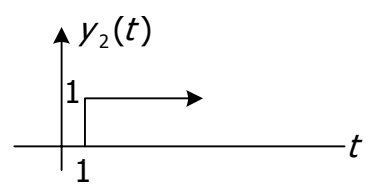
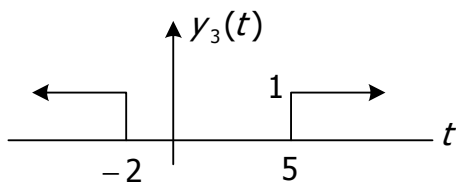


$y_1(t) = x(1-t)$ (الف)



$y_3(t) = x(1-t) + x(t-2)$ (ج)

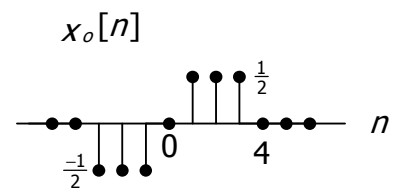
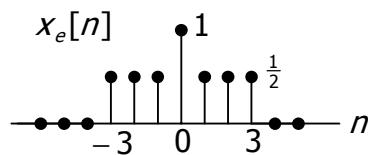
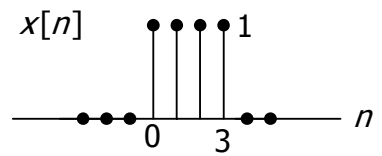
$y_2(t) = x(3t)$ (ب)



$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,3 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

$$\text{میدانیم} \quad \begin{cases} x_e = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \\ x_o = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$

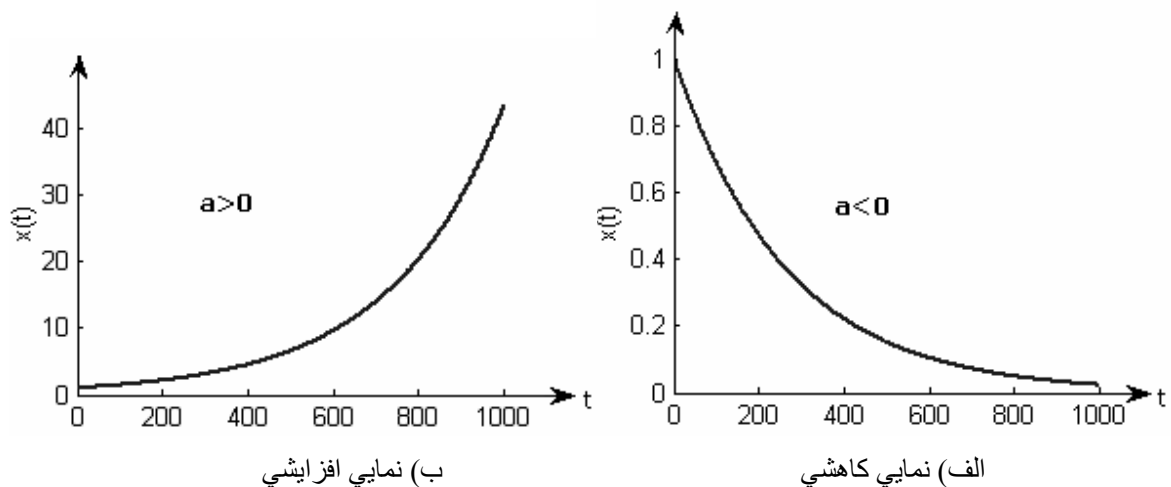


۸-۱- معرفی سیگنال‌های مهم

در این قسمت چند سیگنال اساسی زمان پیوسته و زمان گسسته را معرفی می‌کنیم. این سیگنال‌ها نه تنها به دفعات پیش می‌آیند بلکه توسط آنها می‌توان سیگنال‌های پیچیده‌ای را فرموله و تولید کرد. مهم‌ترین کاربرد آنها در آزمایشگاه مشخص می‌شود.

۱-۸-۱- سیگنال نمایی

$$x(t) = Be^{at} \quad \text{زمان پیوسته}$$

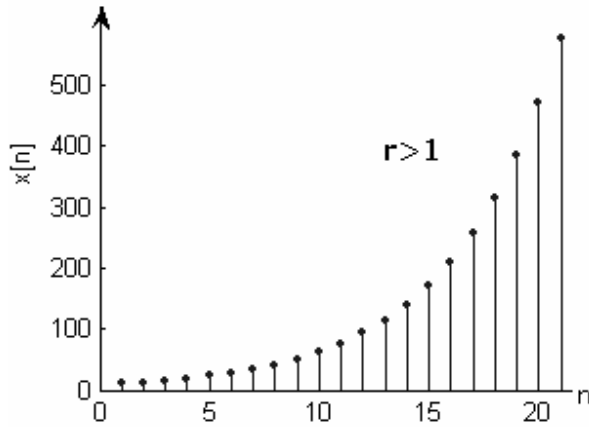


با فرض اینکه $a, B \in \mathbb{R}$ باشند، با توجه به مثبت و یا منفی بودن a سیگنال نمایی به یکی از دو فرم افزایشی و یا کاهشی خواهد بود.

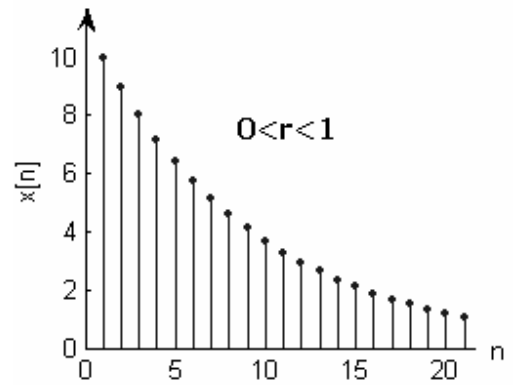
تذکر: چنانچه دامنه سیگنال خروجی سیستمی با افزایش زمان به طور نامحدود زیاد شود، سیستم تحت بررسی به عنوان سیستم ناپایدار شناخته می‌شود.

سیگنال زمان گسسته $x[n] = B(r^n)$

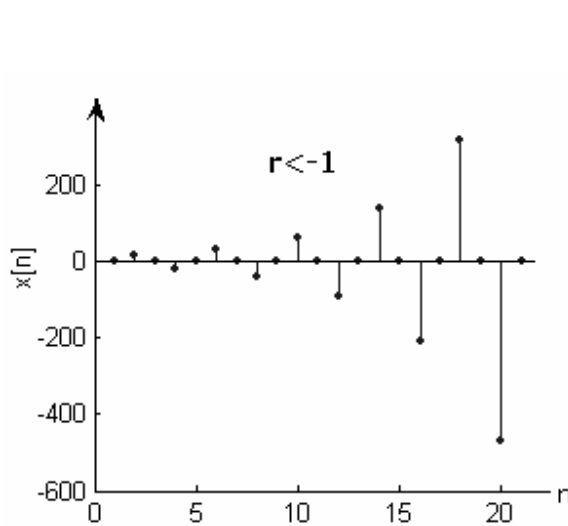
سیگنال زمان گسسته نمایی بسته به مقادیر مختلف r چهار حالت می‌تواند داشته باشد.



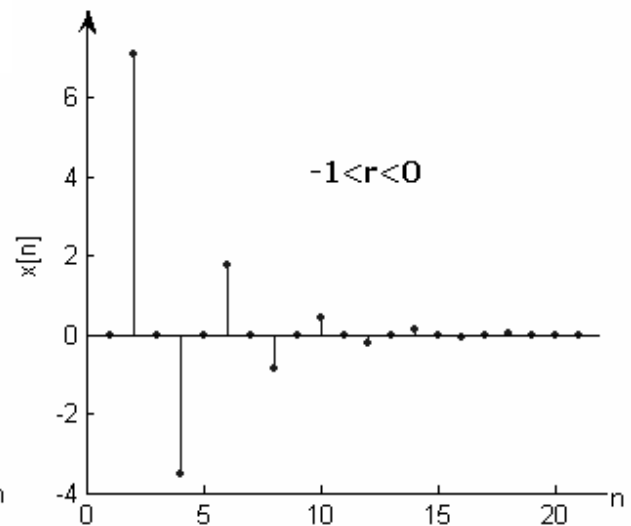
(الف) نمایی افزایشی



(ب) نمایی کاهشی



(ج) نوسانی افزایشی



(د) نوسانی کاهشی

۱-۸-۲- سیگنال سینوسی

زمان پیوسته $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ و $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

تذکر: سیگنال سینوسی همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

(مثال ۱)

$$x(t) = \cos\left(\frac{1}{6}t\right) \quad (\text{الف})$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

$$x(t) = \cos\left(\frac{8\pi}{31}t\right) \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}$$

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad \text{و} \quad x[n] = A \cos(\Omega n + \varphi) \quad \text{سیگنال زمان گسسته}$$

تذکر: سیگنال زمان گسسته سینوسی به شرطی متناوب است که بتوان $N \in \mathbb{Z}^+$ را بدست آورد به نحوی که $x[n] = x[n + N]$ گردد. (این سیگنال برخلاف سیگنال زمان پیوسته سینوسی بعضاً متناوب نیست.)

$$A \cos(\Omega n + \varphi) = A \cos(\Omega n + \Omega N + \varphi) \rightarrow \Omega N = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\Omega}, N \in \mathbb{Z}^+$$

(مثال ۲)

(الف)

$$x[n] = \cos\left[\frac{2\pi}{12}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}} = 12k = 12, \quad (k=1)$$

(ب)

$$x[n] = \cos\left[\frac{8\pi}{31}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}k = 31, \quad (k=4)$$

(ج)

$$x[n] = \cos\left[\frac{1}{6}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{1}{6}} = 12k\pi$$

متناوب نیست

۱-۸-۳- سیگنال نمایی مختلط

$$x(t) = B e^{j\omega t} \quad \text{یا} \quad x(t) = B e^{-j\omega t} \quad \text{زمان پیوسته}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad x(t) = B e^{j\omega t} = B \cos(\omega t) + jB \sin(\omega t)$$

$$x[n] = B e^{+j\Omega n} \quad \text{یا} \quad x[n] = B e^{-j\Omega n} \quad \text{زمان گسسته}$$

$$x[n] = B e^{j\Omega n} = B \cos(\Omega n) + jB \sin(\Omega n) \quad N = \frac{2k\pi}{\Omega}, \quad N \in \mathbb{Z}^+, K \in \mathbb{Z}$$

تذکر ۱: سیگنال زمان گسسته نمایی مختلط $x[n] = B e^{+j\Omega n}$ می‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذکر ۲: سیگنال زمان گسسته نمایی مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اینکه در زمان نسبت به n می‌تواند متناوب باشد، در فرکانس نیز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

تذکر ۳: اگر سیگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان باید به حاصل جمع دو سیگنال تبدیل شود و دوره تناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره تناوب مشترک را به دست می‌آوریم.

مثال ۳)

الف) $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \dots \Rightarrow T = 2\pi$$

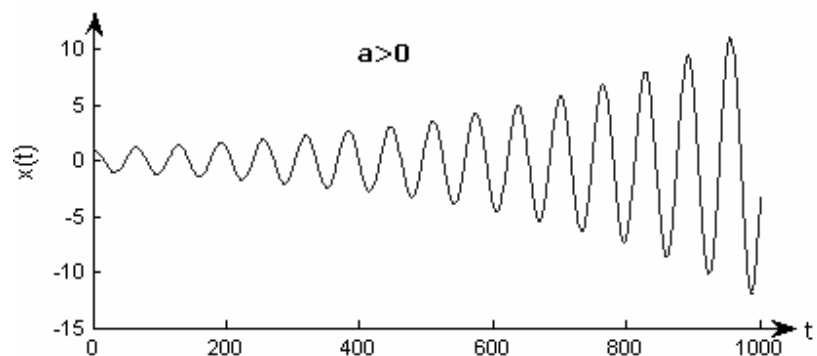
ب) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \dots = 24, \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \dots, \quad N = 24$$

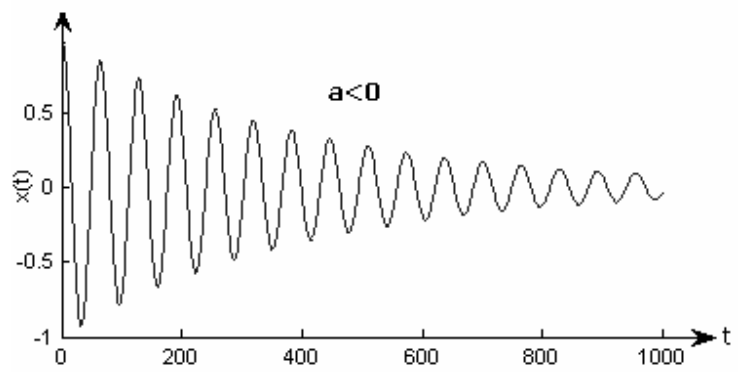
۱-۸-۴- سیگنال سینوسی میراثونده

زمان پیوسته $x(t) = Be^{at} \cos(\omega t + \varphi)$

تذکر: سیگنال نمایی متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتی باعث می‌شود که سیگنال نهایی متناوب نباشد.

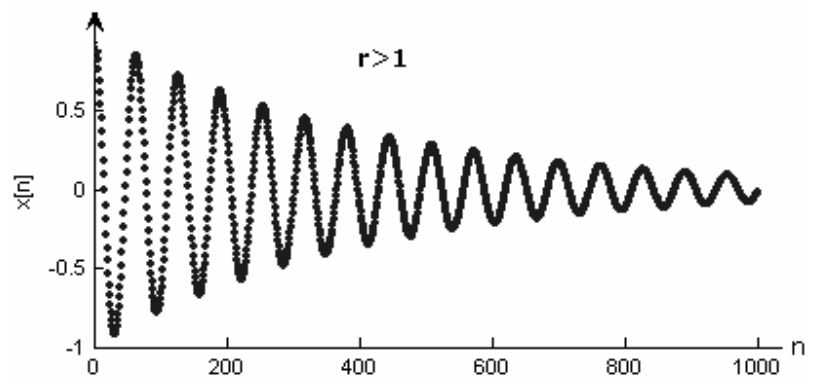


الف) سیگنال سینوسی میراثونده افزایشی

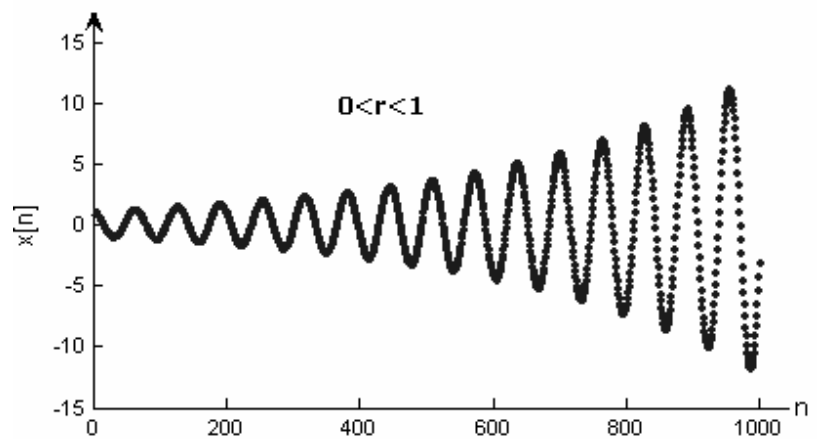


ب) سیگنال سینوسی میراثونده کاهشی

$$x[n] = B(r^n) \cos[\Omega n + \varphi] \quad \text{زمان گسسته}$$



الف) سیگنال سینوسی میراثونده کاهشی



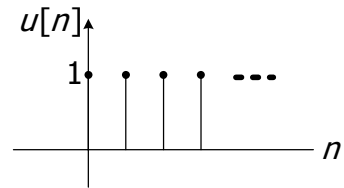
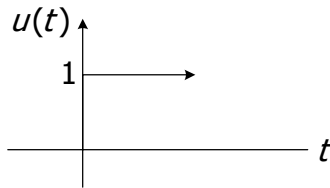
ب) سیگنال سینوسی میراثونده افزایشی

۱-۹-توابع ویژه

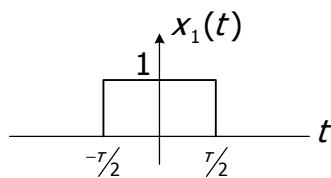
۱-۹-۱-تابع پله واحد

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{زمان پیوسته}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{زمان گسسته}$$

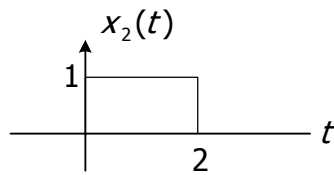


تذکر: توابعی که فرم هندسی دارند را می‌توان بر حسب تابع پله بیان کرد:
(مثال ۴)



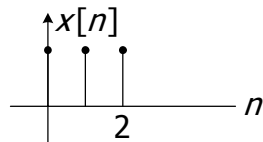
$$x_1(t) = u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$$

(الف)



$$x_2(t) = u(t) - u(t - 2)$$

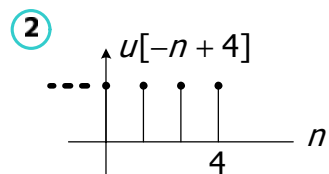
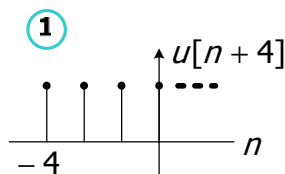
(ب)



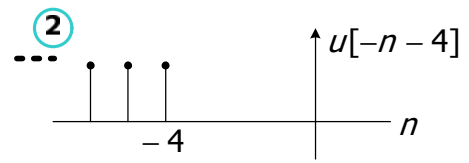
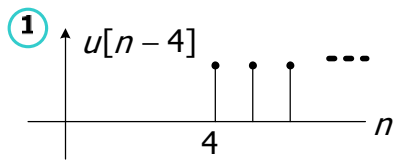
$$x[n] = u[n] - u[n - 3]$$

(ج)

$$u[-n + 4] \quad \text{(د)}$$



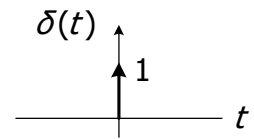
$$u[-n - 4] \quad \text{(ن)}$$



۱-۹-۲- تابع ضربه

زمان پیوسته

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{مقدار/رویزه} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{-1} \delta(t) dt = 0$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} \delta(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau$$

$$\lambda + t_0 = \tau$$

خواص:

(۱) بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t)u(t)$$

مثال ۵

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t)u(t-2)$$

(۲) خاصیت غربالی تابع ضربه

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \delta(t)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

(۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \lambda) d\lambda = x(t)$$

(۴) زوج بودن تابع ضربیه

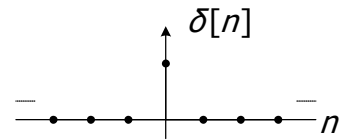
$$\delta(t) = \delta(-t)$$

(۵*)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

زمان گسسته

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربیه واحد

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=n}^{-\infty} \delta[m] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$u[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-n_0-k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \qquad \delta[n] = u[-n] - u[-n-1]$$

تابع ضربیه چون تابعی زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

(۱) بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \leq -2 \\ 0 & o.w \end{cases} = x[n] u[-n-2]$$

(۲) خاصیت غربالی تابع ضربیه

* این رابطه را اثبات کنید.

$$y[n] = x[n] \cdot \delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال 6:

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

(۳) انتگرال کانولوشن

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = x[n]$$

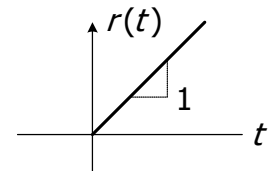
(4) زوج بودن تابع ضربیه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شیب

زمان پیوسته

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



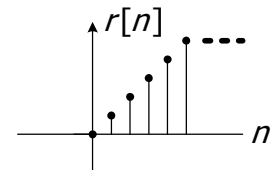
رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$r(t) = t u(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

زمان گسسته

$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



رابطه بین تابع شیب و پله واحد

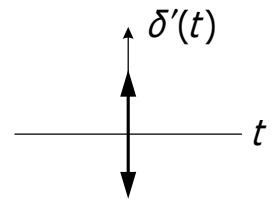
$$r[n] = n u[n]$$

$$u[n] = ?$$

۱-۹-۴- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



خواص:

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

خاصیت (۱)

اثبات:

$$(x(t) \cdot f(t))' = x'(t)f(t) + x(t)f'(t)$$

$$\text{if } f(t) = \delta(t)$$

$$\downarrow = x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)$$

$$(x(t)\delta(t))'$$

$$=$$

$$(x(0)\delta(t))'$$

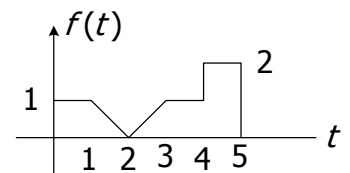
$$=$$

$$x(0)\delta'(t) = x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

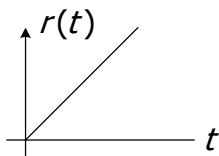
خاصیت (۲)

مثال (۷) مطلوب است بیان $f(t)$ بر حسب توابع ویژه ؟

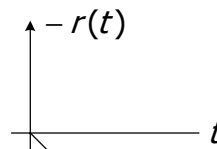


از منتهی الیه سمت چپ شروع به نوشتن می‌کنیم. هر جا که شکل تغییر کند یعنی تابع عوض شده. اولین کاری که انجام می‌دهیم ضریب زاویه کلیه خط‌ها را بدست می‌آوریم :

در فاصله $1 \leq t \leq 2$ شکل تغییر کرده و دارای شیب به سمت پایین است. در فاصله $2 \leq t \leq 3$ نیز شکل دوباره تغییر می‌کند.



$$\begin{matrix} (2,0) \\ (3,1) \end{matrix} \Rightarrow m = 1$$



$$\begin{matrix} (1,1) \\ (2,0) \end{matrix} \Rightarrow m = -1$$

$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$

$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) - 2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a e^{-t}$ هر يك از توابع زیر را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم کنید.

$$f_1(t) = f(t) u(t) \quad \text{الف}$$

حل

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= f'(t) u(t) + f(t) u'(t) \\ &= f'(t) u(t) + f(0) \delta(t) + -a e^{-t} u(t) + a \delta(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} a e^{-t} dt = -a e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = a$$

$$f_2(t) = f(t-1) u(t-2) \quad \text{ب}$$

$$f_3(t) = f(t-1) u(t-1) \quad \text{ج}$$

$$f_4(t) = f(t-1) u(t) \quad \text{د}$$

سیستم و تعریف آن :

پروژه‌ای که باعث تغییر و تحول در یک سیگنال می‌شود .
مجموعه‌ای منظم که به کمک یکدیگر هدف مشخصی را برآورده می‌سازد.

بیان روابط بین خروجی و ورودی در یک سیستم :

زمان پیوسته

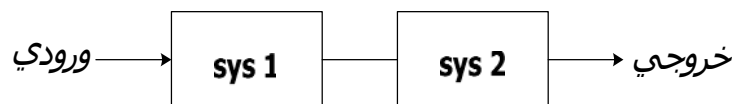
(۱) با استفاده از معادلات دیفرانسیل (۲) تابع تبدیل

زمان گسسته

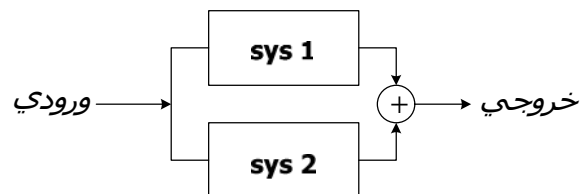
(۱) معادلات تفاضلی (۲) تابع تبدیل

۱-۱۰-۱- تقسیم‌بندی سیستم‌ها

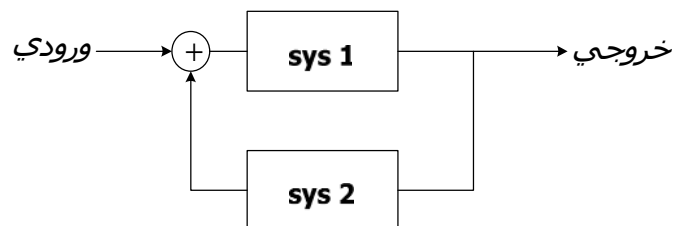
۱-۱۰-۱-۱- اتصال سری:



۱-۱۰-۱-۲- اتصال موازی:



۱-۱۰-۱-۳- اتصال فیدبک:



۱-۱۱-۱- خواص سیستم‌ها

۱-۱۱-۱- حافظه

سیستم بدون حافظه است اگر خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر سیستم با حافظه است اگر خروجی به مقادیر گذشته ورودی وابسته باشد.

مثال ۱)

بدون حافظه	(د) $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	الف) بدون حافظه $y[n] = 2x[n] + x^2[n]$
با حافظه	(ن) $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\lambda) d\lambda$	ب) با حافظه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$
با حافظه	و) $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$	ج) با حافظه $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$

۱-۱۱-۲- پایداري (BIBO)

سیستمی پایدار است که به ازای ورودی محدود خروجی محدود بدهد.

$$|x(t)| \leq M_x < \infty, \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty, \forall t$$

تذکر ۱: اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.

تذکر ۲: اگر سیستمی با ورودی نامحدود و خروجی نامحدود داشتیم هیچ صحبتی نمی‌توان راجع به این سیستم کرد.

¹ Bounded Input Bounded Output

مثال ۲) $y(t) = tx(t)$

$x(t) = u(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$y(t) = tx(t) = r(t)$ و تابعی نامحدود است پس سیستم ناپایدار است.

مثال ۳) $y(t) = e^{x(t)}$

$|y(t)| = |e^{x(t)}| = e^{x(t)} \leq M_y < \infty$

چون $e^{x(t)}$ عدد می‌شود پس باز هم محدود است. بنابراین با توجه به تعریف ریاضی این سیستم پایدار است.

مثال ۴)

$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$

اگر $x[n]$ در همه لحظات محدود باشد شیفته‌های آن هم محدود است پس سیستم پایدار است

مثال ۵)

$$y[n] = r^n x[n] \begin{cases} |r| > 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty : x[n] = u[n] \rightarrow y[n] \rightarrow \infty \Rightarrow \text{ناپایدار} \\ |r| < 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \text{پایدار} \end{cases}$$

مثال ۶)

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \rightarrow x[n] = u[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = r[n]$

ناپایدار

۱-۱۱-۳- علیت (causality)

سیستمی علی است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه یا لحظات قبل بستگی داشته باشد به عبارتی خروجی سیستم به آینده ورودی بستگی ندارد.

تذکر ۱: سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.

تذکر ۲: برای سیستم علی شرط سکون برقرار است.

شرط سکون

$x(t) = 0; \quad t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0; \quad t \leq t_0$

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t); \quad t \leq t_0$$

مثال ۷)

الف) $y(t) = x(t+1)$ غیر علی ب) $v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$ علی

ج)
$$i_c(t) = \frac{dv_c(t)}{dt}; \quad \frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t) - v_c(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t + \Delta t) - v_c(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

با توجه به این که برای مشتق دو تعریف وجود دارد چنانچه از دومین تعریف برای تعیین جریان خازن استفاده نمائیم سیستم مذکور غیر علی خواهد بود.

د) $y(t) = x(t) \cos(t+1)$

خروجی فقط به زمان حال ورودی بستگی دارد و از طرفی چون سیستم بدون حافظه است پس حتما علی است.

ه) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + x[n-1] + \dots$ علی

ن) $y[n] = x[-n] \quad n = -1 \Rightarrow y[-1] = x[1]$ غیر علی

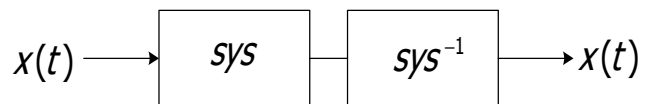
و) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ علی

ی) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$ غیر علی

۱-۱۱-۴- معکوس پذیری

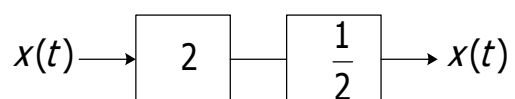
سیستمی معکوس پذیر است که به ازای ورودی‌های متمایز همواره خروجی‌های متمایز داشته باشد.

اگر سیستمی معکوس پذیر باشد می‌توان به صورت زیر نشان داد:



مثال ۴:

الف) $y(t) = 2x(t)$ معکوس پذیر

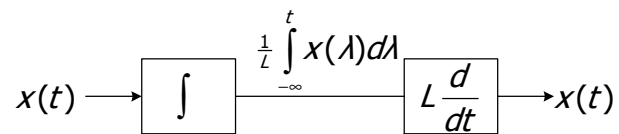


معکوس ناپذیر

$$y(t) = x^2(t) \quad \begin{cases} x(t) = 1 \\ x(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 1 \quad (\text{ب})$$

باید ورودی بدهیم که خروجی را از حالت پایدار خارج نکند.

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda \quad (\text{ج})$$

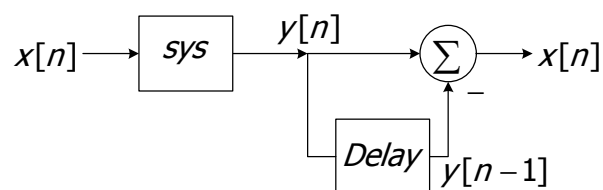


$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{ن})$$

چون به ازای همه ورودی‌های ثابت خروجی صفر می‌شود پس معکوس‌پذیر نیست.

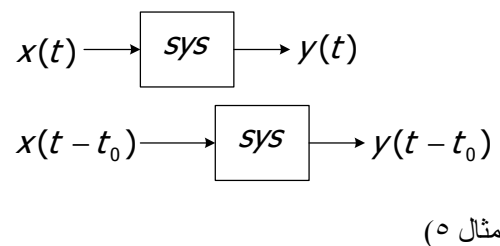
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (\text{و})$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

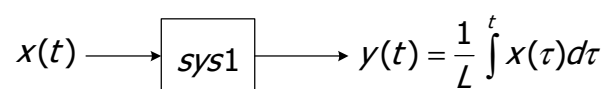


۵-۱۱-۱- نامتغیر با زمان (TI) Time invariant

اگر رفتار و مشخصه‌های سیستم در طی زمان ثابت باشد. به آن سیستم، نامتغیر با زمان گفته می‌شود.



$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (\text{الف})$$



با توجه به تعریف اگر شیفت یافته ورودی را به سیستم اعمال کنیم خروجی هم به همان اندازه شیفت پیدا کند، سیستم مورد نظر نامتغیر با زمان خواهد بود.

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys1}} \longrightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau \underset{t-t_0=\lambda}{=} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$$

$$\text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

نامتغیر با زمان

$$y(t) = \frac{1}{R(t)} x(t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys2}} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{R(t)} x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys2}} \longrightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{R(t)} z(t)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{R(t)} x(t - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{R(t - t_0)} x(t - t_0)$$

متغیر با زمان

$$y(t) = t x(t) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys3}} \longrightarrow y(t) = t x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys3}} \longrightarrow \text{خروجی} = t z(t)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = t x(t - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$\stackrel{?}{=} (t - t_0) x(t - t_0)$$

متغیر با زمان

$$y(t) = x(at) \quad (\text{د})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys4}} \longrightarrow y(t) = x(at)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys4}} \longrightarrow \text{خروجی} = z(at)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = x(at - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$\stackrel{?}{=} x(a(t - t_0))$$

متغیر با زمان

$$y[n] = r^n x[n] \quad (ن)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys5}} \longrightarrow y[n] = r^n x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys5}} \longrightarrow \text{خروجی} = r^n z[n]$$

$$z[n] = x[n - n_0] \Rightarrow \text{خروجی} = r^n x[n - n_0] \stackrel{?}{=} y[n - n_0]$$

$$\stackrel{?}{=} r^{n-n_0} x[n - n_0]$$

متغیر با زمان

$$y[n] = nx[n] \quad (ه)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys6}} \longrightarrow y[n] = n x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{\text{sys6}} \longrightarrow \text{خروجی} = n z[n]$$

$$z[n] = x[n - n_0] \Rightarrow \text{خروجی} = n x[n - n_0] \stackrel{?}{=} y[n - n_0]$$

$$\stackrel{?}{=} (n - n_0) x[n - n_0]$$

متغیر با زمان

۱-۱۱-۶- خطی بودن

سیستم خطی به سیستمی گفته می‌شود که اصل جمع آثار برای آن صدق کند.

شرط خطی بودن:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y(t) \\ x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1) x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad \text{جمع آثار;} \\ 2) ax(t) \longrightarrow \boxed{\text{sys}} \longrightarrow ay(t) \quad \text{همگنی;} \end{array} \right.$$

تذکر: در برقراری همگنی ضریب ثابت a هر عددی می‌تواند باشد، حتی عدد مختلط.

(مثال ۶)

الف) $y(t) = x^2(t)$ غیر خطی

$$(x_1 + x_2) \rightarrow \boxed{\text{sys}} \rightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

ب) $y(t) = x(t)x(t-1)$ غیر خطی

$$ax(t) \rightarrow \boxed{\text{sys}} \rightarrow (ax(t))(ax(t-1)) = a^2 x(t)x(t-1) \neq ax(t)x(t-1)$$

ج) $y(t) = \sin(x(t))$ غیر خطی است چون توابع $\sin, \cos$ غیر خطی هستند.

$$y(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$$ax(t) = a \rightarrow y(t) = 1$$
 خاصیت همگنی نقض شده پس غیر خطی است.

د) $y[n] = nx[n]$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow n(x_1[n] + x_2[n]) = nx_1[n] + nx_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$ax[n] \rightarrow n(ax[n]) = a(nx[n]) = ay[n]$$
 خطی

ه) $y[n] = \text{Real}(x[n])$

$$x[n] = r + js \rightarrow y[n] = r$$

غیر خطی $ax[n] = a(r + js) \Rightarrow \text{if } a = j2 \Rightarrow -2S \neq ay[n]$

و) $y[n] = 2x[n] + 3$

$$x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq (2x_1[n] + 3) + (2x_2[n] + 3)$$
 غیر خطی

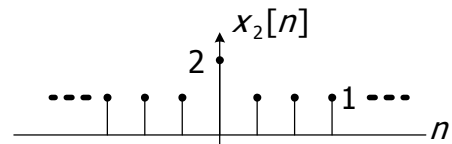
$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

نمونه مسائل فصل

۱- تعیین کنید کدام يك از سیگنال هاي زیر متناوبند؟

$$x_2[n] = u[n] + u[-n] \quad (\text{الف})$$

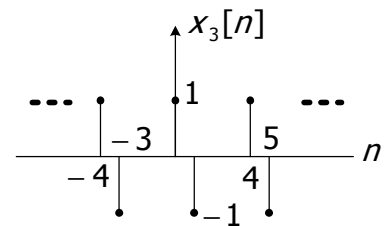
يك راه تشخیص متناوب بودن رسم سیگنال است.



وجود يك ناپیوستگی در نقطه صفر باعث می شود که نامتناوب شود.

$$x_3[n] = \sum \delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k] \quad (\text{ب})$$

در هر دوره تناوب $N = 4$ ، ضربه را شامل شده است.



$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n} \quad (\text{ج})$$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7k = 7 \quad (k=1) \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5k = 5 \quad (k=1) \quad \Rightarrow N = 35$$

۲- تعیین کنید کدام يك از سیگنال هاي زیر معکوس پذیر است؟

$$y[n] = x[n] x[n - 2] \quad (\text{الف})$$

$$x[n] = A\delta[n] \quad , \quad y[n] = A^2\delta[n] \delta[n - 2] = 0 \quad , \quad x[n] = \delta[n - 3] \\ \Rightarrow y[n] = \delta[n - 3] \delta[n - 5] = 0$$

حافظه دار است ولي معکوس پذیر نیست.

$$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$= x[n+1]u[n] + x[n]u[-n-1] \quad ,$$

$$\text{if } x[n] = u[n] \Rightarrow y[n] = \underbrace{u[n+1]u[n]}_{=u[n]} + \underbrace{u[n]u[-n-1]}_{=0} = u[n]$$

$$\text{if } x[n] = u[n-1] \Rightarrow y[n] = \underbrace{u[n]u[n]}_{=u[n]} + \underbrace{u[n-1]u[-n-1]}_{=0} = u[n]$$

معکوس پذیر نیست.

تمرین) آیا این سیستم معکوس پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوسش را به دست آورید.

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

۱۲-۱- خلاصه

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است. هر سیگنال دلخواه را می توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت. در بسیاری از مسائل با استفاده از شیفت زمانی می توان سیگنال را به صورت زوج یا فرد درآورد. کوچکترین دوره تناوب سیگنال دوره تناوب اصلی است و فرکانس متناسب با دوره تناوب اصلی فرکانس اصلی است. توابعی که فرم هندسی دارند را می توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد. توابع ضربه واحد، پله واحد و دابلت واحد خواص منحصر به فردی دارند. اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است. سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.