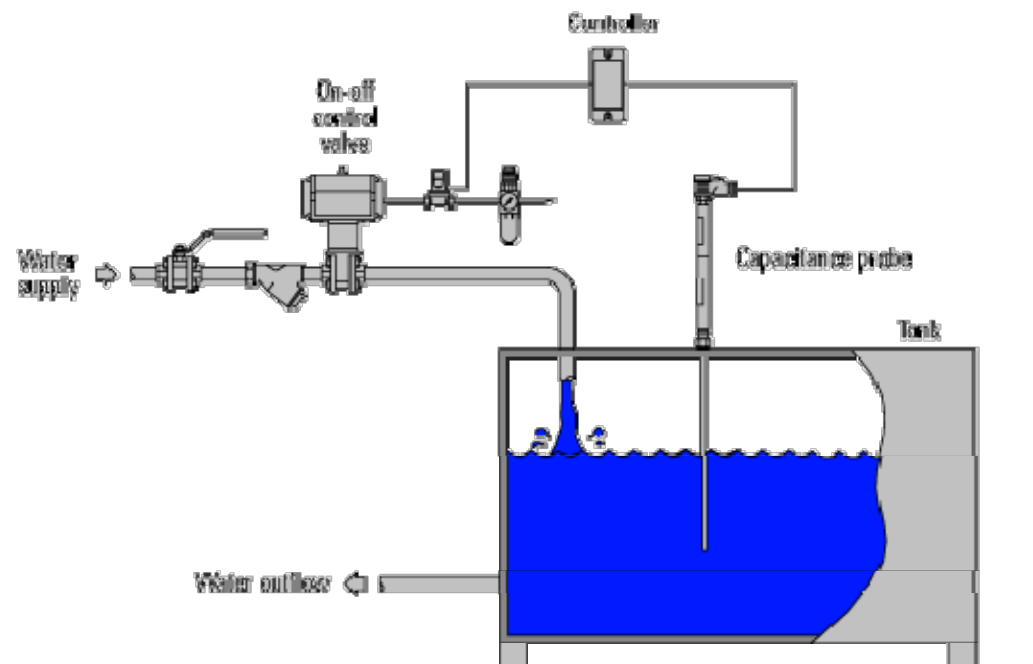
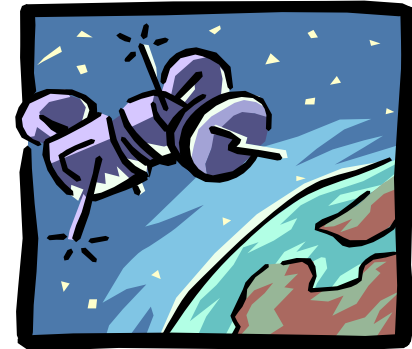
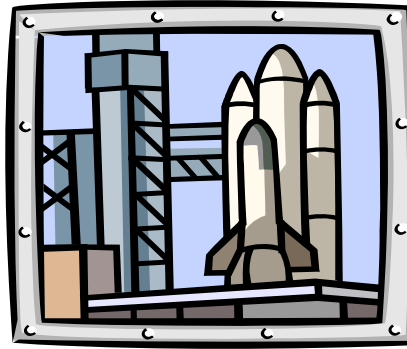
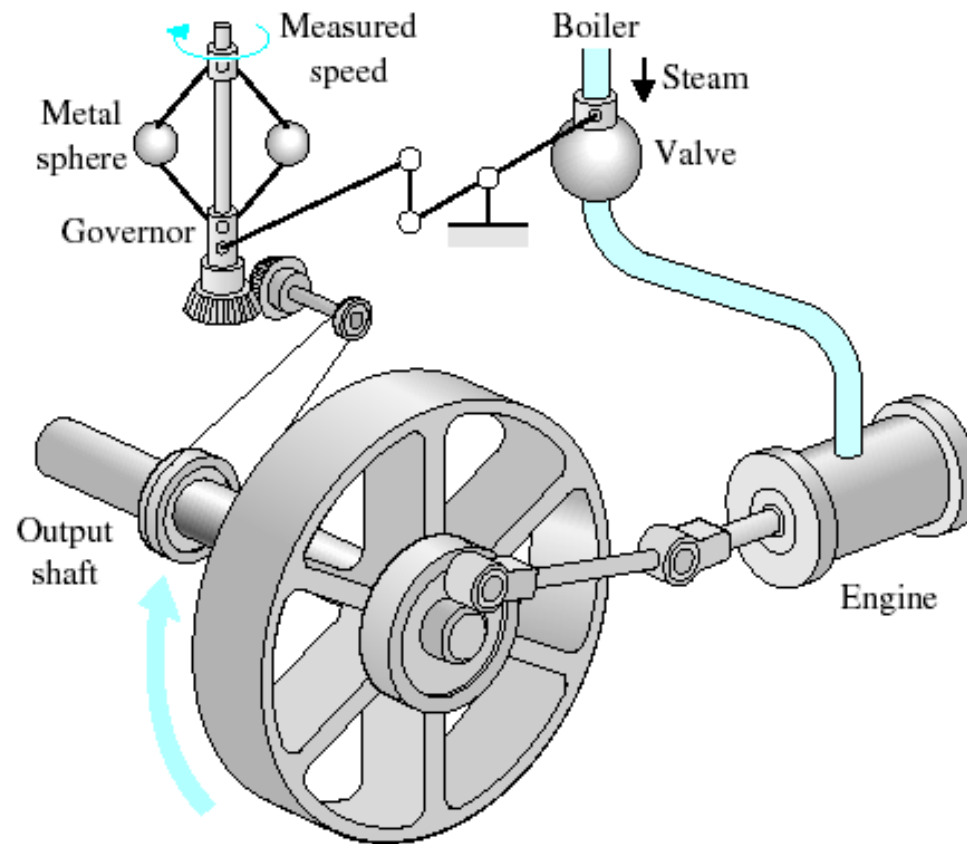


فهرست:

- مقدمه (آشنایی با سیستم های کنترل)
- نمایش سیستم های کنترل خطی
- تحلیل سیستم های کنترل در حوزه زمان
- تحلیل پایداری به روش روث - هورویتز
- رسم مکان هندسی ریشه ها
- تحلیل سیستم در حوزه فرکانس
- طراحی جبران ساز پیش فاز در حوزه زمان و فرکانس
- طراحی جبران ساز پس فاز در حوزه زمان و فرکانس
- طراحی جبران ساز پیش فاز- پس فاز در حوزه زمان و فرکانس
- تحلیل سیستم های کنترل در فضای حالت



سیستم گاورنر جیمز وات:



انواع روش های کنترلی:

– کنترل کلاسیک (Classic Control): تا قبل از ۱۹۵۰

– بر اساس تابع تبدیل

– طراحی و تحلیل در حوزه زمان

– طراحی و تحلیل در حوزه فرکانس

– کنترل مدرن (Modern Control): ۱۹۵۰ تا ۱۹۸۰

– بر اساس مدل فضای حالت

– کنترل فوق مدرن (Post Modern Control): ۱۹۸۰ به بعد

– کنترل مقاوم (سیستم های نامعین)

– کنترل هوشمند (Intelligent Control): ۱۹۷۰ به بعد

– کنترل چند متغیره

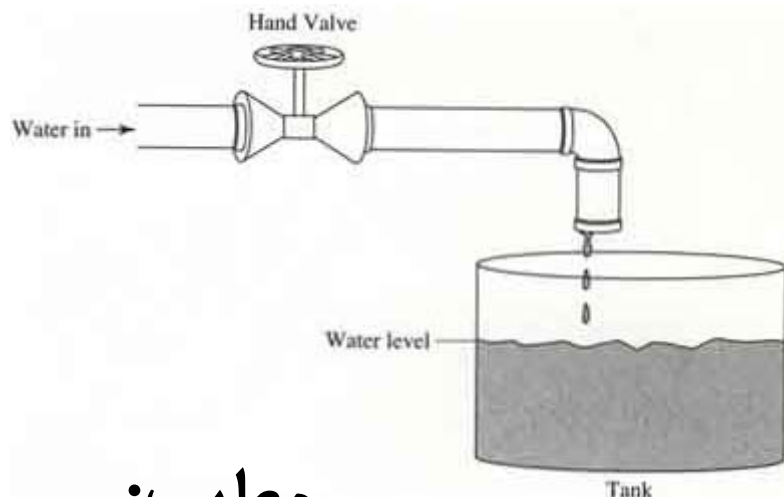
– کنترل دیجیتال

– کنترل تطبیقی

– کنترل فازی ...

انواع سیستم کنترل:

۱- کنترل حلقه باز (Open Loop Control)



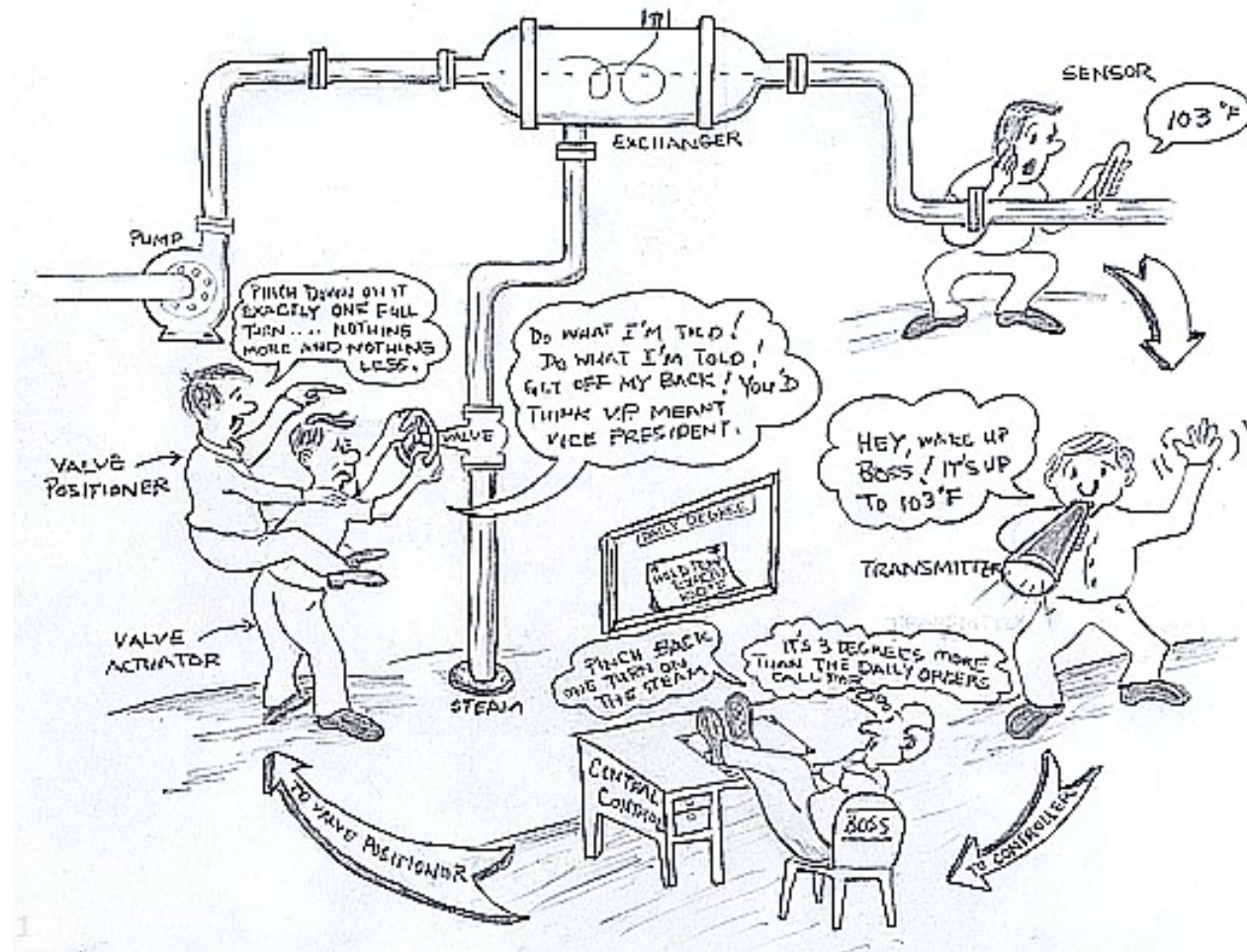
مزایا:

- ۱- ساخت ساده تر و نگهداری آسان
- ۲- ارزان بودن نسبت به سیستم حلقه بسته
- ۳- نداشتن مشکل پایداری
- ۴- مناسب برای زمانی که اندازه گیری خروجی بقدری سخت است که توجیه اقتصادی ندارد.

معایب:

- ۱- اغتشاش و تغییر کالیبراسیون خطا ایجاد می کند.
- ۲- برای دستیابی به کیفیت مطلوب در خروجی سیستم، کالیبراسیون مجدد لازم است.

۲- کنترل فیدبک / حلقه بسته / پس خور (Feedback/Closed Loop Control)



چند تعریف:

سیستم: مجموعه ای از چند عنصر که عمل مشخصی را انجام می دهند، به نحوی که انجام آن بدون حضور هر یک از عناصر انجام نخواهد گرفت.

دستگاه/فرآیند (Plant/Process): سیستم تحت کنترل $G(s)$ را دستگاه یا فرآیند نامند.

ورودی مرجع $R(s)$: نشان دهنده پاسخ مطلوب سیستم است. سیستم زمانی عملکرد مناسب دارد که خروجی سیستم برابر با ورودی مرجع باشد.

خروجی سیستم $C(s)$: خروجی سیستم سیگنالی است که از سیگنال تحت کنترل بدست می آید که مایل به اندازه گیری و کنترل آن هستیم.

خطای سیستم $E(s)$: سیگنال خطا تفاوت بین ورودی مرجع سیستم و خروجی واقعی آن می باشد.

کنترل کننده $G_C(s)$: عنصری است که برای تعیین سیگنال کنترلی مناسب جهت اعمال به سیستم بکار گرفته می شود.

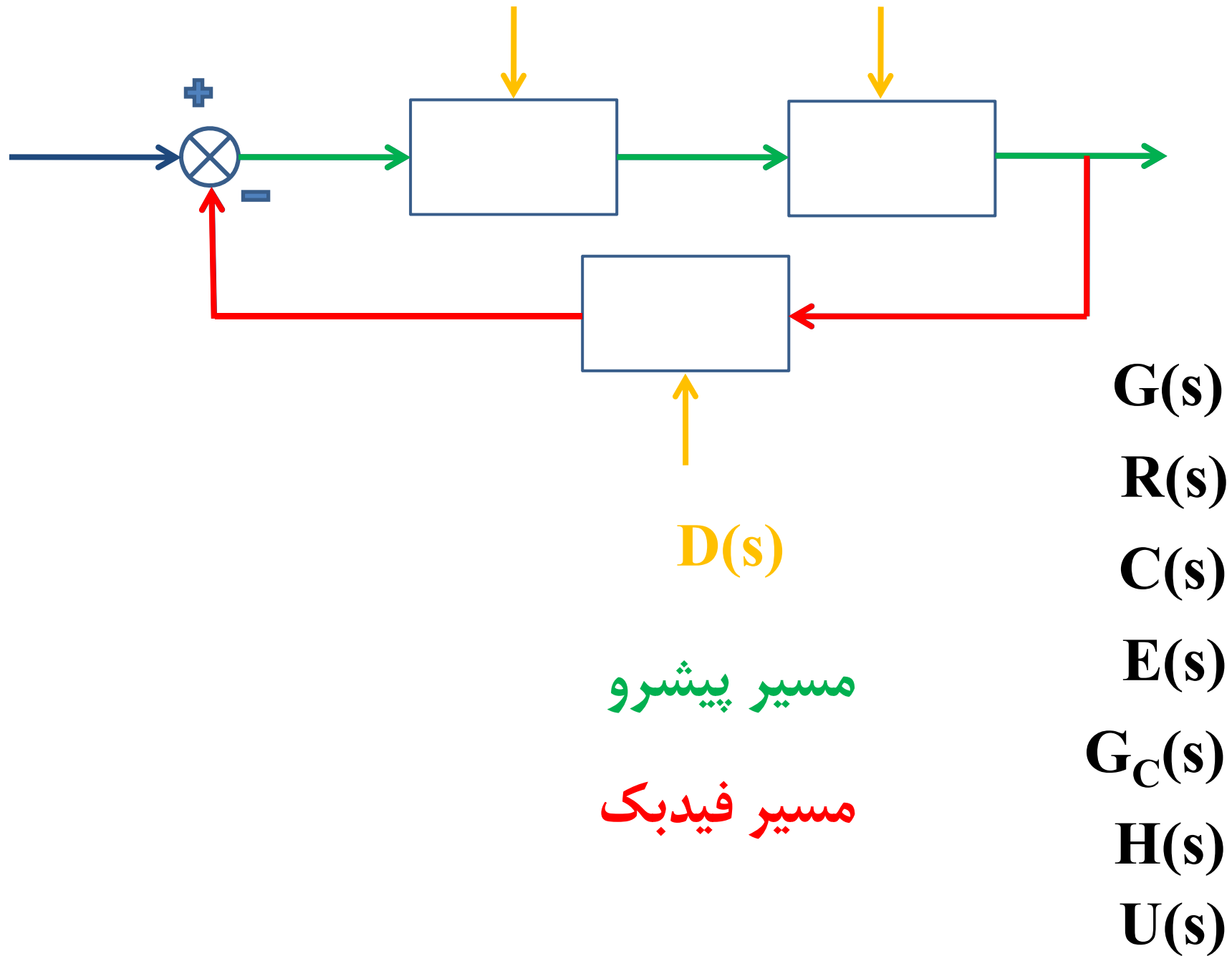
عنصر فیدبک $H(s)$: عنصری است که در مسیر خروجی به مقایسه کننده قرار دارد. اگر $H(s)=1$ باشد، سیستم را حلقه بسته با فیدبک واحد می نامند.

ورودی کنترل $U(s)$: عمل کنترلی یا سیگنال کنترلی می باشد که خروجی سیستم کنترل و ورودی اعمال شده به سیستم تحت کنترل می باشد.

مسیر پیشرو: مسیر از سیگنال خطا تا خروجی سیستم که شامل $G(s)$ و $G_C(s)$ می باشد.

مسیر فیدبک: مسیری از خروجی است که با ورودی مقایسه می شود و از $H(s)$ عبور می کند.

سیگنال اغتشاش / نویز $D(s)$ (Disturbance signal): یک سیگنال ورودی به سیستم است که در هر نقطه ای بجز ورودی مرجع می تواند وارد شود و اثر نامعینی بر عملکرد طبیعی سیستم بگذارد.



انواع سیستم:

سیستم خطی (Linear) و سیستم غیر خطی (Nonlinear): سیستم خطی، سیستمی است که اصل جمع آثار و خاصیت همگنی در آن صادق باشد.

اصل جمع آثار: خروجی یک سیستم خطی $y(t)$ ناشی از ورودی های مختلف $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ که همزمان عمل کنند، برابر با مجموع پاسخ ها به ازای هر ورودی به تنهایی است.

$$y(\alpha t) = \alpha x(t) \quad \text{اصل همگنی:}$$

سیستمی را غیر خطی گویند که اصل جمع آثار در آن صادق نباشد.
- معمولاً در عمل سیستم ها غیر خطی هستند.

- می توان سیستم های غیر خطی را حول یک نقطه کار معین خطی کرد و از مدل خطی شده در تحلیل و طراحی سیستم استفاده نمود.

سیستم تغییر پذیر با زمان (Time varying) و تغییر ناپذیر با زمان (Time invariant): سیستم تغییر ناپذیر با زمان سیستمی است که در آن پارامترها و مشخصه های سیستم با زمان تغییر نکنند.

در سیستم تغییر پذیر با زمان، پارامترها و مشخصه های سیستم با زمان تغییر می کنند.

سیستم زمان – پیوسته (Continuous-time) و سیستم زمان گسسته (Discrete-time): سیستم زمان-پیوسته، سیستمی است که در آن سیگنال ها، تابعی پیوسته از زمان هستند.

در سیستم زمان گسسته، سیگنال ها به صورت گسسته می باشند.

سیستم دینامیکی (Dynamic system) و سیستم استاتیکی (Static system): سیستم دینامیکی، سیستمی است که خروجی سیستم به ورودی در زمان حال و گذشته بستگی دارد.

خروجی سیستم در سیستم استاتیکی تنها به ورودی در زمان حال بستگی دارد.

سرومکانیزم (Servo mechanism): سیستم هایی مکانیکی که در آنها خطای حالت ماندگار برای یک سیگنال ثابت ورودی، صفر است. در این سیستم ها، خروجی سیستم، ورودی سیستم را دنبال می کند.

رگولاتور (Regulator): سیستمی است که در آن خروجی حالت ماندگار برای سیگنال ورودی ثابت، مقدار ثابت باشد. در رگولاتورها حالت دنبال روندگی خروجی سیستم از ورودی آن وجود ندارد.

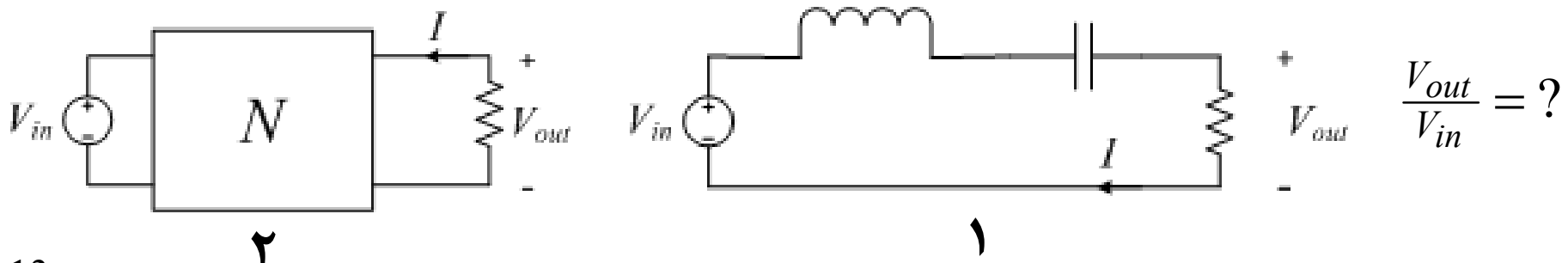
توصیف سیستم: } - توصیف ورودی- خروجی (توصیف خارجی External Description)
 - توصیف فضای حالت (توصیف داخلی Internal Description)

تابع تبدیل: نسبت تبدیل لاپلاس خروجی یک سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن به ازای شرایط اولیه صفر.

- در مسایل کنترل، اولین قدم مدلسازی سیستم است.
- داشتن یک مدل دقیق ریاضی از سیستم الزامی است.
- با استفاده از مدل ریاضی سیستم، به ازای ورودی های مختلف، خروجی های متناظر با سیستم واقعی بدست می آید.

استخراج مدل:

- استفاده از روش های شناسایی سیستم از اطلاعات ورودی-خروجی.
- ترکیب اطلاعات اجزاء تشکیل دهنده سیستم.



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = ?$$

خواص تابع تبدیل:

- هر سیستم فقط یک تابع تبدیل دارد.
- چند سیستم می توانند توابع تبدیل یکسانی داشته باشند (سیستم های هم ارز).
- تابع تبدیل مستقل از ورودی و خروجی است.
- تابع تبدیل ارتباط دهنده ورودی - خروجی است.
- تابع تبدیل تحت شرایط اولیه صفر بدست می آید.
- تابع تبدیل برای سیستم های خطی نامتغیر با زمان تعریف می شود.

روش های بدست آوردن تابع تبدیل:

- با استفاده از خود سیستم.
- با استفاده از شماتیک و یا بلاک دیاگرام سیستم.
- با استفاده از معادله دیفرانسیل سیستم.

در سیستم های دینامیکی رابطه بین ورودی سیستم $u(t)$ و خروجی سیستم $y(t)$ را می توان به صورت یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشت.

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t)$$

$$Dy(t) = \frac{d}{dt} y(t), D^2 y(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t), \dots$$

- ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ و $b_0, b_1, \dots, b_m$ مقادیر حقیقی هستند که توسط مشخصه های سیستم تعیین می شوند.

- با داشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم و شرایط اولیه پارامترها و ضرایب معین سیستم، پاسخ سیستم، با حل معادله دیفرانسیل بدست می آید.

- در حالت کلی و به ازای سیستم های با مرتبه های بالا، حل معادله دیفرانسیل کار ساده ای نیست.

- یک راه حل ساده استفاده از تبدیل لاپلاس می باشد.

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) =$$

$$(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s)$$

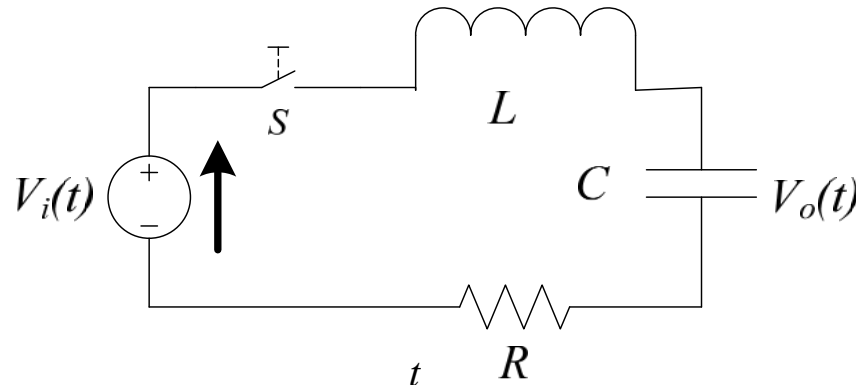
$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

***n*: مرتبه سیستم**

مراحل بدست آوردن تابع تبدیل:

- ۱- نوشتن معادلات اجزاء سیستم.
- ۲- نوشتن معادلات ارتباط دهنده اجزاء سیستم.
- ۳- لاپلاس گیری از معادلات فوق در شرایط اولیه صفر.
- ۴- محاسبه نسبت تبدیل لاپلاس ورودی به خروجی.

مثال ۱: مدار RLC



$$i(t_0) = 0$$

$$v_o(t_0) = 0$$

$$\frac{V_o}{V_i} = ?$$

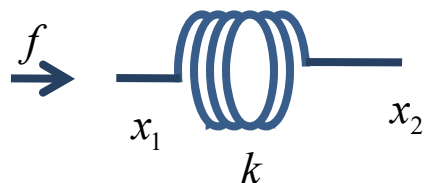
$$v_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri(t) \quad \Rightarrow \quad Dv_i(t) = (LD^2 + RD + \frac{1}{C})i(t)$$

$$CsV_i(s) = (LCs^2 + RCs + 1)I(s) \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad Dv_o(t) = \frac{1}{C} i(t) \quad \Rightarrow \quad V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

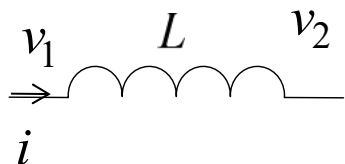
$$V_o(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = G(s)$$

قوانین حاکم در سیستم مکانیکی:



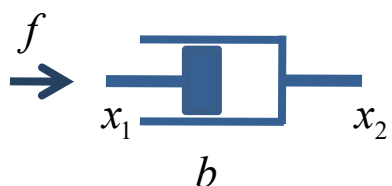
$$f = k(x_1 - x_2) = k \int (v_1 - v_2) dt$$

۱- فنر:

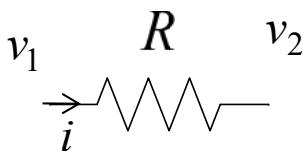


$$i = \frac{1}{L} \int (v_1 - v_2) dt$$

۲- میرا کن (Damper):

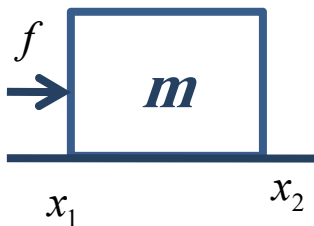


$$f = b \frac{d}{dt} (x_1 - x_2) = b(v_1 - v_2)$$

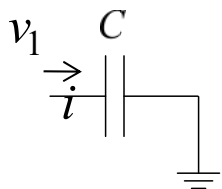


$$i = \frac{1}{R} (v_1 - v_2)$$

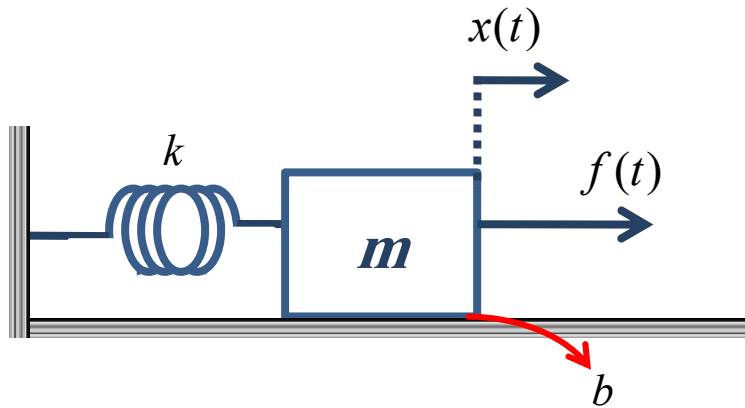
۳- جرم:



$$f = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} \equiv m \frac{d^2 (x - 0)}{dt^2} = m \frac{d(v - 0)}{dt}$$



$$i = C \frac{d}{dt} (v_1 - 0)$$

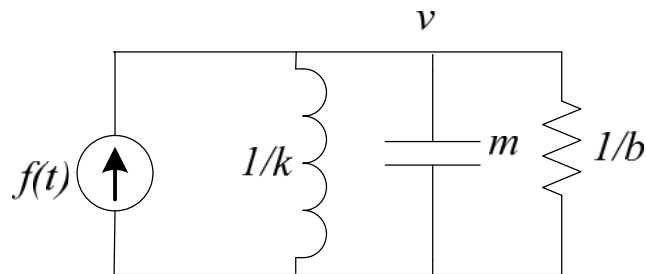


مثال: $\frac{V(s)}{F(s)} = ?$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = v(0) + \int_0^t v dt$$

$$f(t) - bv - kx = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow msV(s) + bV(s) + \frac{k}{s}V(s) = F(s)$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms^2 + bs + k}$$



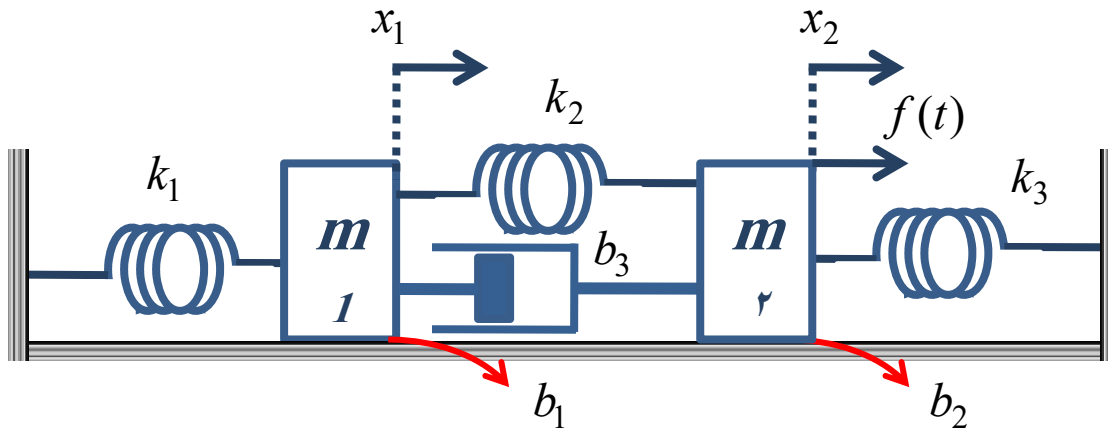
معادل سیستم الکتریکی

$$F(s) = \frac{k}{s}V(s) + msV(s) + bV(s)$$

$$F(s) = \frac{k + ms^2 + bs}{s}V(s)$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms^2 + bs + k}$$

مثال: معادلات حاکم بر سیستم؟



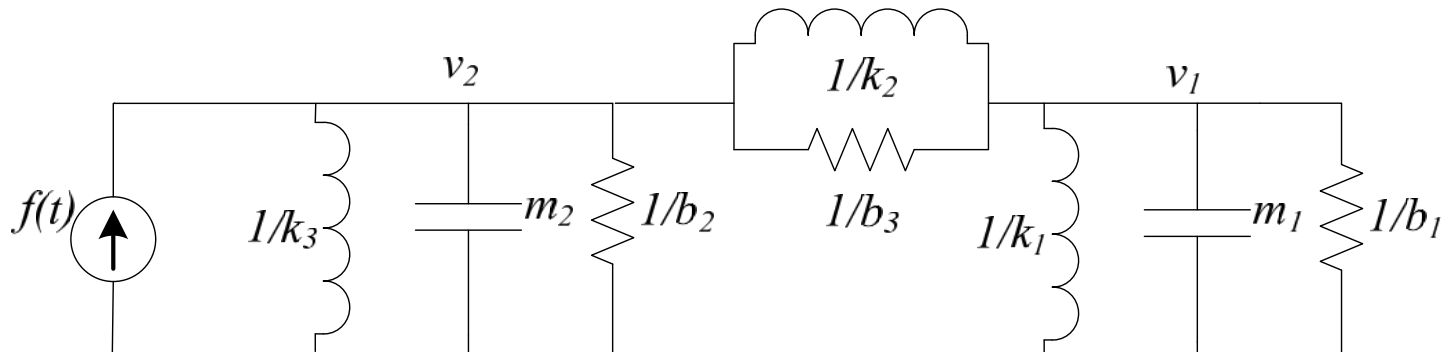
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = f(t) - k_3 x_2 - b_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2 (x_2 - x_1) - b_3 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_2 \frac{dx_2}{dt} + k_3 x_2 + b_3 \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + k_2 (x_2 - x_1) = f(t)$$

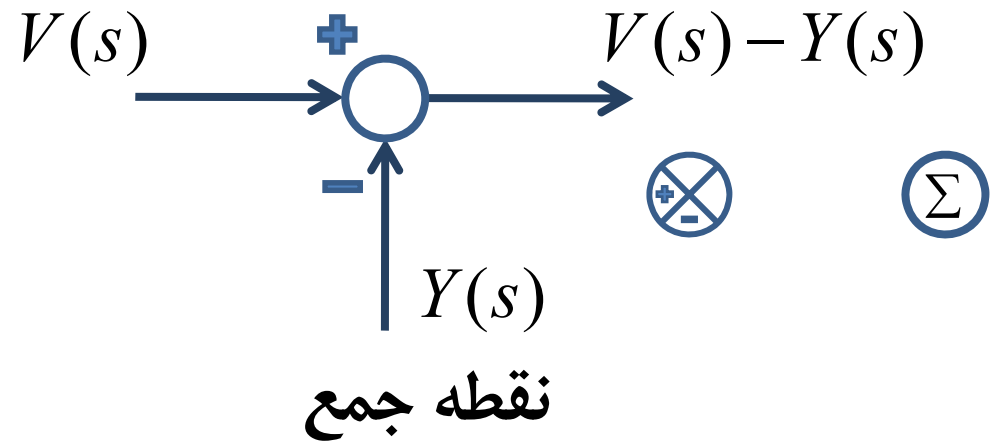
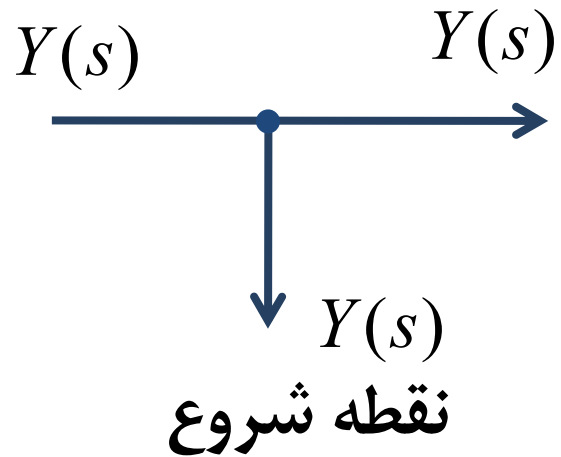
&

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + b_3 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

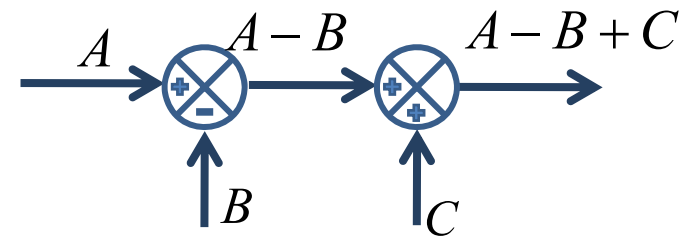
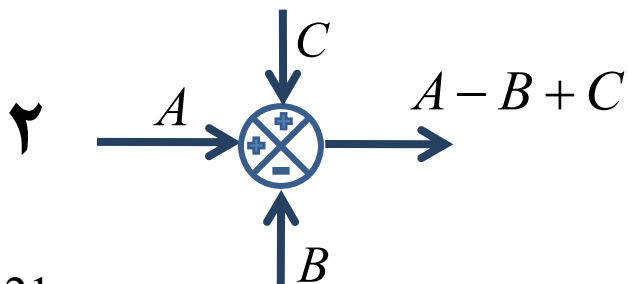
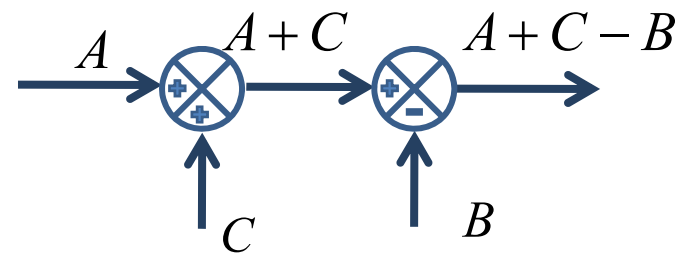
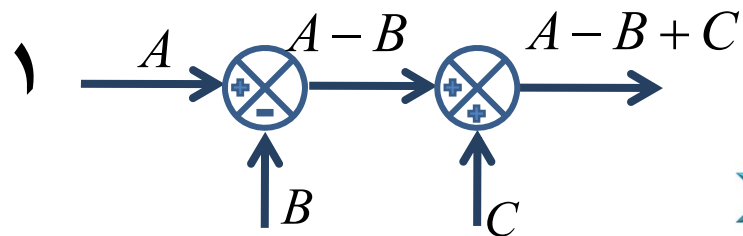
مدار الکتریکی معادل

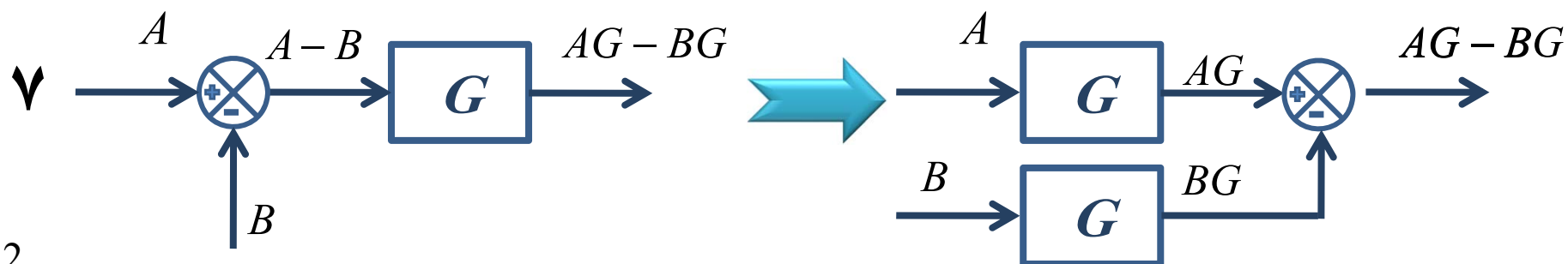
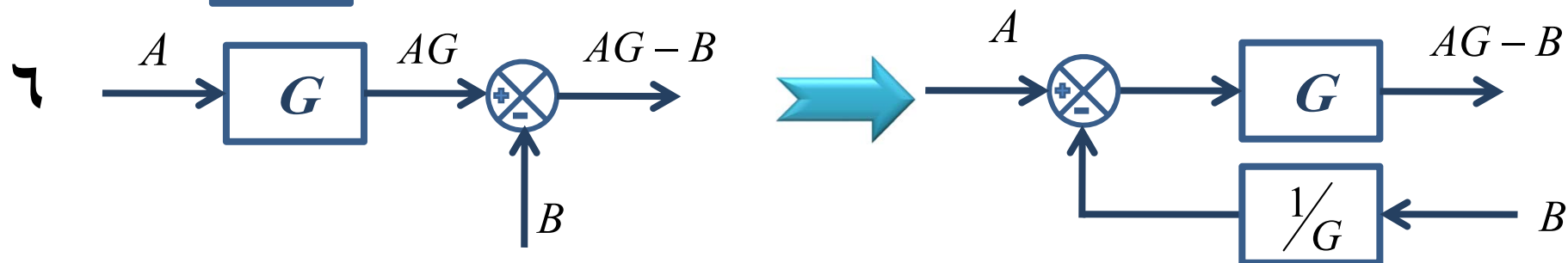
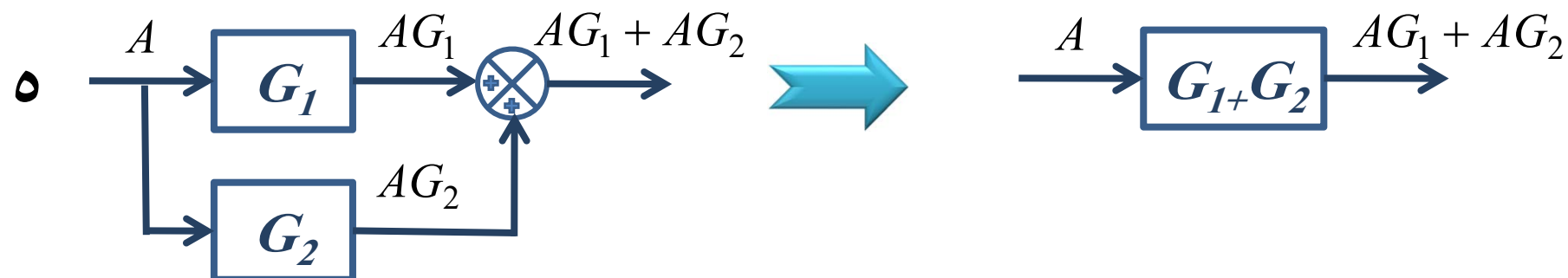
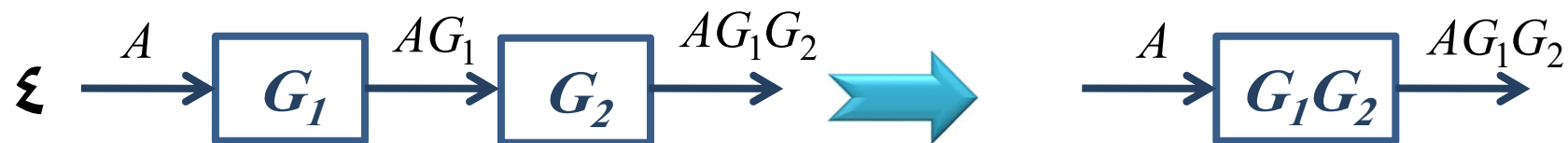
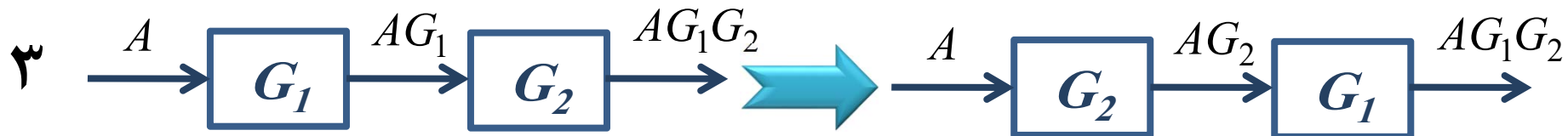


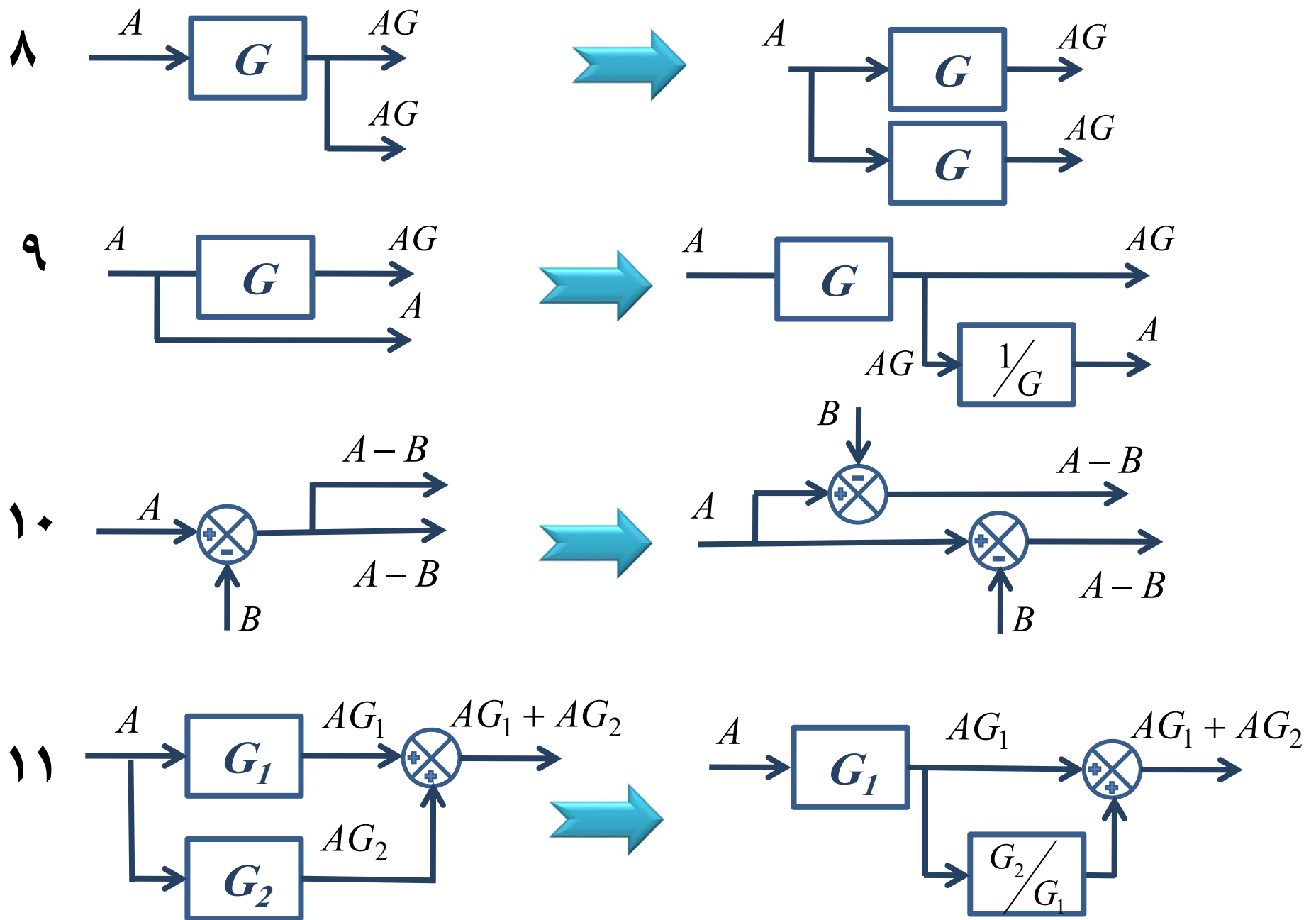
دیاگرام بلوکی:

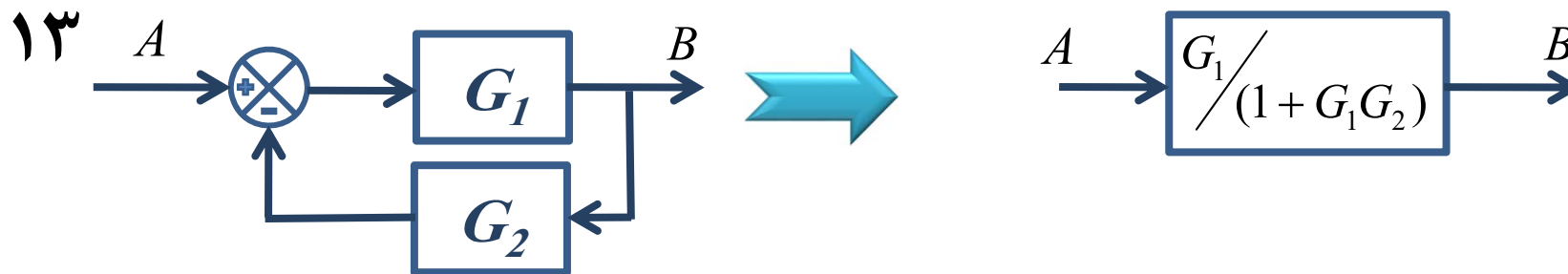
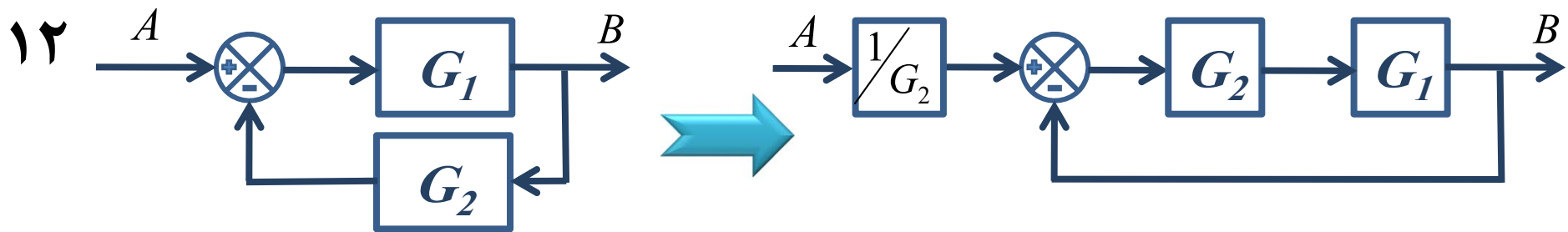


قواعد جبر دیاگرام بلوکی:





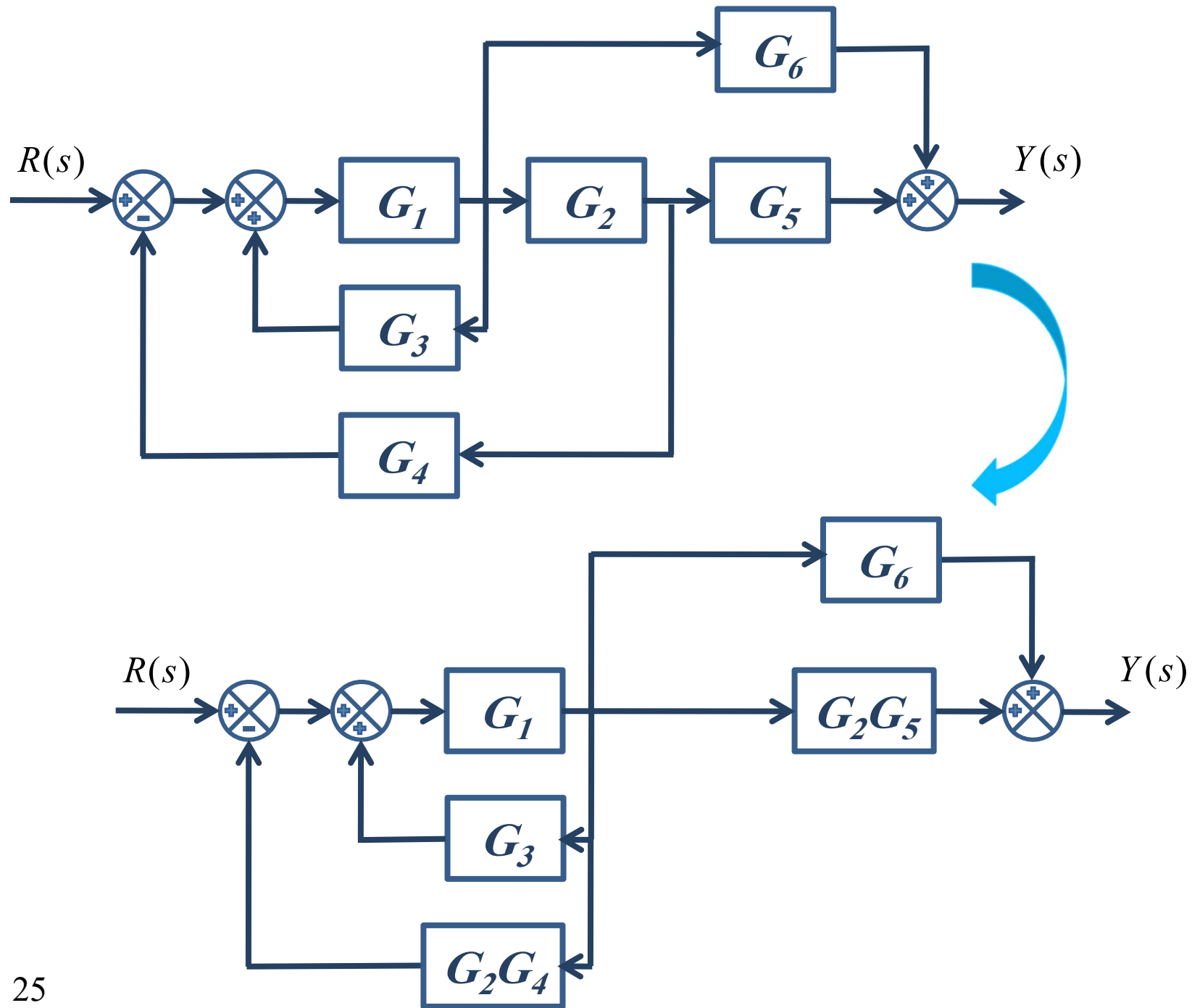


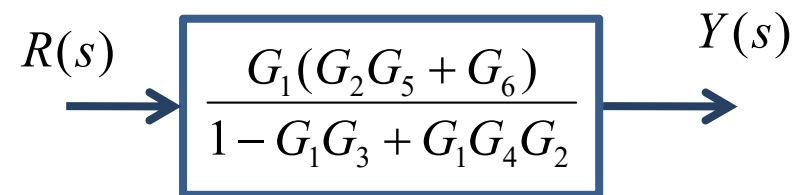
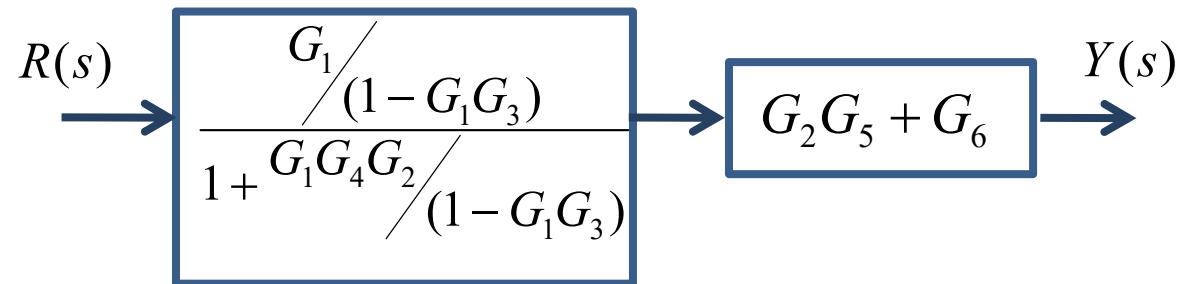
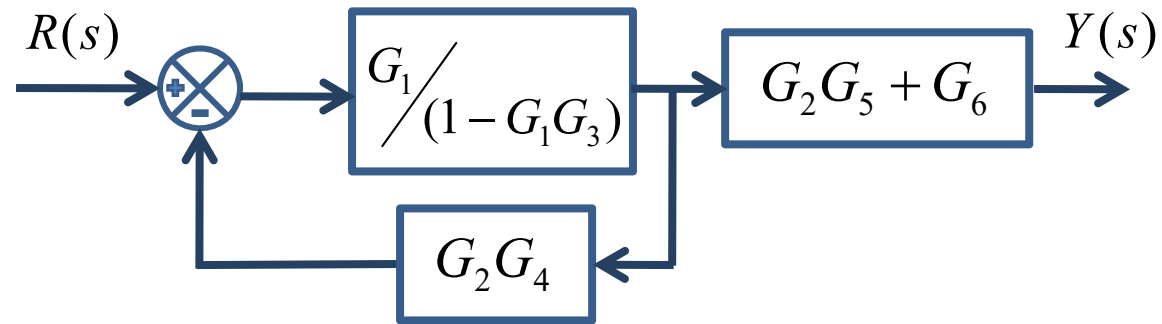


مراحل ساده سازی دیاگرام بلوکی:

- ۱- ترکیب بلاک های سری با استفاده از قانون ۴.
- ۲- ترکیب بلاک های موازی با استفاده از قانون ۵.
- ۳- حذف حلقه فیدبک با استفاده از قانون ۱۳.
- ۴- انتقال نقاط جمع به چپ و نقاط خروج به سمت راست با استفاده از قوانین ۶ و ۷.

مثال:

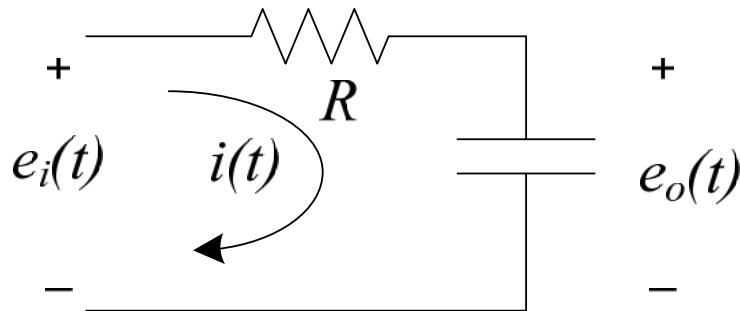




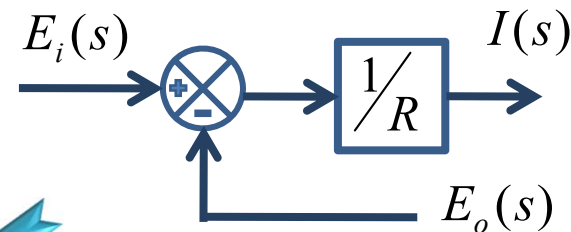
رسم دیاگرام بلوکی سیستم های فیزیکی:

- ۱- نوشتن معادلات توصیف کننده رفتار هر عنصر.
- ۲- تبدیل لاپلاس معادلات بدست آمده از مرحله یک با فرض شرایط اولیه صفر.
- ۳- رسم هر یک از معادلات لاپلاس در یک بلاک مجزا.
- ۴- ترکیب بلاک های حاصل در مرحله قبل و تهیه بلک دیاگرام کل سیستم.

مثال:

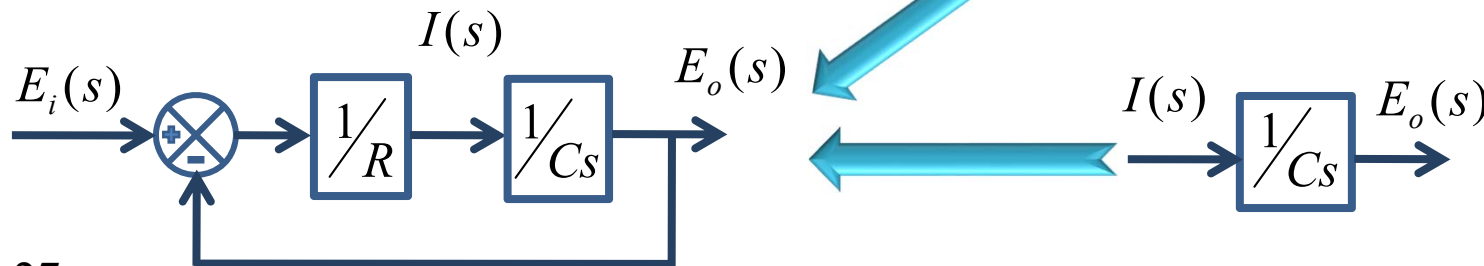


$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \Rightarrow I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

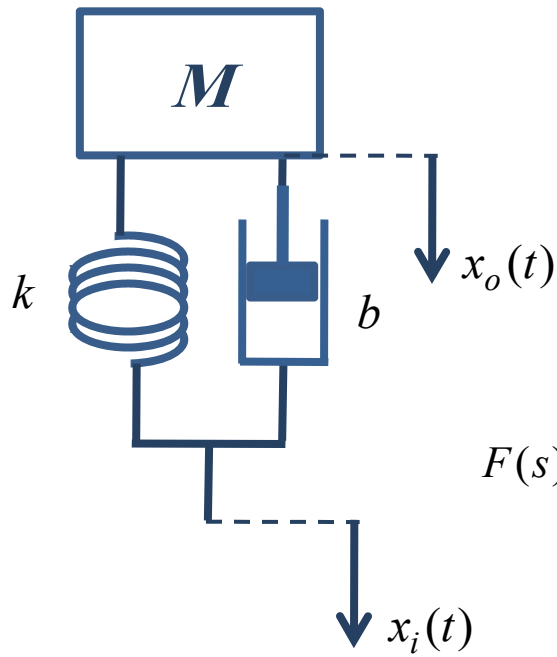


$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$



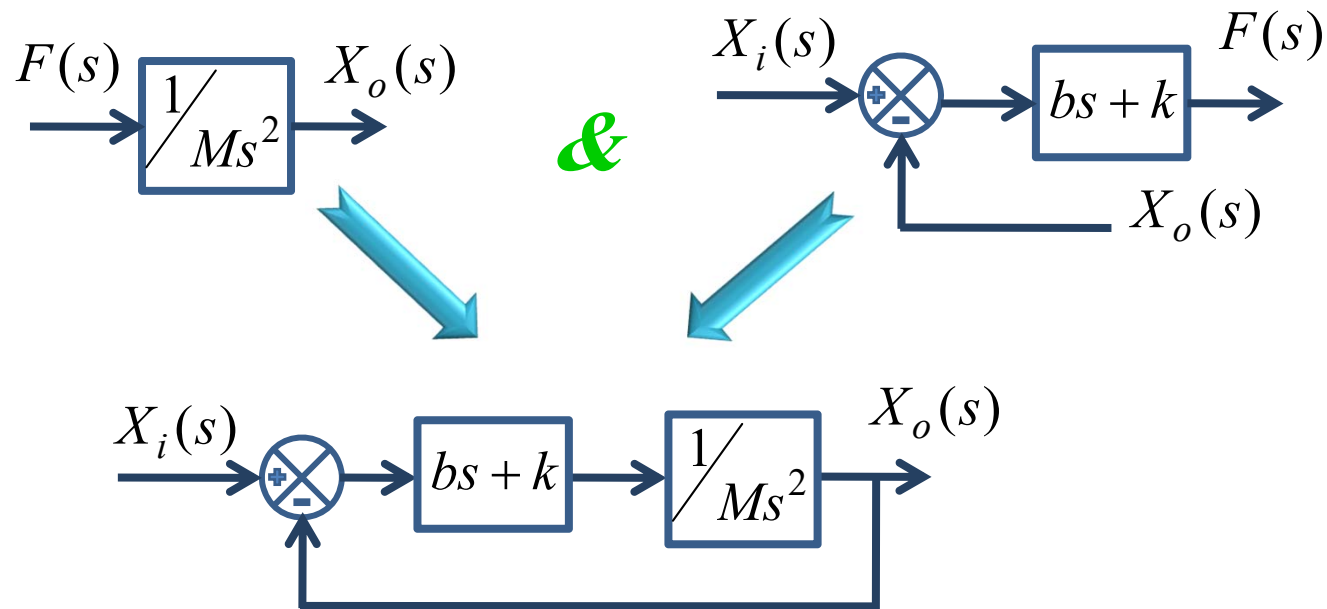
مثال:



$$MD^2x_o = F \Rightarrow Ms^2X_o(s) = F(s)$$

$$F = -b(Dx_o - Dx_i) - k(x_o - x_i)$$

$$F(s) = -b(sX_o(s) - sX_i(s)) - k(X_o(s) - X_i(s)) = -(bs + k)(X_o(s) - X_i(s))$$

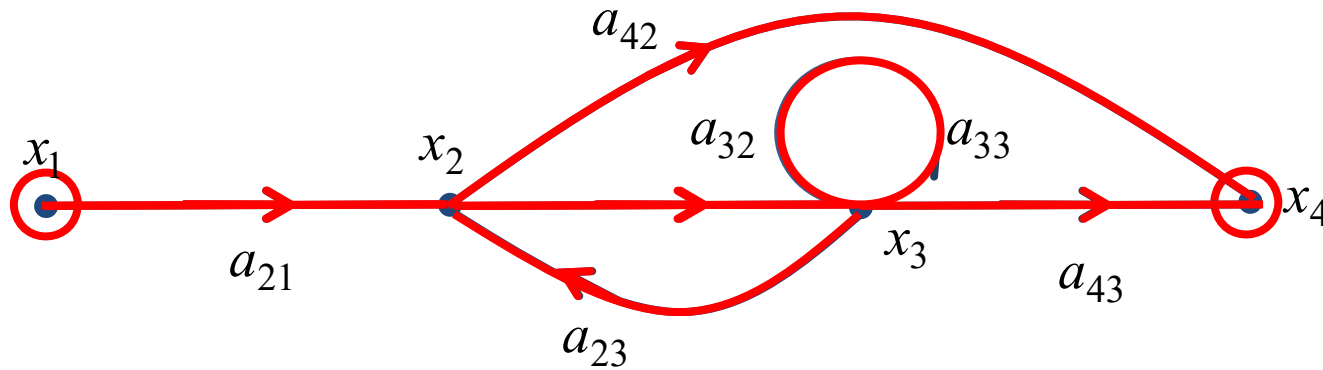


نمودار گذر سیگنال (Signal flow graph):

- ساختار نمودار گذر سیگنال مشابه دیاگرام بلوکی می باشد.
- هر **گره (Node)** نشان دهنده یک متغیر یا سیگنال از سیستم است.
- هر **شاخه (Branch)** دو گره را با یک بهره مشخص متصل می کند.
- هر شاخه تنها در یک جهت حرکت می کند.
- **گره ورودی یا منبع (Source)**، گره ایست که تنها شاخه هایی به آن متصل است که از آن خارج می شود. این گره متناظر با یک متغیر مستقل است.
- **گره خروجی یا سینک (Sink)**، گره ایست که تنها شاخه هایی به آن متصل است که به آن وارد می شود. این گره متناظر با یک متغیر وابسته است.
- **گره مخلوط (Mixed node)**، گره ایست که شاخه هایی دارد که به آن وارد می شوند و هم از آن خارج می شوند.

- **مسیر (Path)**، یک پیمایش از شاخه های متصل در جهت پیکان های شاخه می باشد.
- اگر مسیر از هیچ گره ای بیش از یک بار عبور نکند، **مسیر باز** نامند.
- هرگاه مسیر در گره ای که آغاز شده، خاتمه یابد و از هیچ گره ای دیگر بیش از یک مرتبه عبور نکند، یک **مسیر بسته** یا **حلقه (Loop)** نامند.
- حاصلضرب بهره شاخه های یک حلقه را **بهره حلقه (Loop gain)** نامند.
- **حلقه های مجزا (Nontouching loop)**، حلقه هایی را نامند که گره مشترکی نداشته باشند.
- **مسیر پیشرو (Forward path)**، مسیری است که از یک گره ورودی آغاز و در یک گره خروجی پایان یابد و از هیچ گره ای بیش از یک مرتبه عبور نکند.
- **بهره مسیر پیشرو (Forward path gain)**، حاصلضرب بهره تمام شاخه های مسیر پیشرو می باشد.

مثال:



- ۱- گره ورودی ۲- گره خروجی ۳- مسیر پیشرو ۴- حلقه
- ۴- بهره حلقه

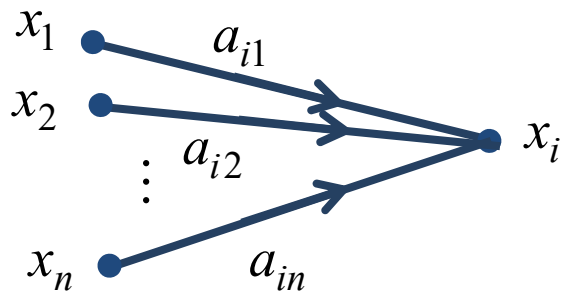
ویژگی نمودار گذر سیگنال:

- یک گره، سیگنال های کلیه شاخه های ورودی را با هم جمع می کند و مجموع را به کلیه شاخه هایی که از آن خارج می شوند، انتقال می دهد.
- نمودار گذر سیگنال یک سیستم منحصر به فرد نیست و با نوشتن معادلات سیستم به صورت های مختلف، می توان نمودارهای گذر سیگنال متفاوتی از یک سیستم داشت.

قوانین ساده سازی نمودار گذر سیگنال:

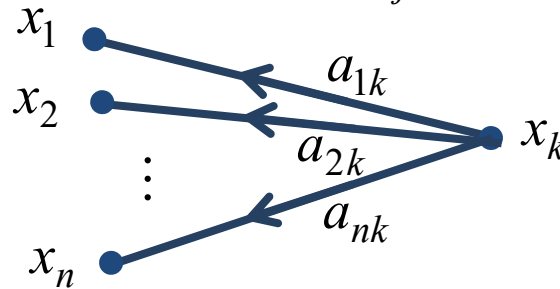
۱- قاعده جمع:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$



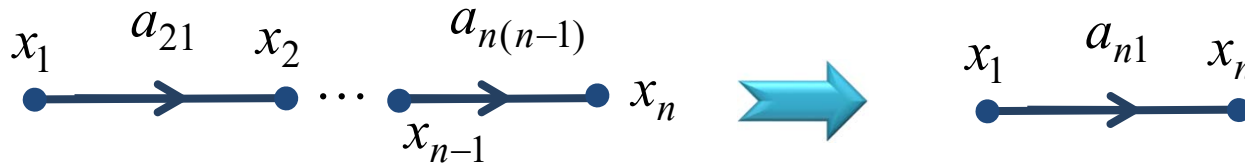
$$x_i = a_{ik} x_k, \quad i = 1, \dots, n$$

۲- قاعده انتقال:

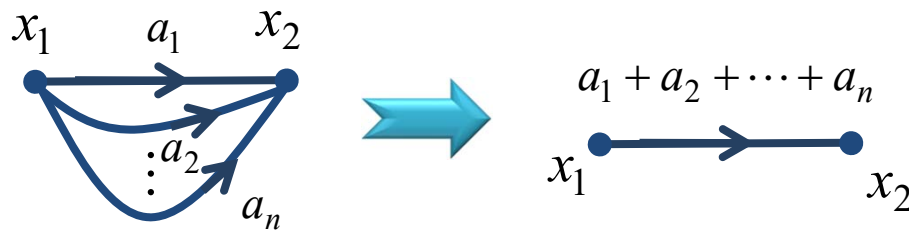


۳- قاعده ضرب:

$$a_{n1} = a_{21} a_{32} \cdots a_{n(n-1)}$$

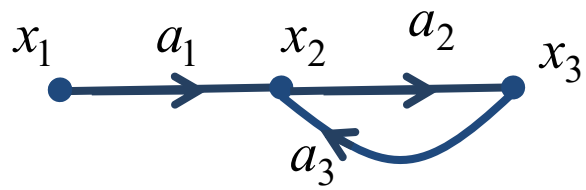


۴- قاعده شاخه های موازی:



۵- قاعده حذف گره مخلوط:





$$x_3 = a_2 x_2$$

$$x_2 = a_1 x_1 + a_3 x_3$$



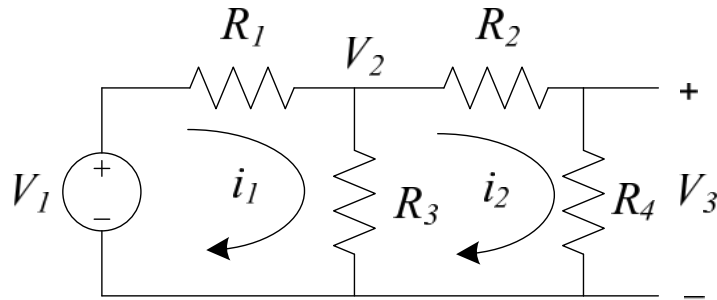
٦- قاعده حذف حلقه:

$$x_3 = a_1 a_2 x_1 + a_2 a_3 x_3$$

$$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1 - a_2 a_3} x_1$$



مثال:

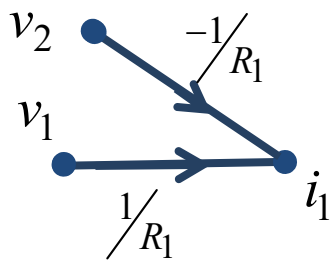


$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_1}$$

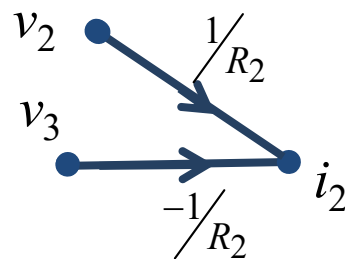
$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_2}$$

$$v_2 = R_3 i_1 - R_3 i_2$$

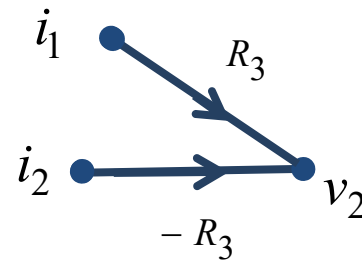
$$v_3 = R_4 i_2$$



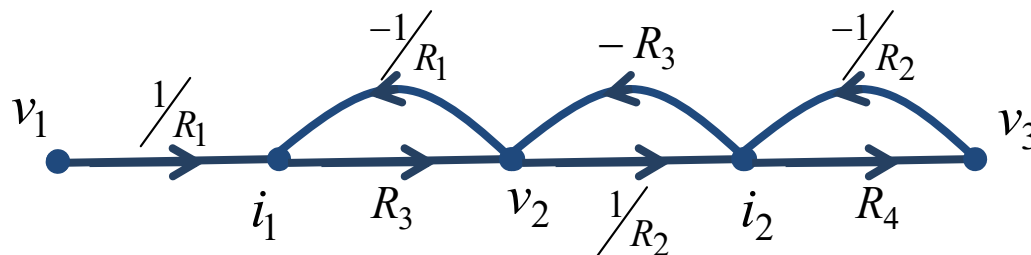
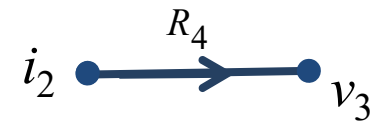
&



&



&



محاسبه بهره نمودار گذر سیگنال با استفاده از روش میسن (Mason):

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$$

P_k : بهره k امین مسیر پیشرو

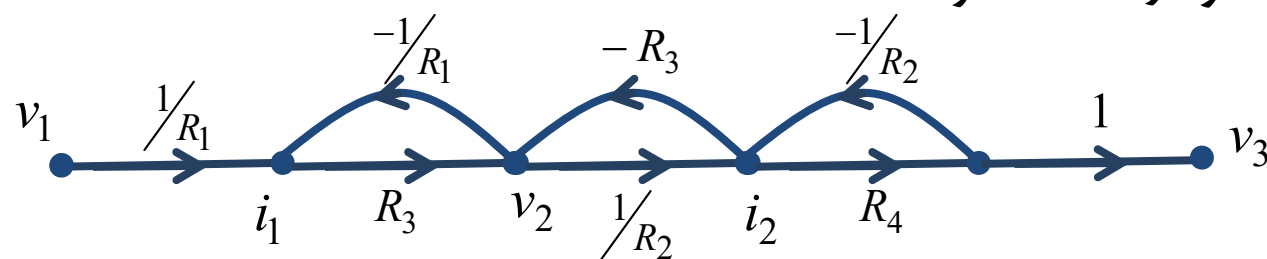
Δ : دترمینان نمودار

$\Delta = 1 -$ (مجموع حاصلضرب بهره های هر دو حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند) + (مجموع بهره های کلیه حلقه های تکی) -

$\dots$ + (مجموع حاصلضرب بهره های هر سه حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)

Δ_k : کوفاکتور (Cofactor): دترمینان سیستم زمانی که k امین مسیر پیشرو، شامل

تمام شاخه ها و گره های آن نمودار حذف گردند.



مثال: $G = \frac{V_3}{V_1} = ?$

دو حلقه غیر مشترک: L_3, L_1

سه حلقه غیر مشترک: 0

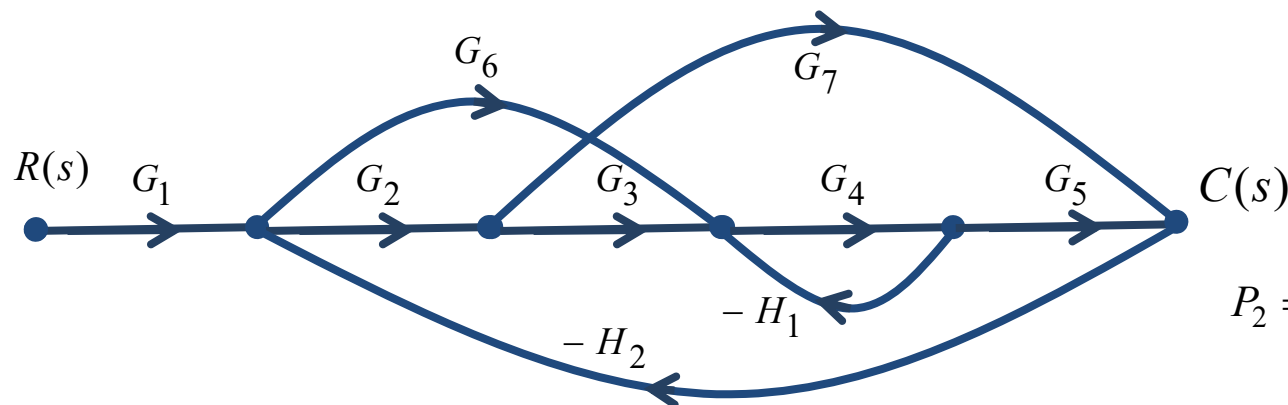
$$P_1 = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}, \quad \Delta_1 = 1, \quad L_1 = -\frac{R_3}{R_1}, \quad L_2 = -\frac{R_3}{R_2}, \quad L_3 = -\frac{R_4}{R_2},$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3 = 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}$$

مثال:

$$P = \frac{C(s)}{R(s)} = ?$$



$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5,$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5, \quad P_3 = G_1 G_2 G_7,$$

دو حلقه غیر مشترک: L_1, L_2 , $L_1 = -G_4 H_1$, $L_2 = -G_2 G_7 H_2$, $L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2$, $L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$,

سه حلقه غیر مشترک: 0

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 1 - L_1,$$

$$P = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2}$$

توصیف فضای حالت سیستم های کنترل:

حالت: حالت یک سیستم دینامیکی، کوچکترین مجموعه از متغیرها می باشد که اطلاع از این متغیرها در زمان $t = t_0$ همراه با اطلاع از ورودی در $t \geq t_0$ ، رفتار سیستم را برای هر زمان $t \geq t_0$ به طور کامل توصیف کند.

متغیرهای حالت: متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی، حالت سیستم دینامیکی را تعیین می کنند.

بردار حالت: اگر n متغیر حالت برای توصیف کامل رفتار یک سیستم لازم باشد، این متغیرها را می توان به صورت یک بردار در نظر گرفت که بردار حالت می نامند.

فضای حالت: فضای n بعدی که محورهای مختصات آن برابر با تعداد متغیرهای حالت در نظر گرفته می شود را فضای حالت نامند. هر حالت در فضای حالت به صورت یک نقطه نمایش داده می شود.

☠ معادلات حالت یک سیستم یکتا نیست و به متغیرهای حالت بستگی دارد.

بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل:

$$\left. \begin{aligned} D^3 y(t) + a_2 D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_0 y(t) &= b_0 u(t) \\ x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= D x_1(t) = D y(t) \\ x_3(t) &= D x_2(t) = D^2 y(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \ddot{y}(t) = -a_2 x_3(t) - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{B} \quad u(t) \quad y(t) \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{D} \quad u(t)$$

A : ماتریس ضریب بردار حالت یا ماتریس حالت (State matrix)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

B : ماتریس ورودی (Input matrix)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

C : ماتریس خروجی (Output matrix)

D : ماتریس انتقال مستقیم (Direct transmission matrix)

$$D^3 y(t) + a_2 D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_2 D^2 u(t) + b_1 D u(t) + b_0 u(t)$$

$$(D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = (b_2 D^2 + b_1 D + b_0)u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$u(t) \triangleq (D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0)z(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = (b_2 D^2 + b_1 D + b_0)z(t) \quad \text{تعریف:}$$

$$x_1(t) \triangleq z(t), \quad x_2(t) \triangleq D z(t), \quad x_3(t) \triangleq D^2 z(t),$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \mathbf{x}(t)$$

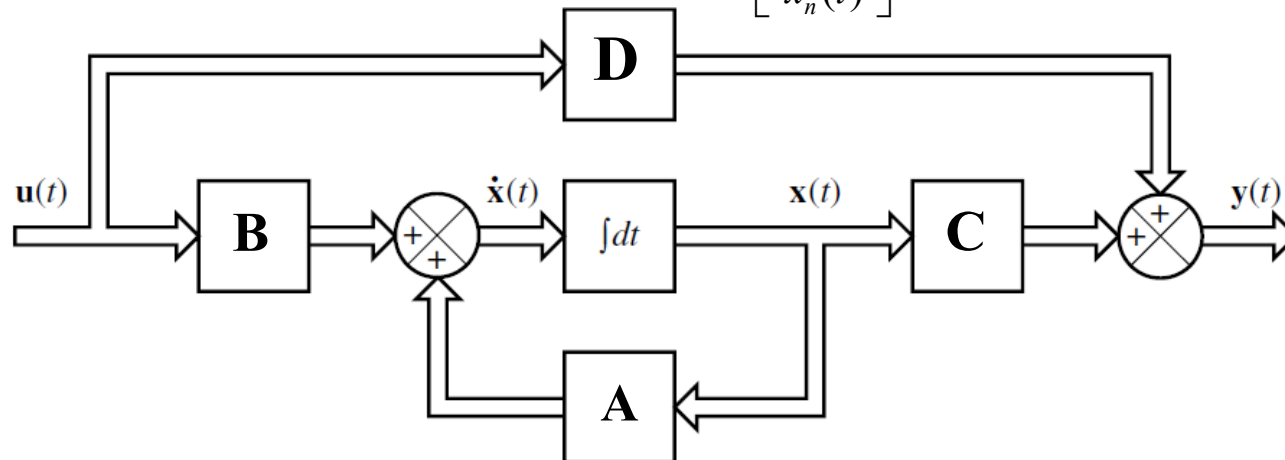
در حالت کلی: $m = n - 1$ $(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t)$

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)]$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m-1} \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

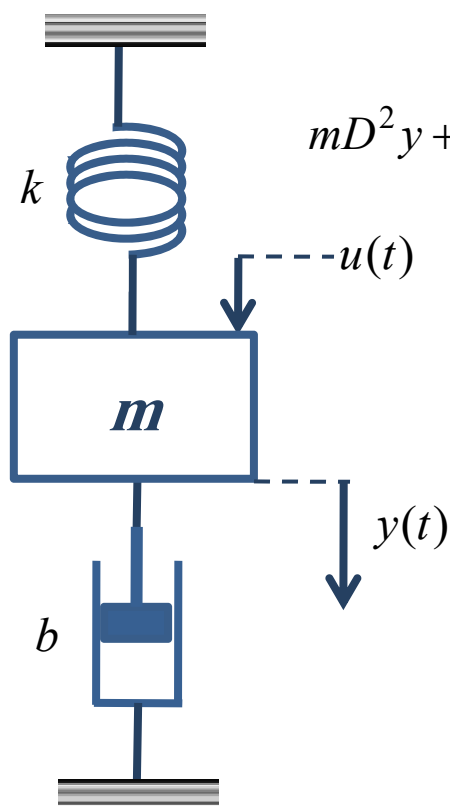


مثال:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

مثال:



$$mD^2y + bDy + ky(t) = u$$

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

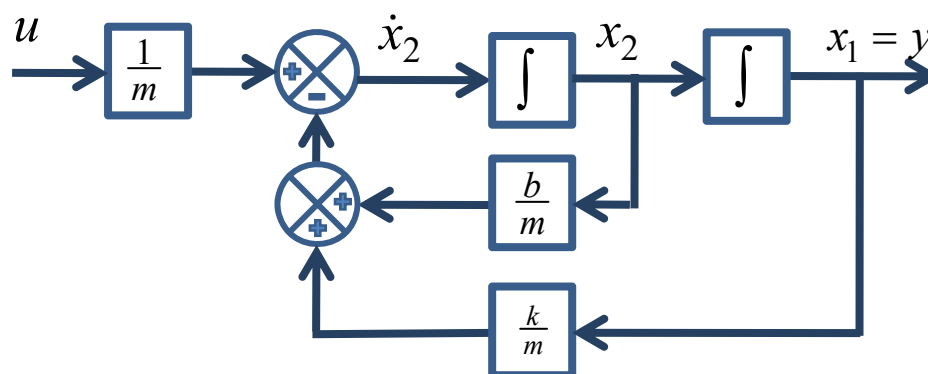
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k}{m}x_1 + \frac{-b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$y = x_1$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

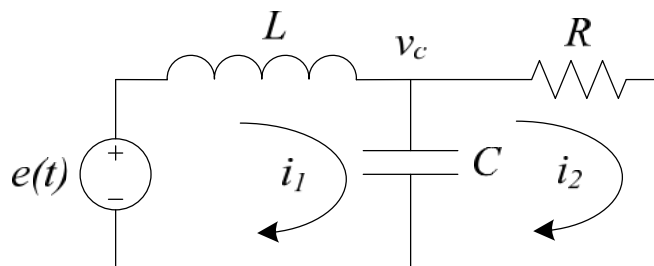
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$



انتخاب متغیر حالت:

- اولین قدم در توصیف فضای حالت، انتخاب متغیر حالت است.
- متغیرهای حالت برای یک سیستم منحصر به فرد نیستند. (مثال: نتیجه مسابقه و روحیات بازیکنان)
- در سیستم های فیزیکی، انتخاب متغیرهای فیزیکی **ذخیره کننده انرژی** به عنوان متغیر حالت می باشد.
- مدل حالت **مینیمال**، مدلی است که در آن از حداقل تعداد متغیر حالت جهت توصیف آن بکار رفته باشد.
- متغیر حالت **ناوابسته**، متغیری است که بر حسب سایر متغیرهای حالت سیستم بدست نمی آید.

متغیر فیزیکی	انرژی	عنصر
ولتاژ V	$Cv^2/2$	خازن C
جریان i	$Li^2/2$	سلف L
سرعت انتقالی V	$Mv^2/2$	جرم M
سرعت چرخشی ω	$J\omega^2/2$	ممان J
x	$kx^2/2$	اینرسی J
جابجایی		فنر k



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{RC} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t)$$

مثال: خروجی سیستم ولتاژ خازن

$$y(t) = v_c(t)$$

$$e(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$0 = Ri_2(t) - v_c(t)$$

$$x_1 = i_1(t)$$

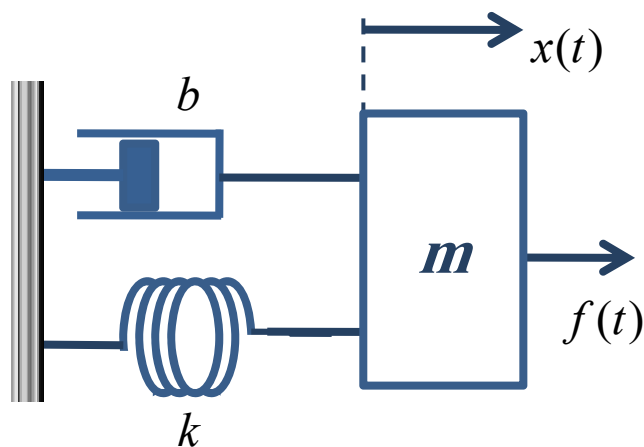
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} e(t)$$

$$x_2 = v_c(t)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} (i_1(t) - i_2(t)) = \frac{1}{C} (i_1(t) - \frac{1}{R} v_c(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} x_1(t) - \frac{1}{RC} x_2(t)$$



مثال: خروجی جابجایی جرم

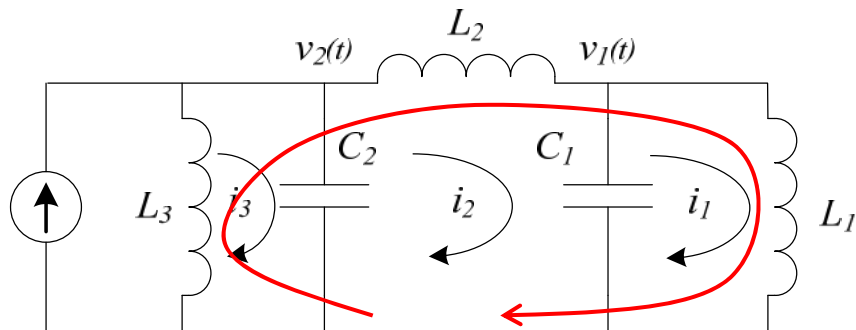
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) - b \frac{dx(t)}{dt} + f(t)$$

$$x_1 = x(t)$$

$$x_2 = \dot{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t)$$



مثال: خروجی سیستم v_1

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$i_2(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + i_1(t)$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + v_1(t)$$

$$i(t) = -i_3(t) + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + i_2(t)$$

$$v_3(t) = L_3 \frac{di_3(t)}{dt}$$

$$L_3 Di_3(t) = L_2 Di_2(t) + L_1 Di_1(t)$$



$$L_3 i_3(t) = L_2 i_2(t) + L_1 i_1(t) + k$$

جریان های وابسته

✓ چهار متغیر حالت غیر وابسته وجود دارد.



$$x_1 = v_1(t)$$

$$x_2 = v_2(t)$$

$$x_3 = i_1(t)$$

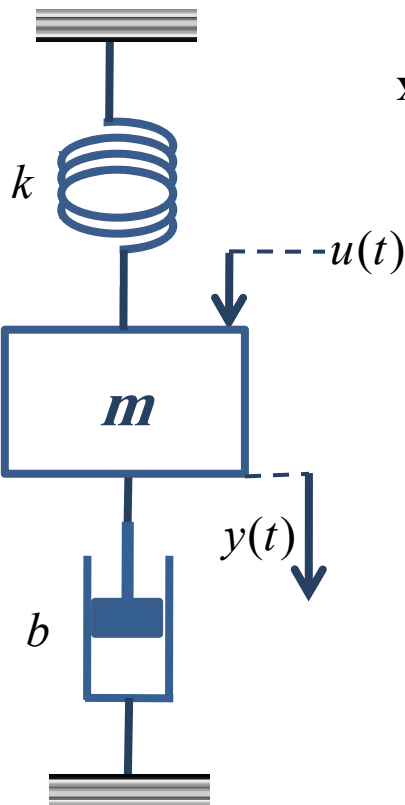
$$x_4 = i_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{-L_1}{L_3 C_2} & \frac{-L_2 - L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

ارتباط بین تابع تبدیل و معادلات فضای حالت سیستم

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) & \xrightarrow{L} & s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) & \Rightarrow & s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \\
 y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) & \xrightarrow{L} & Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) & & (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \\
 & & & & & \downarrow \\
 G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} & \leftarrow & Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s) & \leftarrow & \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\
 y(t) &= [1 \quad 0] \mathbf{x}(t)
 \end{aligned}$$

مثال: $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

$$[1 \quad 0] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0$$

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ \frac{-k}{m} & s \end{bmatrix} \quad \& \quad [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ \frac{-k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$mD^2y + bDy + ky = u \xrightarrow{L} (ms^2 + bs + k)Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

خطی کردن سیستم های غیر خطی:

$$y = f(x)$$

هدف، خطی کردن سیستم در نقطه کار (x_0, y_0)

$$y = f(x) \cong f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

≈ 0

$$\Rightarrow y - y_0 = K(x - x_0)$$

خطی کردن سیستم های غیر خطی دو متغیره:

$$y = f(x_1, x_2)$$

$$y \cong f(x_{10}, x_{20}) + \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} (x_2 - x_{20}) \right] +$$

$$\frac{1}{2!} \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} (x_1 - x_{10})^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} (x_2 - x_{20})^2 \right] + \dots$$

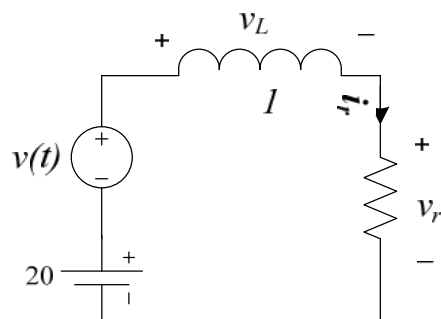
≈ 0

$$\Rightarrow y - y_0 = K_1(x_1 - x_{10}) + K_2(x_2 - x_{20})$$

$$y_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

مثال: خطی کردن $y = \cos(x)$ در $x = \frac{\pi}{2}$

$$y = 0 + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(x - \frac{\pi}{2}) = -(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Delta y = -\Delta x$$



$$\frac{V_L(s)}{V(s)} = ?$$

مثال:

$$v(t) = 0 \Rightarrow v_{r0} = 20 \Rightarrow i_{r0} = 14.78 \quad \text{نقطه کار}$$

$$i_r = 2e^{\frac{v_r}{10}} \Rightarrow v_r = 10 \ln\left(\frac{i_r}{2}\right)$$

$$v(t) + 20 = \frac{di_r}{dt} + 10 \ln\left(\frac{i_r}{2}\right) \Rightarrow 10 \ln\left(\frac{i_r}{2}\right) = 10 \ln\left(\frac{14.78}{2}\right) + \left. \frac{10/2}{i_r} \right|_{i_r=14.78} (i_r - 14.78) = 20$$

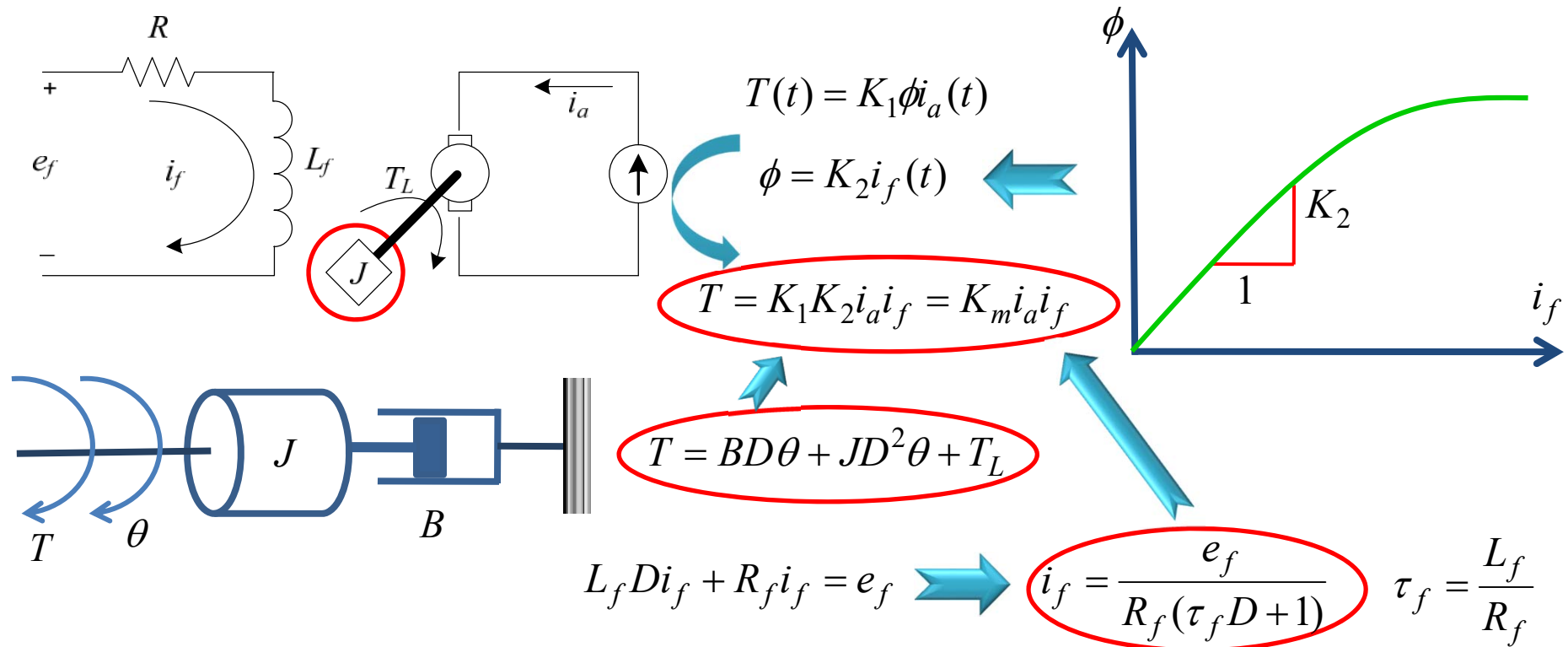
$$v(t) = \frac{10}{14.78} (i_r - 14.78) + \frac{di_r}{dt} \Rightarrow v(t) = \frac{10}{14.78} \Delta i_r + \frac{\Delta i_r}{\Delta t} \xrightarrow{L} (s + \frac{10}{14.78}) \Delta I_r(s) = V(s)$$

$$\Delta I_r(s) = \frac{V(s)}{s + \frac{10}{14.78}} \Rightarrow \frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{s}{s + \frac{10}{14.78}}$$

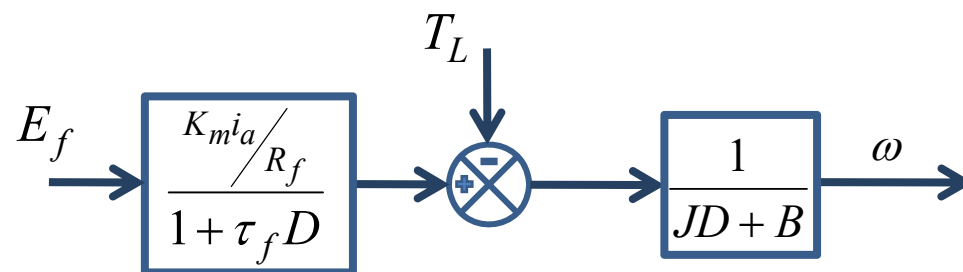
مدلسازی موتورهای DC:

- تبدیل یک سیگنال الکتریکی به یک سیگنال مکانیکی
- کنترل میدان (Field control)
- کنترل آرمیچر (Armature control)

- کنترل میدان: جریان آرمیچر ثابت، ورودی یک ولتاژ قابل تنظیم می باشد.



$$\theta = \frac{1}{JD^2 + BD} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \Rightarrow \omega = D\theta = \frac{1}{JD + B} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right]$$



- محاسبه معادلات فضای حالت با فرض: $T_L = 0$

$$e_f = R_f i_f + L_f D i_f$$

$$\left. \begin{array}{l} T = K_1 K_2 i_a i_f = K_m i_a i_f \\ T = BD\theta + JD^2\theta + T_L \end{array} \right\} \Rightarrow JD^2\theta = K_m i_a i_f - BD\theta$$

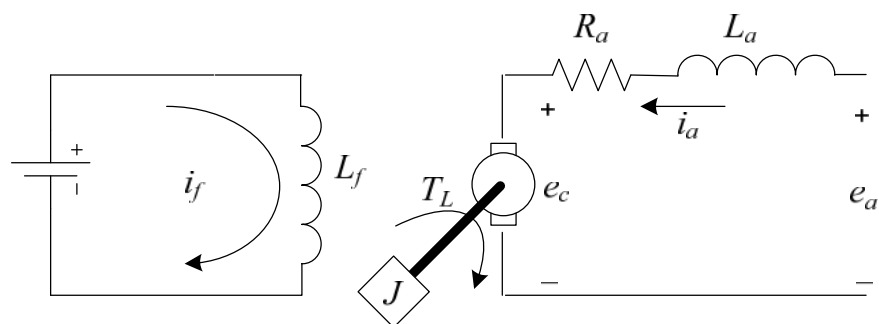
$$x_1 = \dot{\theta} \quad u(t) = e_f$$

$$x_2 = i_f \quad y = \omega = \dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-B}{J} & \frac{K_m i_a}{J} \\ 0 & \frac{-R_f}{L_f} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

– کنترل آرمیچر: سرعت توسط تنظیم ولتاژ اعمال شده به آرمیچر تنظیم می باشد.

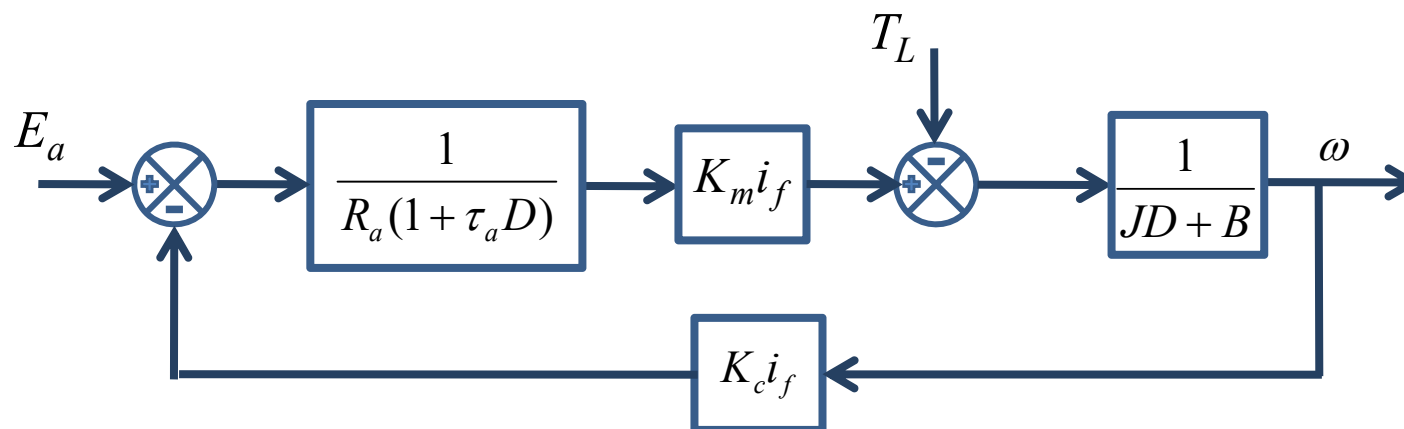


$$e_c = K_3 \phi \omega$$

$$e_c = K_2 K_3 i_f \omega = K_c i_f \omega \quad \tau_a = L_a / R_a$$

$$e_a - e_c = R_a i_a + L_a D i_a = R_a (1 + \tau_a D) i_a$$

$$T = K_m i_a i_f, \quad T = (BD + JD^2) \theta + T_L$$



- محاسبه معادلات فضای حالت با فرض: $T_L = 0$

$$e_a = R_a i_a + L_a D i_a + K_c i_f D \theta$$



$$x_1 = i_a$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$y = \omega = \dot{\theta}$$

$$u(t) = e_a$$

$$K_m i_a i_f = B D \theta + J D^2 \theta$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-K_c i_f}{L_a} x_2(t) - \frac{R_a}{L_a} x_1(t) + \frac{e_a}{L_a}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{K_m i_f}{J} x_1(t) - \frac{B}{J} x_2(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & \frac{-K_c i_f}{L_a} \\ \frac{K_m i_f}{J} & \frac{-B}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t)$$

تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار سیستم های کنترل

هدف: اعمال سیگنال های استاندارد به سیستم و تحلیل پاسخ خروجی سیستم در حالت گذرا و ماندگار

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

پاسخ سیستم } - پاسخ حالت گذرا (Transient response)
- پاسخ حالت ماندگار (Steady-state response)

👉 در عمل بسیاری از سیستم های صنعتی را می توان با یک سیستم **مرتبه دو** تقریب زد.

ورودی های استاندارد

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 0^+ & t = 0 \end{cases} \xrightarrow{L} \Delta(s) = 1$$

$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$

۱- تابع ضربه

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{L} U(s) = \frac{1}{s}$$

۲- تابع پله

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{L} R(s) = \frac{1}{s^2}$$

۳- تابع شیب

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{L} R(s) = \frac{1}{s^3}$$

۴- تابع شتاب (سه‌موی)

۵- تابع چند جمله ای

$$p(t) = \begin{cases} R_1 + R_2 t + \frac{R_3}{2} t^2 + \frac{R_4}{3!} t^3 + \dots + \frac{R_{p+1}}{p!} t^p & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

۶- تابع سینوسی

$$s(t) = \begin{cases} R \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

پاسخ حالت ماندگار

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

الف- پاسخ حالت ماندگار سیستم مرتبه اول

$$G(s) = \frac{k}{s + a_0} \Rightarrow C(s) = G(s)R(s)$$

۱- ورودی پله واحد

$$C(s) = \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{k}{a_0}}{s} - \frac{\frac{k}{a_0}}{s + a_0} \Rightarrow c(t) = \frac{k}{a_0} - \frac{k}{a_0} \exp(-a_0 t) \quad c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{a_0}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \Rightarrow c_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0}$$

۲- ورودی شیب واحد

$$C(s) = \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s^2} \Rightarrow c_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s^2} = \infty$$

$$c(t) = \frac{k}{a_0} t + \frac{k}{a_0^2} - \frac{k}{a_0^2} \exp(-a_0 t)$$

۳- ورودی سهمی

$$c_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s + a_0} \cdot \frac{1}{s^3} = \infty$$

$$\tau = \frac{1}{a_0} \quad \text{ثابت زمانی سیستم:}$$

- هرچه ثابت زمانی سیستم کوچکتر باشد، پاسخ سریعتر به مقدار نهایی خود می رسد.

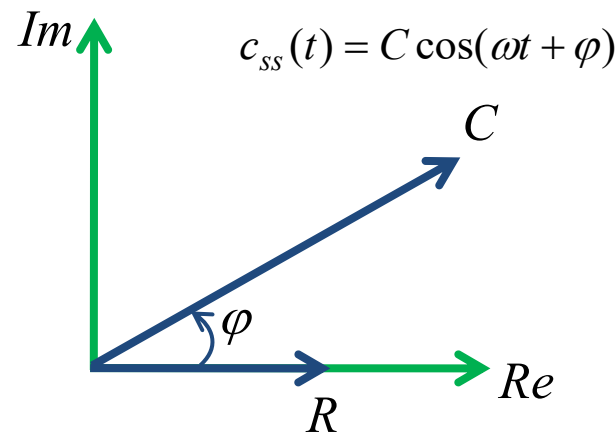
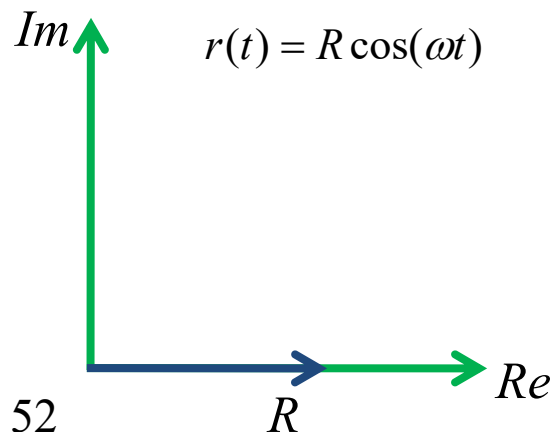
ب- پاسخ حالت ماندگار سیستم مرتبه دوم

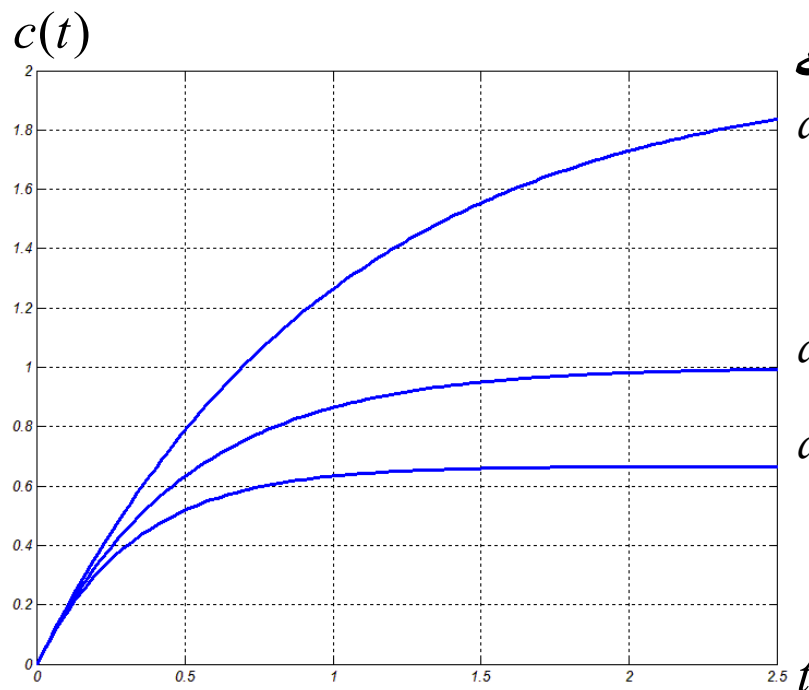
$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1s + a_0} \Rightarrow c_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s^2 + a_1s + a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0}$$

پاسخ ماندگار سیستم خطی به ورودی سینوسی

- با فرض پایداری سیستم خطی، پاسخ ماندگار آن به ورودی سینوسی، یک تابع سینوسی خواهد بود.

حوزه فازور





پاسخ حالت گذرای سیستم مرتبه یک به ورودی پله

$$a_0 = 1$$

$$G(s) = \frac{k}{s + a_0} \Rightarrow c(t) = \frac{k}{a_0} - \frac{k}{a_0} \exp(-a_0 t)$$

$$a_0 = 2$$

$$a_0 = 3$$

$$\tau = \frac{1}{a_0}$$

فرض: $k = 2$

پاسخ حالت گذرای سیستم مرتبه دوم به ورودی پله

۱- پاسخ میرای شدید (Overdamped)

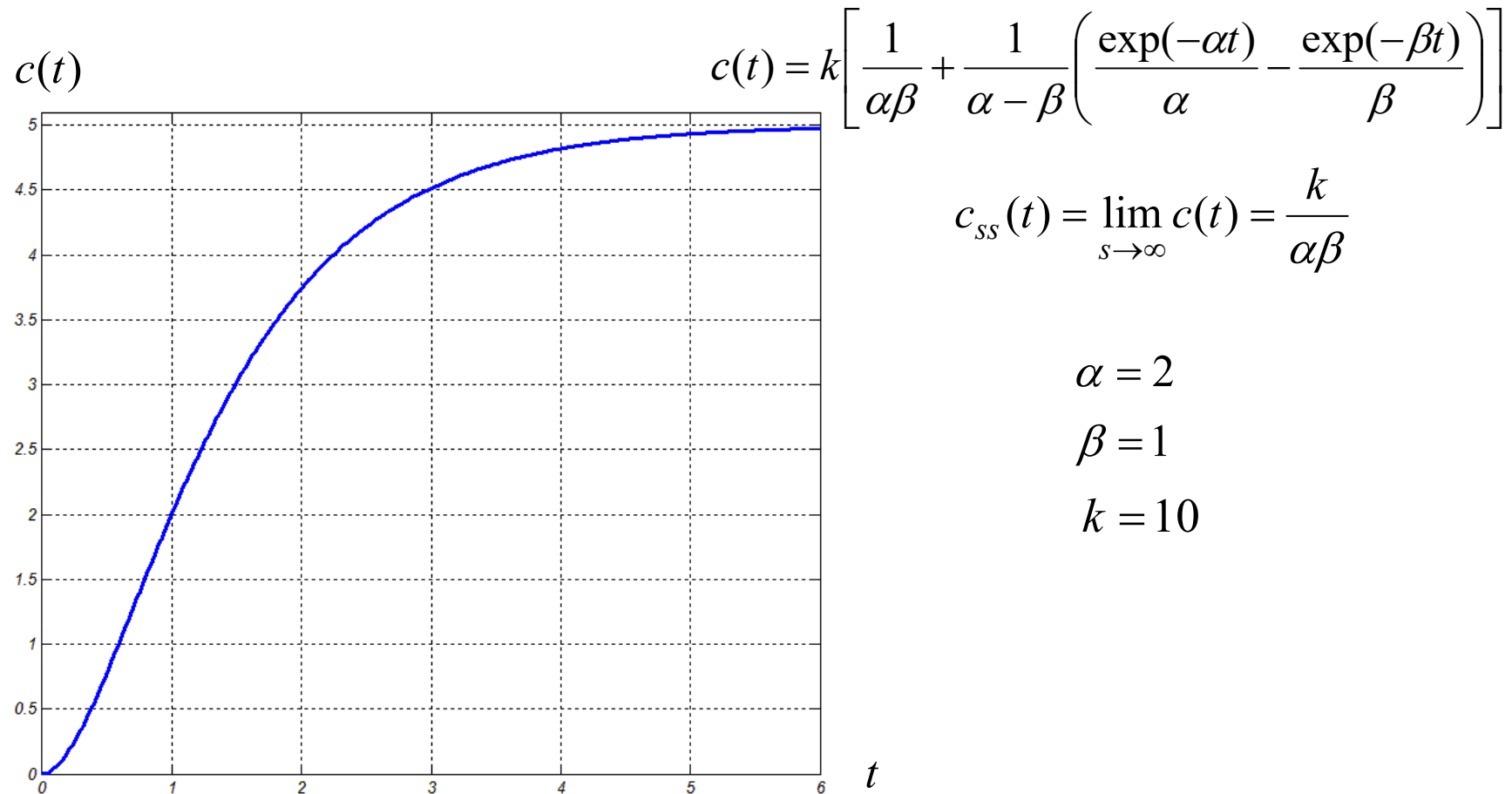
۲- پاسخ میرای بحرانی (Critically damped)

۳- پاسخ میرای ضعیف (Underdamped)

۱- پاسخ میرای شدید (Overdamped)

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{\alpha\beta} \left[\frac{1}{s} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{1}{s + \alpha} + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \frac{1}{s + \beta} \right]$$

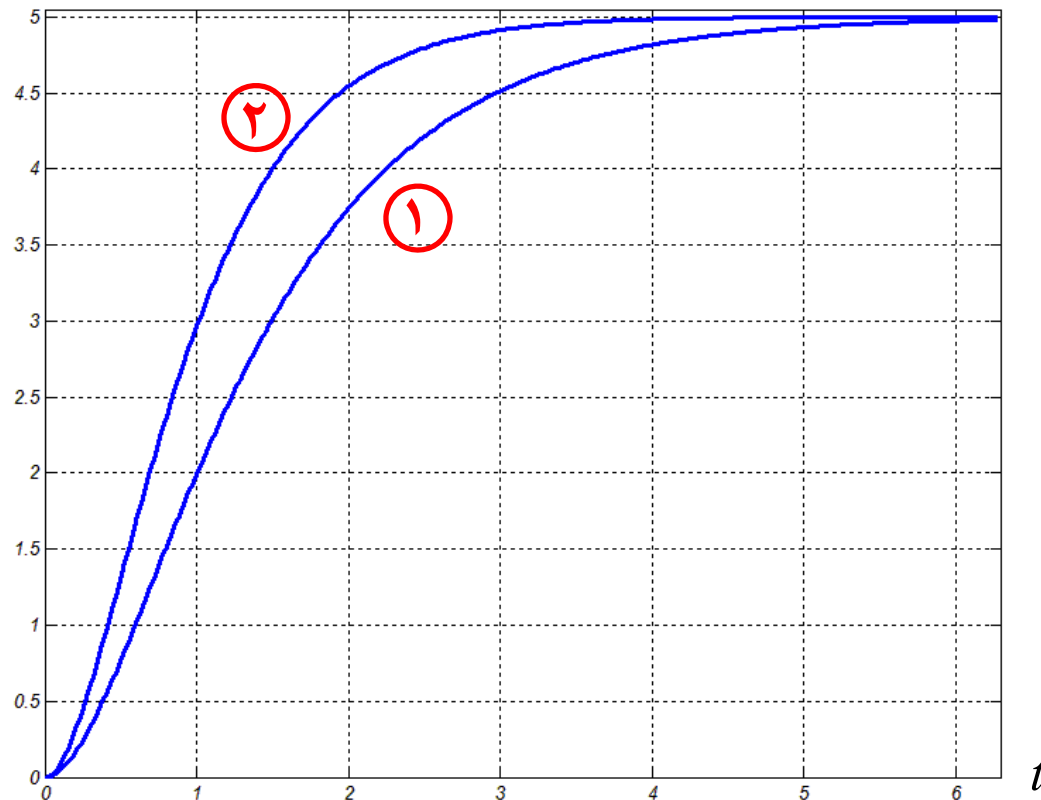


۲- پاسخ میرای بحرانی (Critically damped)

$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2}$$

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{\alpha^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2} \right]$$

$c(t)$



$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2} [1 - (1 + \alpha t) \cdot \exp(-\alpha t)]$$

$$c_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha^2}$$

۱: $k = 10$ $\alpha = 2, \beta = 1$ میرای شدید

۲: $k = 20$ $\alpha = 2$ میرای بحرانی

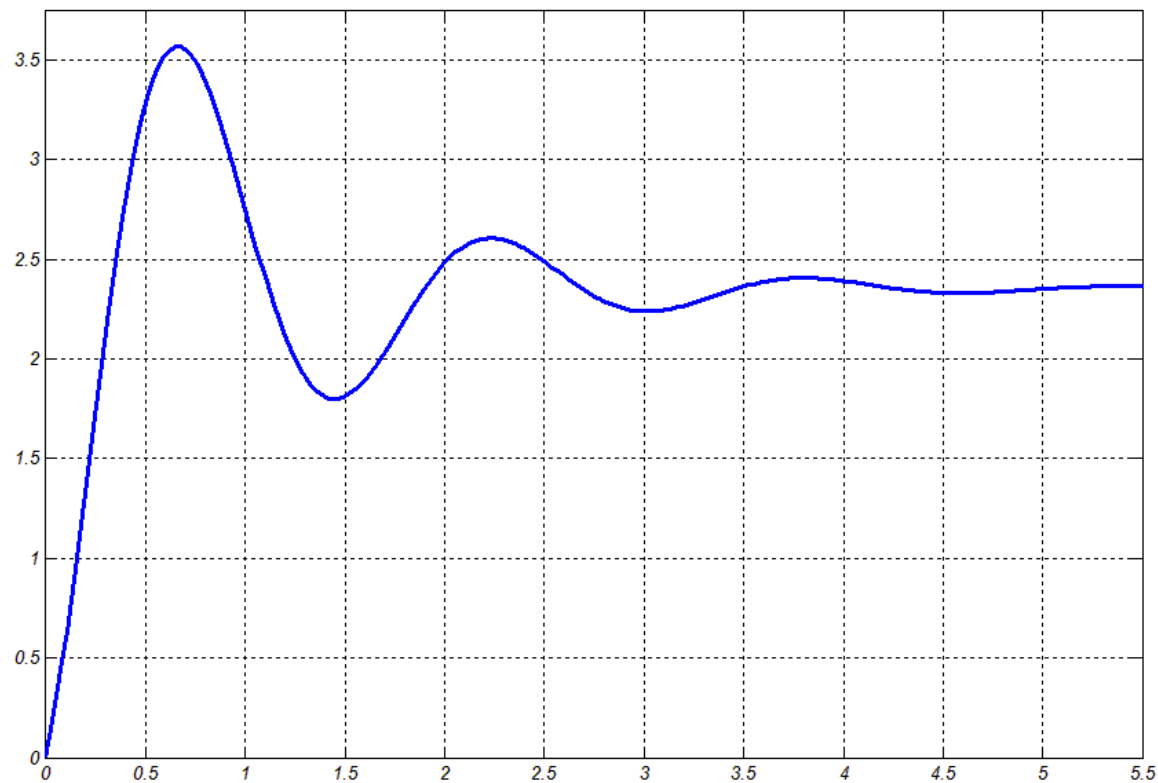
$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

۳- پاسخ میرای ضعیف (Underdamped)

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right]$$

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left[1 - \exp(-\alpha t) \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin \beta t \right]$$

$c(t)$



$$c_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2}$$

- حداکثر فراجهش (Maximum overshoot) $\mu_p = c_{\max} - c_{ss}$ $\% \mu_p = \frac{c_{\max} - c_{ss}}{c_{ss}} \times 100$

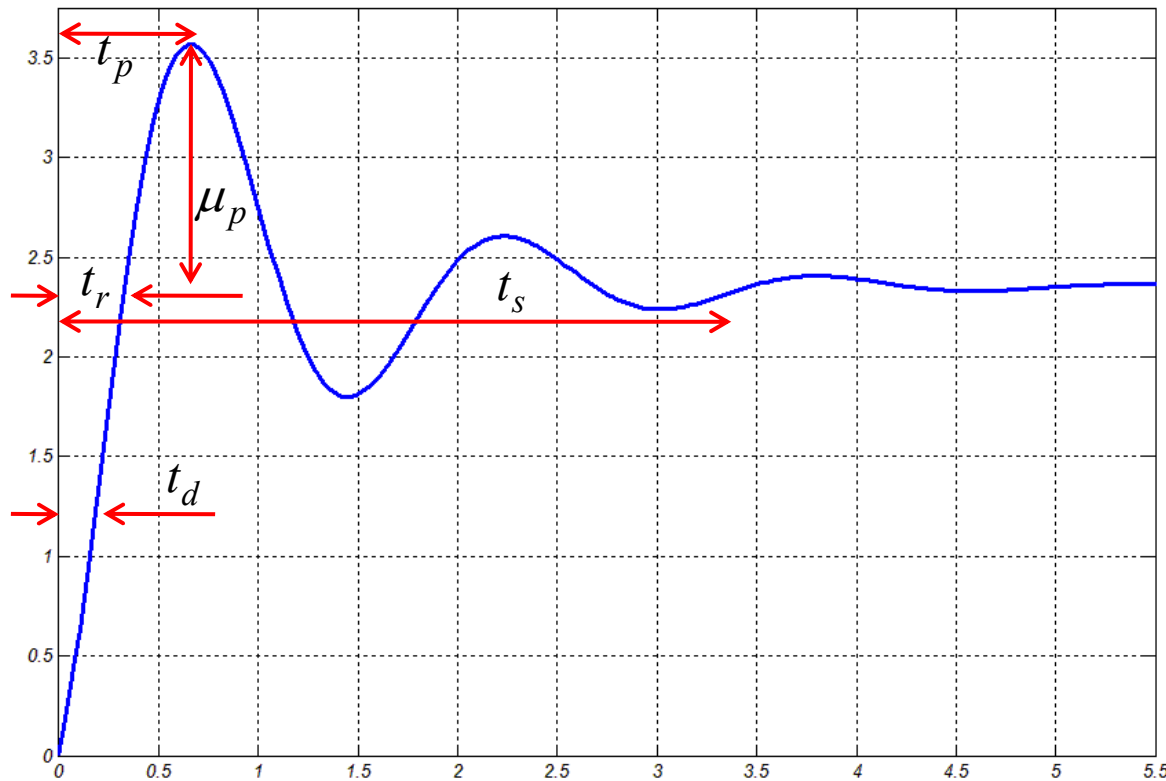
- افزایش حداکثر فراجهش باعث کاهش پایداری سیستم می گردد.

- زمان تاخیر (Delay time) t_d : زمان رسیدن پاسخ به نصف مقدار ماندگار

- زمان صعود (Rise time) t_r : زمان رسیدن پاسخ از ۰ تا ۱۰۰٪، یا از ۵٪ تا ۹۵٪ و یا از ۱۰ تا ۹۰٪ مقدار نهایی

- زمان نشست (Settling time) t_s : زمان رسیدن پاسخ ۲٪ یا ۵٪ مقدار نهایی

- زمان پیک (Peak time) t_p : زمان رسیدن پاسخ به اولین مقدار ماکزیمم $c(t)$



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_n} \quad \text{- نسبت میرایی}$$

- فرکانس طبیعی میرا نشده

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

- حالت های مختلف پاسخ سیستم به ازای مقادیر متفاوت ξ

۱- $\xi = 0$: پاسخ نوسانی

۲- $0 < \xi < 1$: پاسخ میرایی ضعیف

۳- $\xi = 1$: پاسخ میرایی بحرانی

۴- $\xi > 1$: پاسخ میرایی شدید

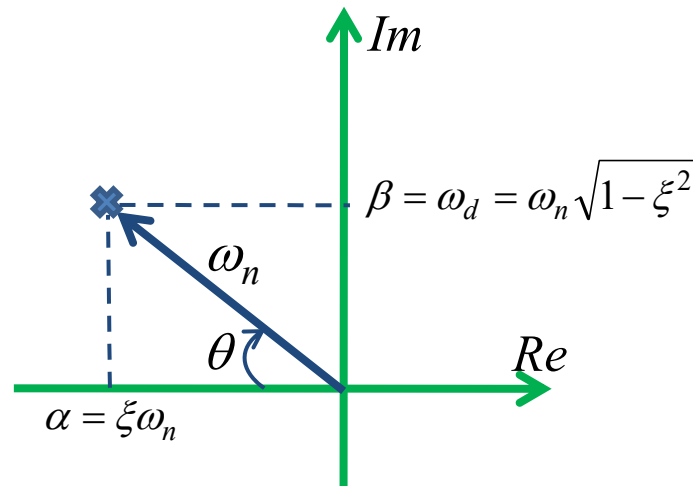
- پاسخ سیستم به ورودی پله واحد:

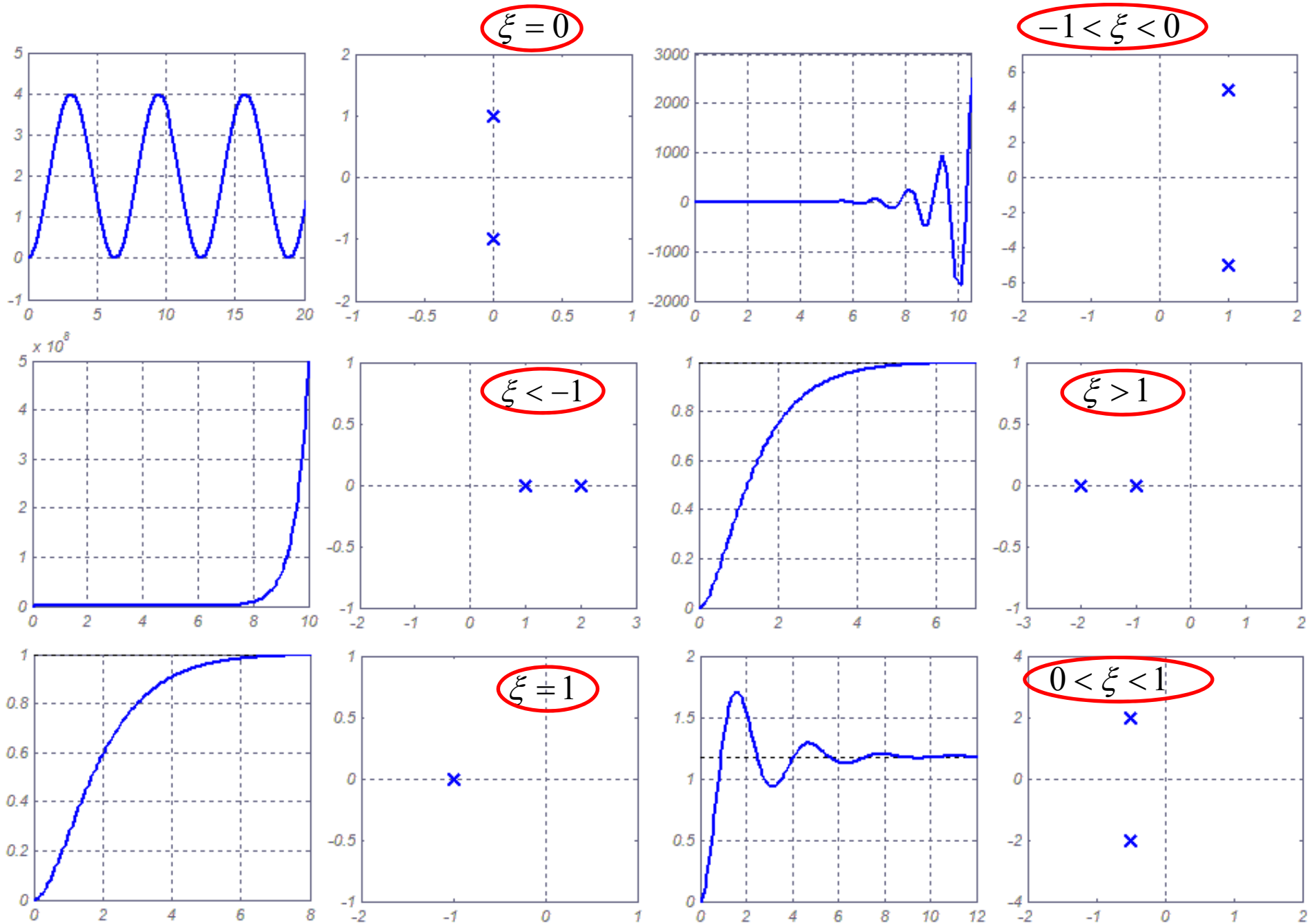
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

تمرین

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left((\omega_n \sqrt{1-\xi^2})t + \cos^{-1} \xi\right) \Rightarrow \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi = \cos \theta$$





محاسبه ویژگی های پاسخ سیستم مرتبه دو به ورودی پله واحد

μ_p

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin((\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) t_p) = 0 \Rightarrow \sin((\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) t_p) = 0$$

$$(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\mu_p = c(t_p) - 1 = -\exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi - \cos^{-1} \xi) = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

t_r (برای رسیدن پاسخ سیستم از ۰ به ۱)

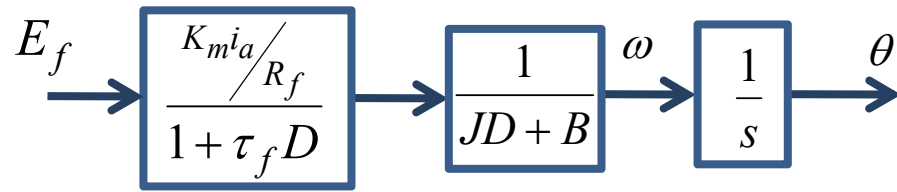
$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin((\omega_n \sqrt{1-\xi^2}) t_r + \cos^{-1} \xi) \Rightarrow t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

t_d حل دقیق آن تقریباً دشوار است و معمولاً از روش های تقریبی محاسبه می شود.

t_s به صورت تقریبی برابر است با:

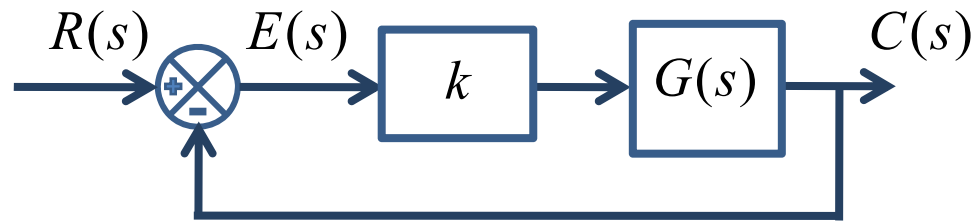
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \text{معیار } 2\% \quad \& \quad t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad \text{معیار } 5\%$$

مثال: تابع تبدیل از ولتاژ میدان به موقعیت
محور موتور DC با کنترل میدان:



$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs} \frac{(K_{mia}/R_f)}{1 + \tau_f s} = \frac{K}{s(\tau_L s + 1)(\tau_f s + 1)}$$

$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K}{s(\tau_L s + 1)} \quad \leftarrow \text{فرض: } \tau_f \ll 1 \quad \tau_f = \frac{L_f}{R_f} \quad \& \quad \tau_L = \frac{J}{B}$$



$$G(s) = \frac{0.5}{s(0.25s + 1)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k}{s^2 + 4s + 2k} \quad \xrightarrow{R(s) = \frac{1}{s}} \quad C(s) = \frac{2k}{s(s^2 + 4s + 2k)}$$

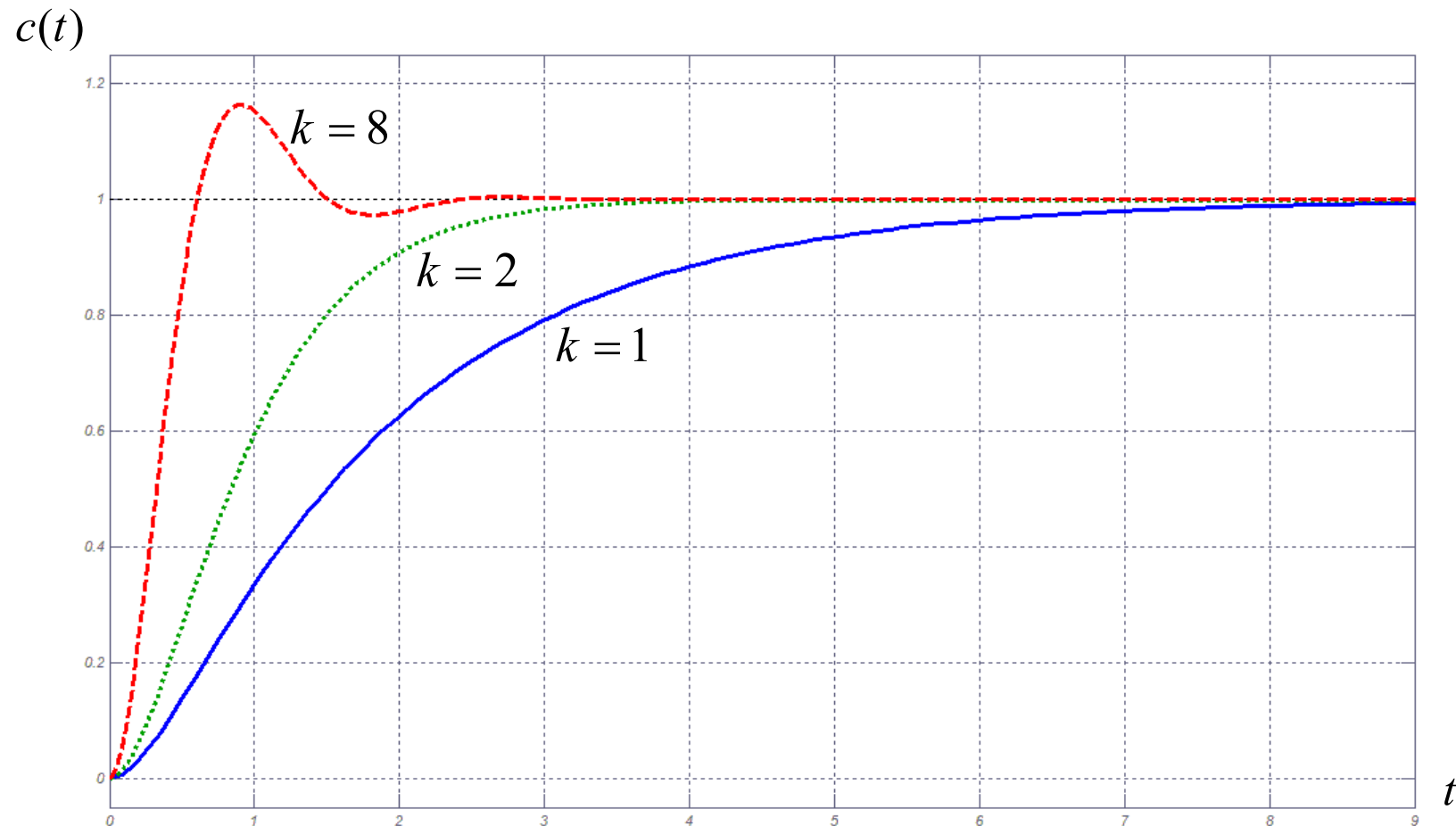
$$c(t) = 1 - 1.207e^{-0.586t} + 0.207e^{-3.414t} \quad k = 1$$

$$c(t) = 1 - 2te^{-2t} - e^{-2t} \quad k = 2$$

$$61 \quad c(t) = 1 + 1.1547e^{-2t} \cos(3.4641t + \frac{5\pi}{6}) \quad k = 8$$

محاسبه ویژگی های پاسخ سیستم به ازای $k = 8$

$$C(s) = \frac{16}{s(s^2 + 4s + 16)} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_n = 4 \\ \xi = 0.5 \\ \omega_d = 3.46 \\ \theta = 60^\circ \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} t_p = 0.91 \\ \% \mu_p = 16.3\% \\ t_r = 0.6054 \end{matrix} \right. \quad \& \quad \begin{matrix} t_s = 2 & \text{معیار } 2\% \\ t_s = 1.5 & \text{معیار } 5\% \end{matrix}$$



اثرات اضافه کردن قطب و صفر به توابع تبدیل

- **قطب های غالب** توابع تبدیل: قطب هایی که بیشترین تاثیر را در پاسخ سیستم دارند.

- بسیاری از سیستم ها را در عمل می توان با تعیین دو قطب غالب آن به سیستم درجه دو تقریب زد.

- قطب هایی که در صفحه S قرار دارند و به محور موهومی نزدیک تر باشند، پاسخ گذرای کندی دارند.

- قطب هایی که نسبت به قطب های غالب در فاصله دورتری از محور موهومی قرار دارند، پاسخ گذرای سریع تری دارند.

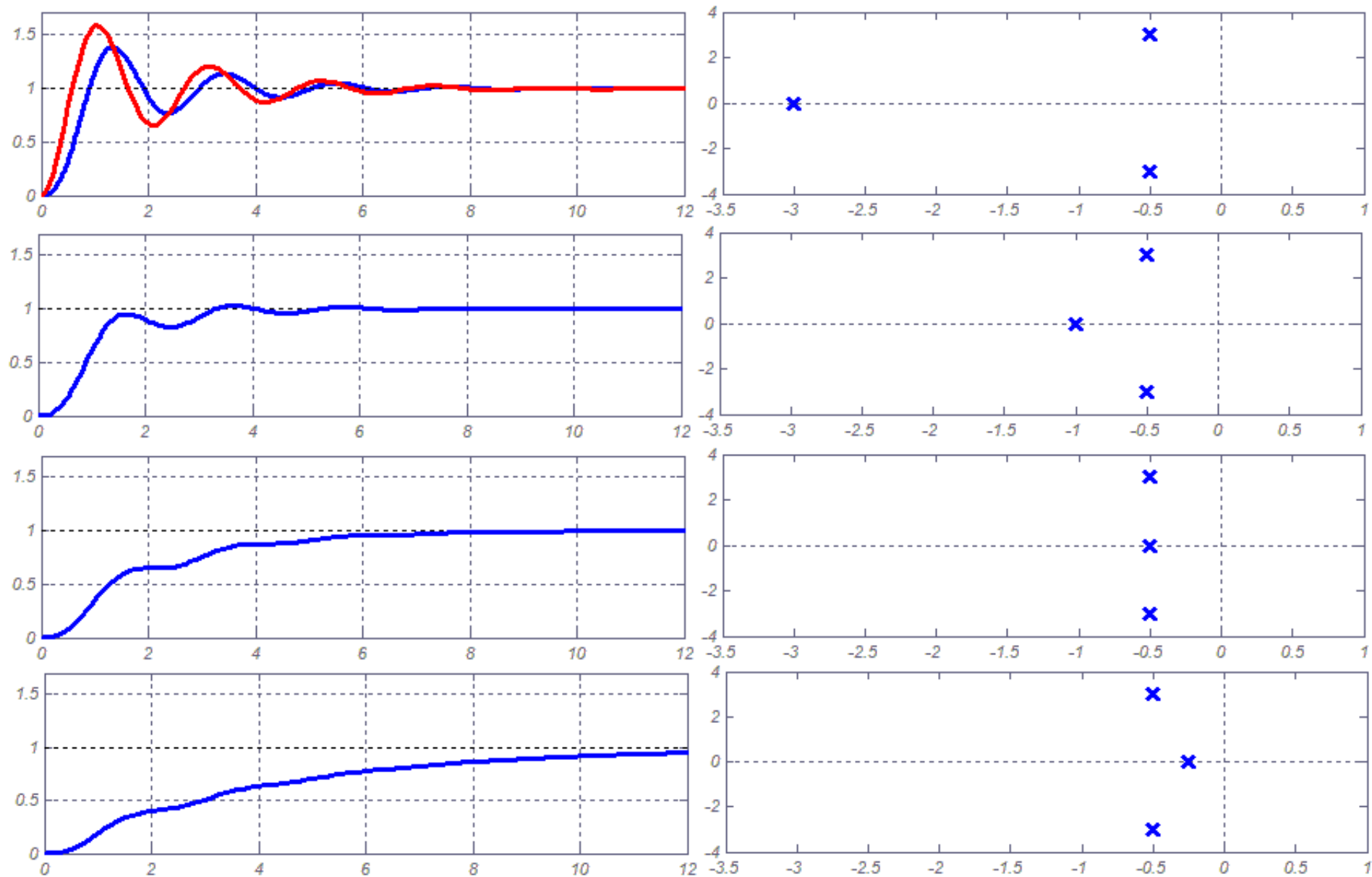
- در عمل، اگر اندازه قسمت حقیقی قطبی ۵ تا ۱۰ برابر قطب غالب و یا قطب های مزدوج غالب باشد، قطب کم اثر است.

$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s - p_3)} \quad \& k = -\omega_n^2 p_3 \quad \& p_3 < 0$$

$$c(t) = 1 + 2A_1 e^{-\xi\omega_n t} \sin((\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})t + \theta) + A_2 e^{p_3 t}$$

- A_2 همواره منفی است.

- با حرکت قطب به سمت محور موهومی اندازه A_2 افزایش یافته و حداکثر فراجهش کاهش می یابد.



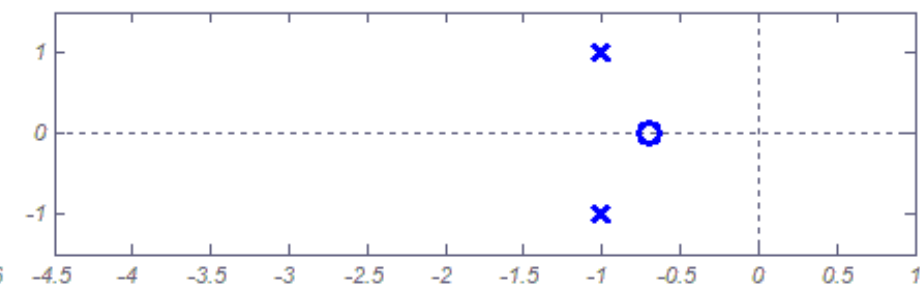
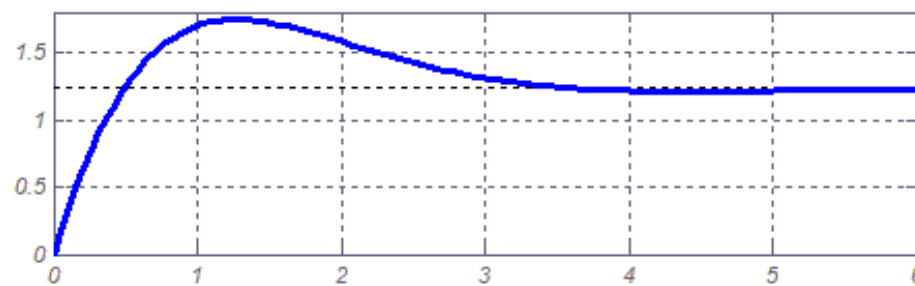
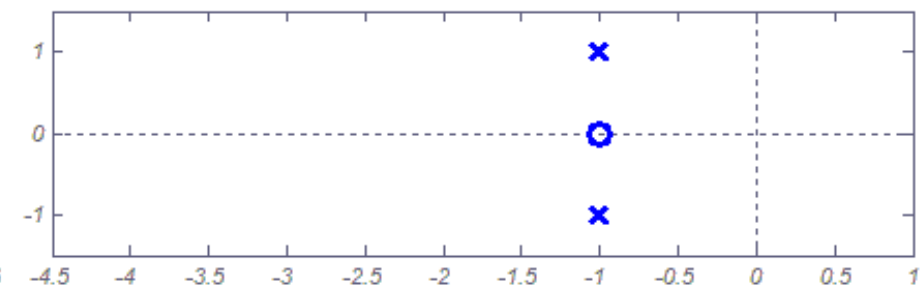
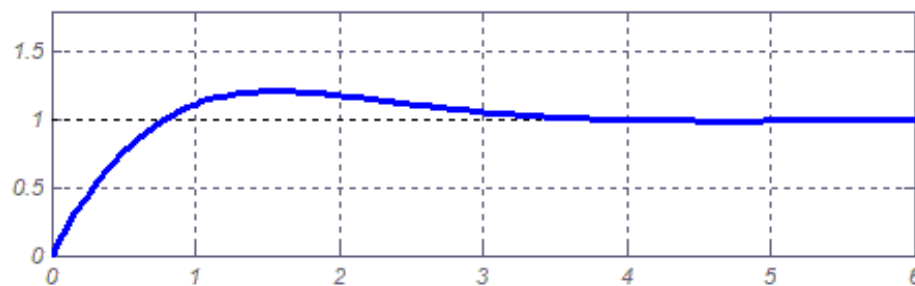
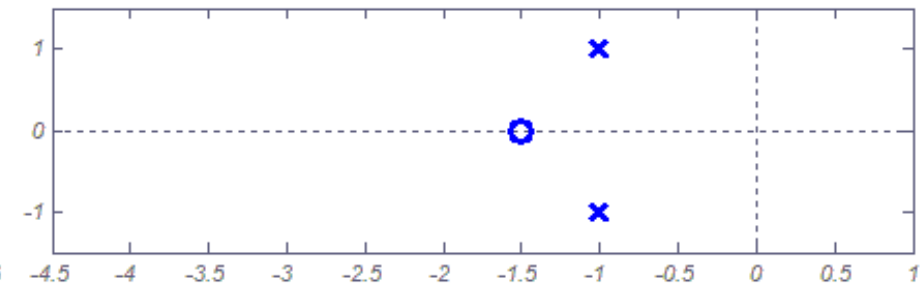
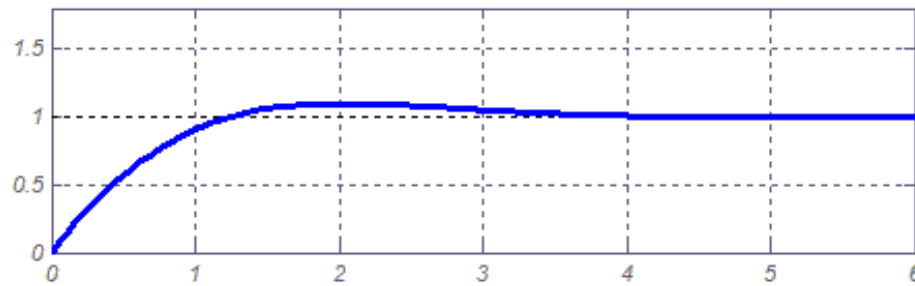
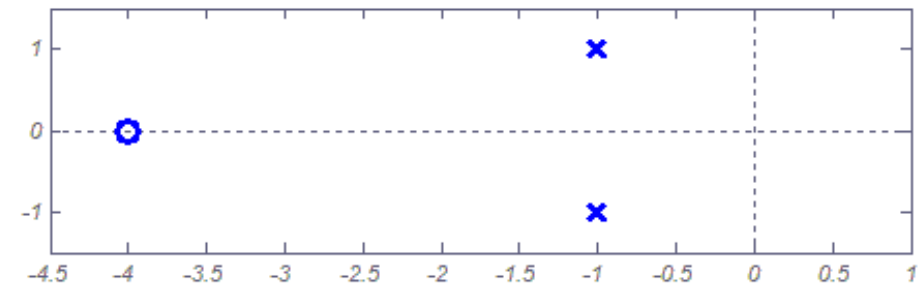
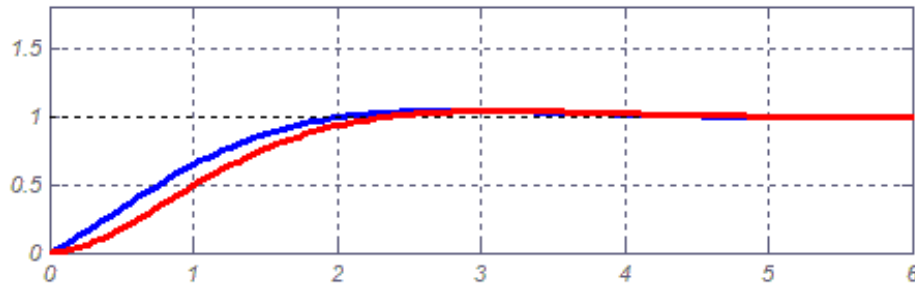
$$\frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



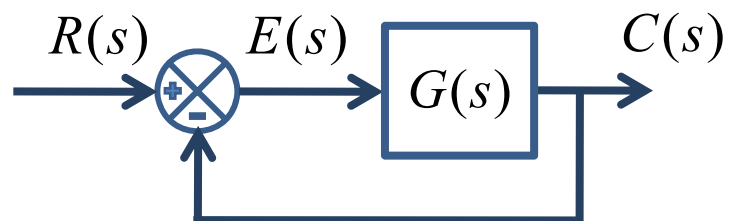
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(s - z_1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

&

$$z_1 < 0$$



نوع سیستم

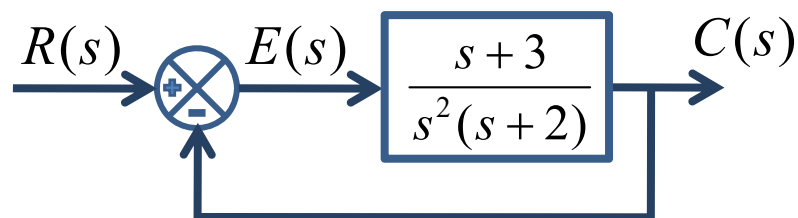


- در بررسی نوع سیستم فیدبک واحد در نظر گرفته می شود.

- q معرف نوع سیستم می باشد.

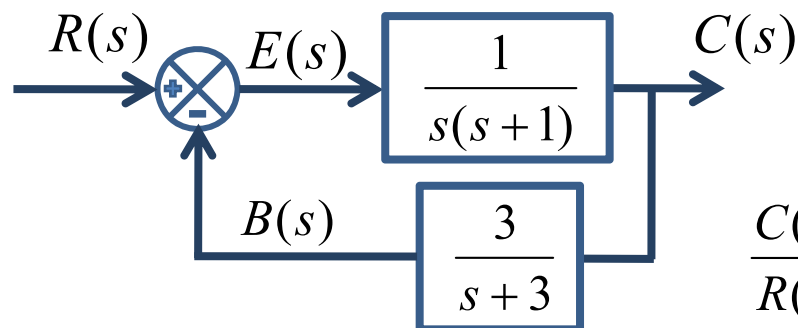
$$G(s) = \frac{k(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^q(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)}$$

مثال:



سیستم نوع دو و از مرتبه سه

مثال:

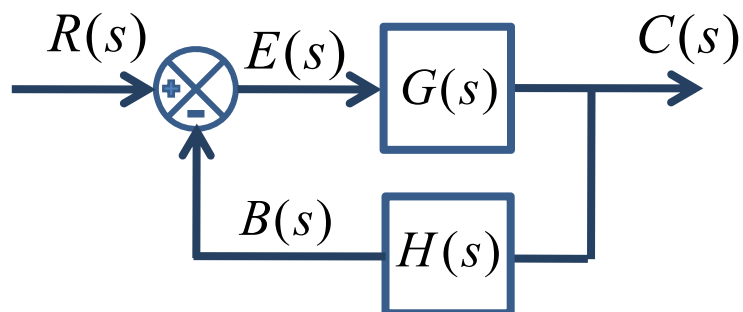


$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad \& \quad H(s) = \frac{3}{s+3}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{s+3}{s^3 + 4s^2 + 3s + 3} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 + G_{eq}(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow G_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s) - N(s)} = \frac{s+3}{s(s^2 + 4s + 2)}$$

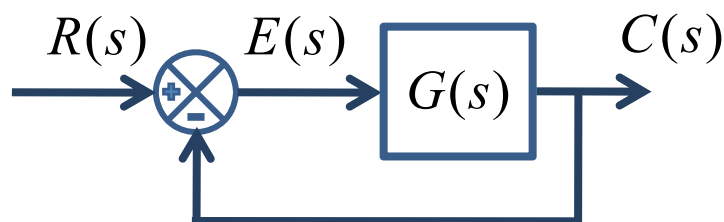
سیستم نوع یک و از مرتبه سه



$$G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]}$$

خطای حالت ماندگار (Steady-state error) سیستم های کنترل (با فرض پایداری سیستم)

- از اهداف مهم کنترل سیستم، دنبال کردن ورودی مرجع توسط خروجی سیستم می باشد.



$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ e_{tr}(t) = e(t) - e_{ss} \end{array} \right.$$

۱- خطای حالت ماندگار به ورودی پله

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{R}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1 + G(s)}$$

$$\& K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{1 + K_s}$$

$$e_{ss} = \frac{R}{1 + K_s} \quad \leftarrow K_s = cte \quad \text{سیستم نوع صفر:}$$

$$e_{ss} = 0 \quad \leftarrow K_s = \infty \quad \text{سیستم نوع یک و بالاتر:}$$

مثال: $G(s) = \frac{5}{s+3} \quad \leftarrow \quad K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{5}{3} \quad \leftarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{1 + \frac{5}{3}} = 0.375$

۲- خطای حالت ماندگار به ورودی شیب

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{R}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(s)} \quad \& \quad K_r = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{K_r}$$

- سیستم نوع صفر: $K_r = 0 \quad \leftarrow \quad e_{ss} = \infty$

- سیستم نوع یک: $K_r = cte \quad \leftarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{K_r}$

- سیستم نوع دو و بالاتر: $K_r = \infty \quad \leftarrow \quad e_{ss} = 0$

۳- خطای حالت ماندگار به ورودی سهموی

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{R}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(s)} \quad \& \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{K_a}$$

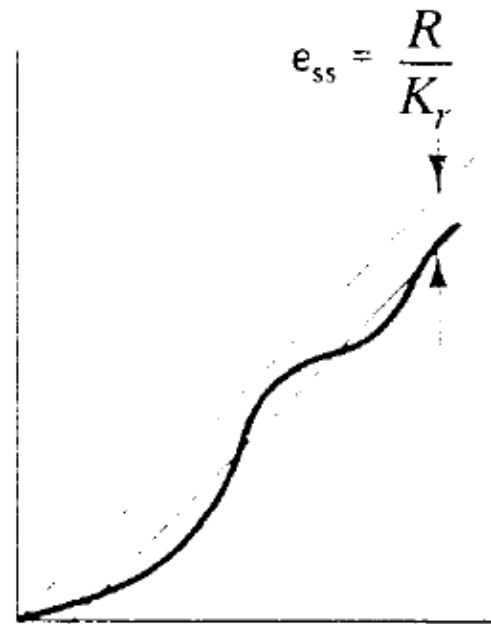
- سیستم نوع صفر و یک: $K_a = 0 \quad \leftarrow \quad e_{ss} = \infty$

- سیستم نوع دو: $K_a = cte \quad \leftarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{K_a}$

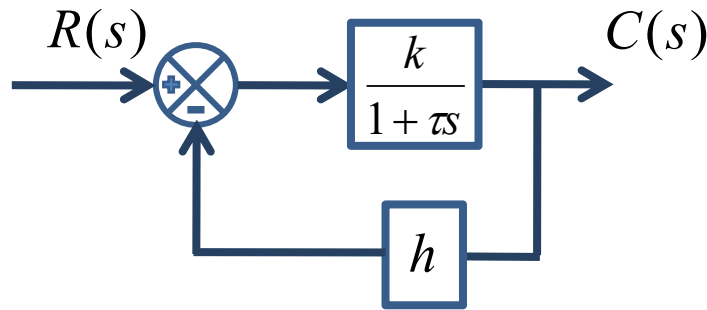
- سیستم نوع سه و بالاتر: $K_a = \infty \quad \leftarrow \quad e_{ss} = 0$

نوع سیستم	ورودی پله	ورودی شیب	ورودی سهموی
۰	$\frac{R}{1+K_s}$	∞	∞
۱	۰	$\frac{R}{K_r}$	∞
۲	۰	۰	$\frac{R}{K_a}$
۳	۰	۰	۰

☠ برای سیستم هایی که فیدبک واحد ندارند بایستی از روش مستقیم خطای حالت ماندگار را بدست آورد.



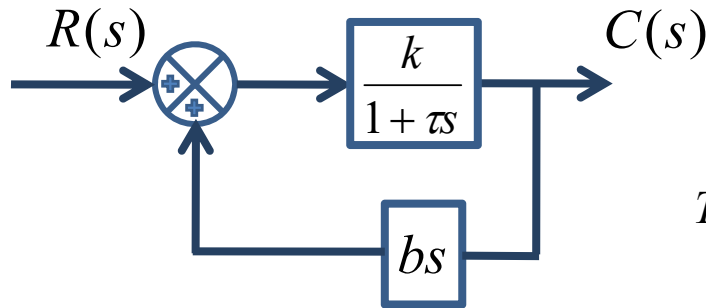
تأثیر فیدبک بر عملکرد سیستم های کنترل



$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\frac{k}{1+\tau s}}{1 + \frac{k}{1+\tau s}h} = \frac{k_c}{1 + \tau_c s} \Rightarrow \begin{cases} k_c = \frac{k}{1+hk} \\ \tau_c = \frac{\tau}{1+hk} \end{cases}$$

- فیدبک بهره سیستم و ثابت زمانی را کم می کند.

- کاهش ثابت زمانی باعث افزایش سرعت سیستم می شود.



کاهش ثابت زمانی به ازای ثابت ماندن بهره سیستم

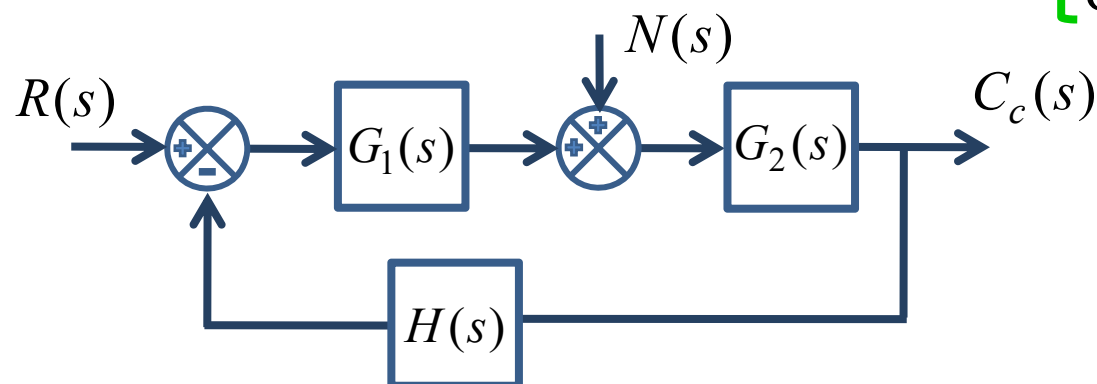
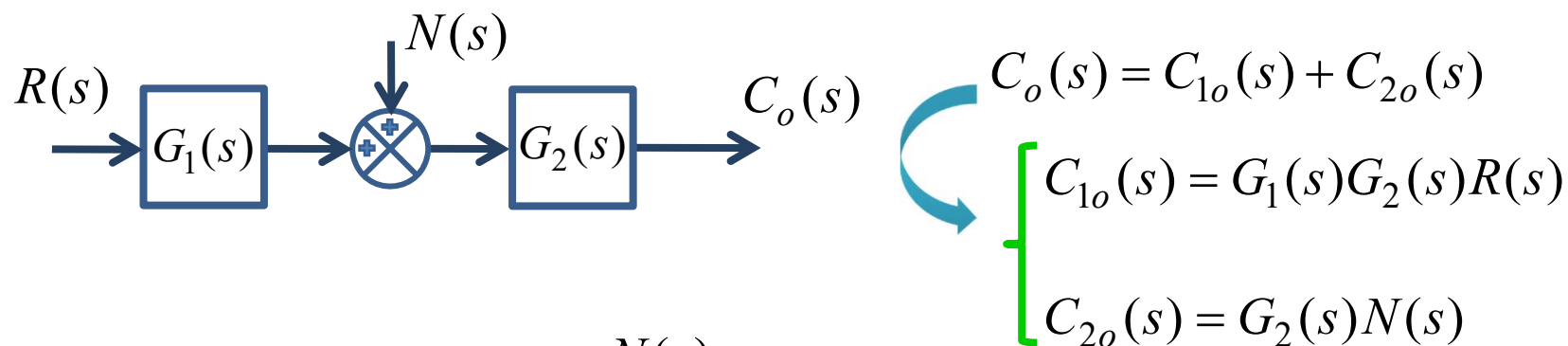
$$T(s) = \frac{k}{(\tau - bk)s + 1} = \frac{k}{1 + \tau_c s} \Rightarrow \tau_c = \tau - bk$$

تأثیر فیدبک بر اغتشاشات خارجی (External disturbances) سیستم های کنترل

- اغتشاشات خارجی، ورودی های غیر قابل پیش بینی هستند که تأثیر منفی بر عملکرد سیستم دارند.

الف- اغتشاشات بار (Load disturbances) یا افست (Offset) یک ثابت غیر صفر ثابت

ب- سیگنال نویز تصادفی (Random noise)



$$C_c(s) = C_{1c}(s) + C_{2c}(s)$$

بدست می آوریم. $R(s)$ و $N(s)$ را به ترتیب با صفر قرار دادن C_{2c} و C_{1c}

$$C_{1c}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) \quad \& \quad C_{2c}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

با مقایسه روابط C_{2o} و C_{2c} داریم:

$$\frac{C_{2c}(s)}{C_{2o}(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \Rightarrow \left| \frac{C_{2c}(s)}{C_{2o}(s)} \right| \leq 1$$

تأثیر فیدبک بر حساسیت سیستم های کنترل

- در طراحی معمولاً مدل کاملی از سیستم عملی را در نظر می گیریم.
- خطاهای مدلسازی و اندازه گیری در طراحی نادیده گرفته می شوند.
- تغییرات محیط، فرسودگی و عدم دسترسی به برخی پارامترهای مدل باعث بروز نامعینی (Uncertainty) در سیستم می شود.

بررسی حساسیت (Sensitivity) عبارت است از بررسی عملکرد سیستم که تا چه اندازه ای به برخی تغییرات و خطاهای موجود در پارامترها حساس می باشد.

- در سیستم حلقه باز خروجی مستقیماً به تغییرات مدل سیستم بستگی دارد.

$$C(s) = G(s)R(s)$$

- در سیستم حلقه بسته می توان $H(s)$ را به نحوی انتخاب نمود که:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(s)H(s) \gg 1 \\ \Rightarrow C(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s) \end{array} \right.$$

- انتخاب $H(s)$ به نحوی که $G(s)H(s) \gg 1$ برقرار گردد همیشه عملی نیست و در برخی موارد باعث ایجاد پاسخ نوسانی و یا ناپایداری سیستم می گردد.

- فرض کنید $\Delta G(s)$ تأثیر تغییرات پارامترهای مدل باشد.

در سیستم حلقه باز

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s)$$

$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]H(s)} R(s)$$

در سیستم حلقه بسته

$$\Delta C(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + [G(s) + \Delta G(s)]H(s)][1 + G(s)H(s)]} R(s)$$

- معمولاً می توان فرض نمود: $G(s)H(s) \gg \Delta G(s)H(s)$  $\Delta C(s) \approx \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2} R(s)$

 $\frac{\Delta C(s)/R(s)}{\Delta G(s)} = \frac{\Delta T(s)}{\Delta G(s)} \approx \frac{1}{[1 + G(s)H(s)]^2}$

- در اکثر موارد $[1 + G(s)H(s)]^2 > 1$ می باشد و در نتیجه تاثیر تغییرات مدل بر پاسخ خروجی در سیستم حلقه بسته کمتر از سیستم حلقه باز است.

به ازای تغییرات کوچک  حساسیت سیستم به تابع تبدیل حلقه باز: $S_G^T \triangleq \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial G(s)/G(s)}$ $S_G^T \triangleq \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}$

 $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$  $S_G^T \triangleq \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{[1 + GH]^2} \cdot \frac{G}{G/[1 + GH]} = \frac{1}{1 + GH}$

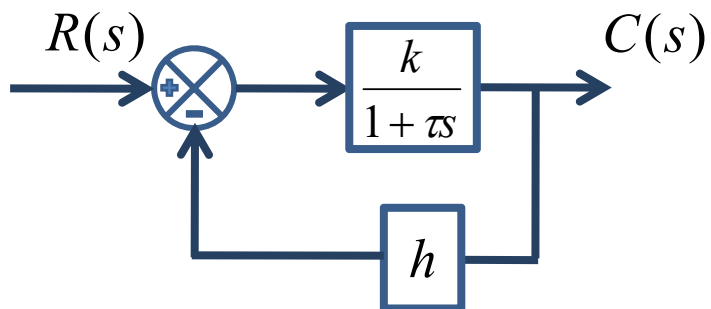
حساسیت سیستم به تابع فیدبک:

$$S_H^T \triangleq \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = - \left[\frac{G}{1 + GH} \right]^2 \cdot \frac{H}{G/[1 + GH]} = \frac{-GH}{1 + GH}$$

حساسیت پاسخ سیستم حلقه بسته به تابع تبدیل حلقه باز:

$$S_G^C \triangleq \frac{\partial C}{\partial G} \cdot \frac{G}{C} = \frac{R}{[1 + GH]^2} \cdot \frac{1 + GH}{R} = \frac{1}{1 + GH}$$

مثال



$$T(s) = \frac{k}{1 + \tau s + kh}$$

$$c(t) = \frac{k}{1+kh} (1 - \exp(-\frac{1+kh}{\tau} t))$$

$$S_k^T \triangleq \frac{\partial T}{\partial k} \cdot \frac{k}{T} = \frac{1 + \tau s}{(1 + \tau s + kh)^2} \cdot (1 + \tau s + kh) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau s + kh}$$

$$S_h^T \triangleq \frac{\partial T}{\partial h} \cdot \frac{h}{T} = \frac{-k^2}{(1 + \tau s + kh)^2} \cdot \frac{(1 + \tau s + kh)h}{k} = \frac{-kh}{1 + \tau s + kh}$$

$$S_\tau^T \triangleq \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{-ks}{(1 + \tau s + kh)^2} \cdot \frac{(1 + \tau s + kh)\tau}{k} = \frac{-\tau s}{1 + \tau s + kh}$$

تحلیل پایداری سیستم های کنترل

- سیستمی **پایدار** است اگر ورودی یا اغتشاشات با دامنه محدود به سیستم اعمال گردد، پاسخ سیستم نیز دامنه محدود داشته باشد.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

معادله مشخصه

- اگر قطبهای تابع تبدیل در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند، پاسخ گذرای سیستم میرا می شود و با گذشت زمان به صفر میل کرده و سیستم **پایدار** است.

- اگر یک یا چند زوج قطب غیر تکراری در محور موهومی قرار داشته باشند و سایر قطبها در سمت چپ، پاسخ سیستم به صورت **نوسانی میرا نشده** خواهد بود.

- حتی اگر یک قطب در سمت راست محور موهومی قرار داشته باشد، دامنه پاسخ سیستم افزایش یافته و سیستم **ناپایدار** است.

- محاسبه ریشه های معادله مشخصه سیستم به ازای درجات بالا به سادگی امکان پذیر نیست.

- شرط **لازم (ولی کافی نیست)** برای اینکه تمام ریشه های یک چند جمله ای دارای قسمت حقیقی منفی باشند: تمامی ضرایب چند جمله ای **غیر صفر** و **هم علامت** باشند.

روش های بررسی پایداری سیستم های کنترل

۱- روش روث (Routh)

۲- روش هرویتز (Hurwitz)

۳- روش مکان ریشه (Root-Locus)

۴- روش پاسخ فرکانسی (Frequency response)

روش روث (Routh)

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\dots$	ضرایب معادله مشخصه	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$ $c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\dots$			$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$ $c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$			$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$ $c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$				
$\vdots$	$\vdots$							
s^1	g_1	$\dots$						
s^0	k_1	$\dots$						

تعداد قطبهای سمت راست معادله مشخصه برابر است با تعداد تغییر علامتها در ستون اول

مثال:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 15 \\ s^3 & 6 & 6 & \\ s^2 & 10 & 15 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 15 & & \end{array}$$

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15 = 0$$

مثال: بررسی پایداری سیستم به ازای تغییرات k : $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+k \\ s^1 & \frac{8-k}{3} & \\ s^0 & 1+k & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 8-k > 0 \\ 1+k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < k < 8$$

👉 اعداد سطرهای مختلف جدول را می توان در یک عدد مثبت ضرب و یا تقسیم نمود.

حالت های خاص:

الف- یک از اعداد ستون اول صفر شود و سایر اعداد آن سطر همگی صفر نشوند:

۱- در معادله اصلی بجای s ، از $\frac{1}{x}$ استفاده کرده و جدول را برای معادله جدید کامل می کنیم.

۲- معادله اصلی را در فاکتور معلوم $(s+1)$ ضرب کرده و جدول را بدست می آوریم.

۳- بجای صفر یک مقدار خیلی کوچک فرض کرده و جدول را کامل کرده و تعداد تغییر علامت را بررسی می کنیم.

مثال:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 6 \\ s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 0 & 6 & \\ s^1 & ? & & \\ s^0 & ? & & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 6 & 3 & 1 \\ s^3 & 3 & 1 & \\ s^2 & 1 & 1 & \\ s^1 & -2 & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 6 &= 0 \\ s = \frac{1}{x} \quad \swarrow \quad \searrow \\ 6s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + 1 &= 0 \quad s+1 \\ s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 9s + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 4 & 9 \\ s^4 & 2 & 6 & 6 \\ s^3 & & & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 4 & 9 \\ s^4 & 1 & 3 & 3 \\ s^3 & 1 & 6 & \\ s^2 & -3 & 3 & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 4 & 9 \\ s^4 & 1 & 3 & 3 \\ s^3 & 1 & 6 & \\ s^2 & -1 & 1 & \\ s^1 & -7 & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 6 \\ s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & \varepsilon & 6 & \\ s^1 & \frac{3\varepsilon-6}{\varepsilon} & & \\ s^0 & 6 & & \end{array} \quad \varepsilon > 0$$

ب- تمامی اعداد یک سطر صفر شوند:

زمانی رخ می دهد که در معادله مشخصه:

۱- یک جفت ریشه روی محور موهومی باشند،

۲- یک جفت ریشه حقیقی با علامتهای متضاد باشند.

روش حل: با استفاده از ضرایب سطر قبل یک معادله کمکی (Auxiliary equation) بدست می آوریم. با

جایگزین نمودن ضرایب مشتق معادله کمکی بجای ضرایب صفر، جدول را کامل می کنیم.

- ریشه های معادله کمکی ریشه های مورد نظر نیز هستند.

مثال:

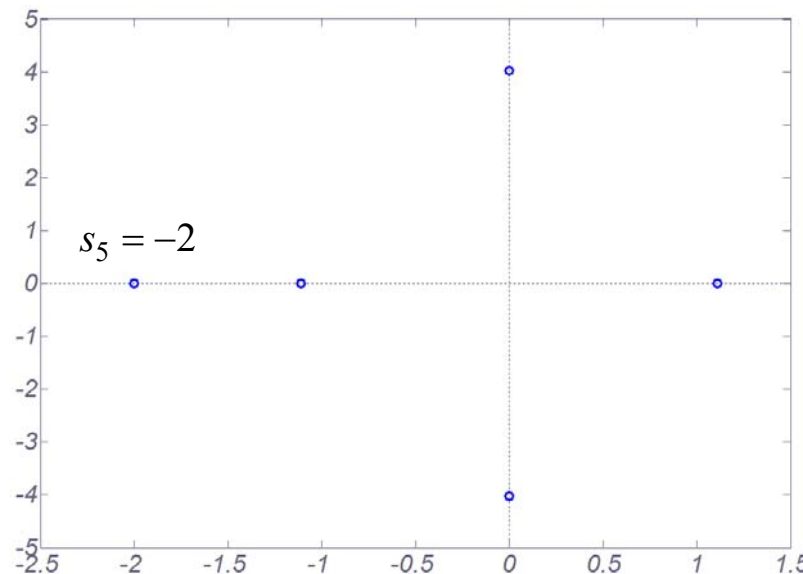
$$s^5 + 2s^4 + 15s^3 + 30s^2 - 20s - 40 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 15 & -20 \\ s^4 & 2 & 30 & -40 \\ s^3 & 0 & 0 & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2s^4 + 30s^2 - 40 &= s^4 + 15s^2 - 20 = 0 \\ \frac{d}{ds} (2s^4 + 30s^2 - 40) &= 2s^3 + 30s = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 15 & -20 \\ s^4 & 1 & 15 & -20 \\ s^3 & 2 & 15 & \\ s^2 & 7.5 & -20 & \\ s^1 & 20.33 & & \\ s^0 & -20 & & \end{array}$$



$$s_1 = 1.11$$

$$s_2 = -1.11$$

$$s_3 = 4.029j$$

$$s_4 = -4.029j$$

روش هرویتز (Hurwitz)

- معادله را به نحوی در نظر می گیریم که اولین ضریب آن مثبت باشد.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \begin{cases} \Delta_1 = a_{n-1} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \end{cases}$$

- تمام ریشه های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار دارند، **اگر و تنها اگر:** $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

مثال: $s^3 + 4s^2 + 7s + 12 = 0$

$$\Delta_1 = 4 \quad \& \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 16 \quad \& \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

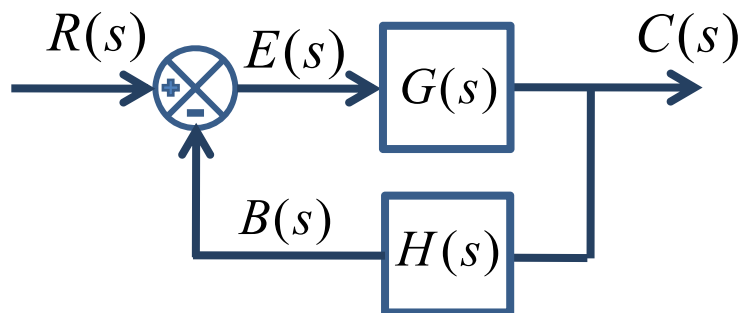
مثال: $s^2 + ks + k - 1 = 0$

$$\Delta_1 = k \quad \& \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1)$$

$$k > 1 \quad \leftarrow \begin{cases} k > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases}$$

روش مکان ریشه (Root-Locus)

- مشخصه اصلی رفتار حالت گذرای یک سیستم حلقه بسته به موقعیت قطبهای حلقه بسته سیستم بستگی دارد.
- اگر سیستم یک بهره قابل تنظیم داشته باشد، موقعیت قطبهای حلقه بسته با تغییر بهره تغییر می کند.
- به ازای سیستم های مرتبه سه و بالاتر، محاسبه قطبهای حلقه بسته از معادله مشخصه کار پیچیده ایست. همچنین با تغییر بهره بایستی تمامی محاسبات را دوباره انجام داد.
- در بسیاری از موارد نمی توان با تغییر بهره به مشخصه مطلوب در سیستم حلقه بسته برسیم و نیاز به جبران ساز داریم.
- نمودار مکان ریشه، نموداری از ریشه های معادله مشخصه یک سیستم حلقه بسته می باشد که تابعی از بهره سیستم حلقه باز است.

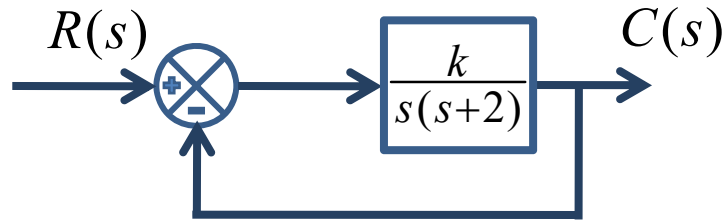


معادله مشخصه: $1 + G(s)H(s) = 0$

- قطبهای سیستم حلقه بسته به قطبها و صفرهای تابع حلقه باز $G(s)H(s)$ و بهره سیستم حلقه باز بستگی دارد.

رسم ریشه های معادله مشخصه

مثال:



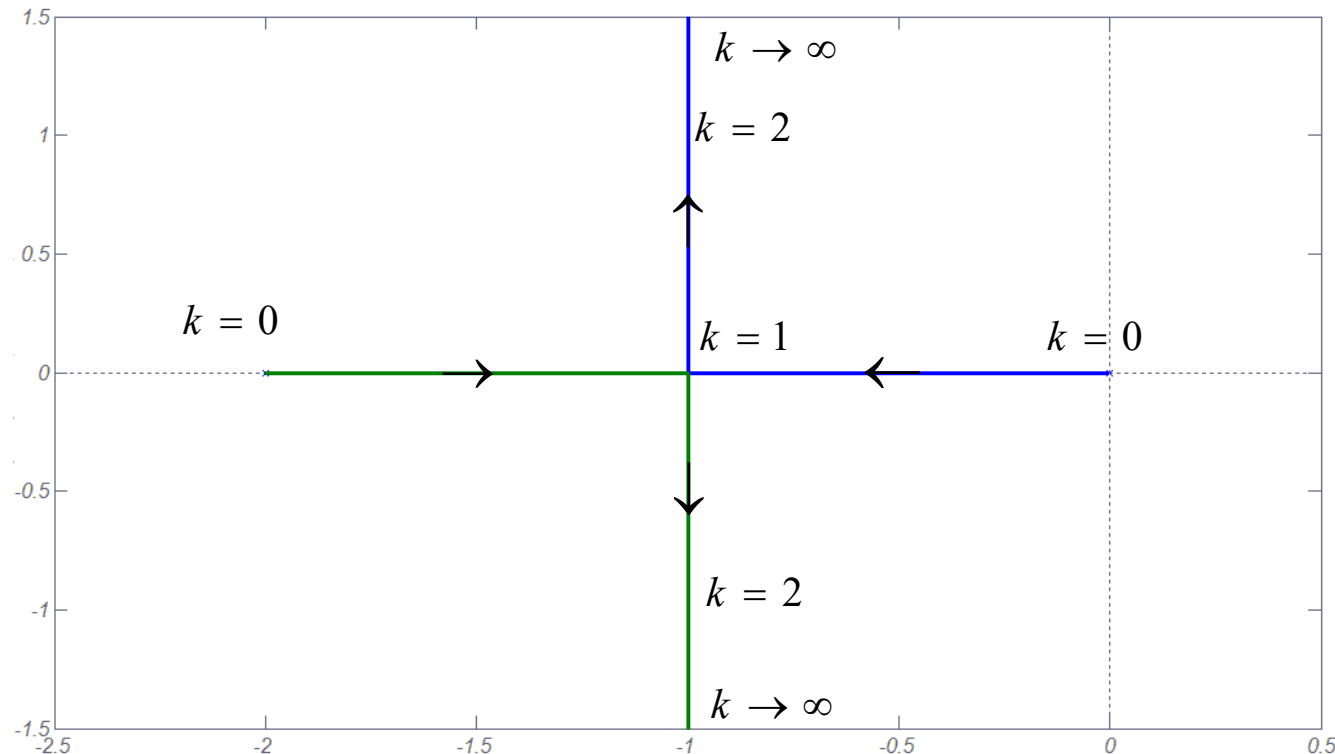
$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{k}{s(s+2)} = \frac{s^2 + 2s + k}{s(s+2)} = 0$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k} \quad \leftarrow s^2 + 2s + k = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_2 = -2 & s_1 = 0 \quad \leftarrow k = 0 \\ s_{1,2} = -1 & \quad \quad \quad \leftarrow k = 1 \end{array} \right. \quad \leftarrow 0 < k < 1$$

با افزایش بخش موهومی ریشه ها افزایش یافته و بخش حقیقی آنها ثابتند.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1 \pm j\sqrt{k-1} \quad \leftarrow k > 1$$



خواص اساسی مکان ریشه

۱- شرط اندازه: $1 + G(s)H(s) = 0 \leftarrow G(s)H(s) = -1 \leftarrow |G(s)H(s)| = |-1| = 1$

$$G(s)H(s) = k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)} \Rightarrow |G(s)H(s)| = |k| \frac{\prod_{i=1}^m |(s+z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s+p_j)|} = 1$$

۲- شرط زاویه: $\angle G(s)H(s) = \angle -1 \leftarrow \angle \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \angle \frac{-1}{k}$

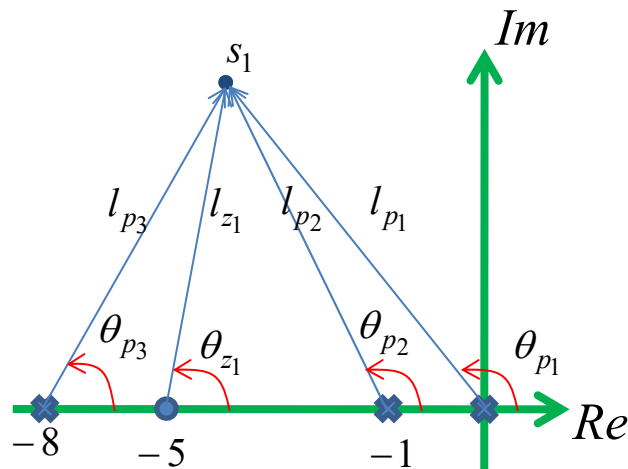
$$\sum_{i=1}^m \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j) = \begin{cases} \pm(2i+1)\pi, & k \geq 0 \\ \pm 2i\pi, & k < 0 \end{cases}$$

مثال: $H(s) = 1, G(s) = \frac{k(s+5)}{s(s+1)(s+8)}$

s_1 جزء مکان ریشه های معادله مشخصه است اگر شرط زاویه برقرار گردد.
با تنظیم ضریب k, s_1 ریشه معادله مشخصه سیستم خواهد بود.

$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} = \begin{cases} \pm(1+2i)\pi \\ \pm 2i\pi \end{cases}$$

$$|k| = \frac{|s_1||s_1+1||s_1+8|}{|s_1+5|} = \frac{l_{p_1}l_{p_2}l_{p_3}}{l_{z_1}}$$



محاسبه تمامی ریشه های ممکن معادله مشخصه با این روش بسیار دشوار است.

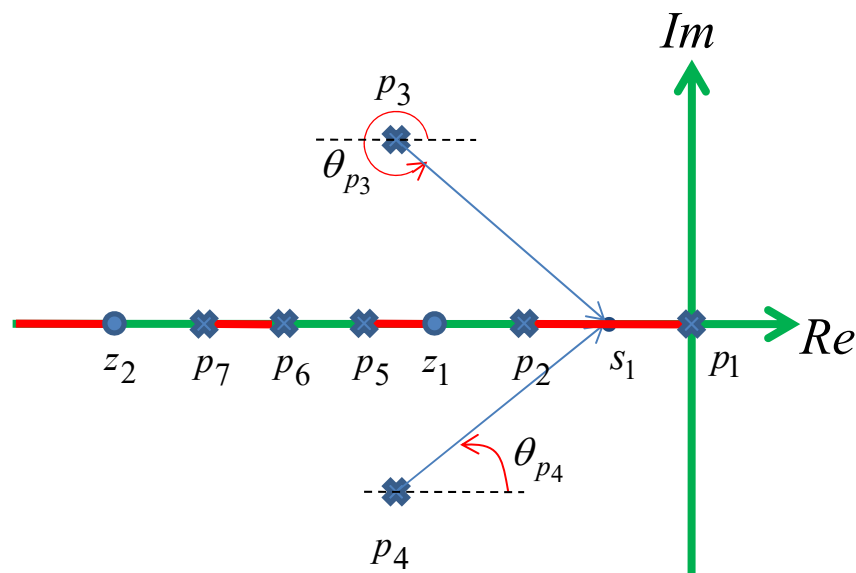
قواعد ترسیم مکان ریشه به ازای $k > 0$

۱- تعداد شاخه های (Branch) مکان ریشه:

مکان یک ریشه از معادله مشخصه به ازای تغییرات k بین $-\infty$ و ∞ را یک شاخه نامند. تعداد شاخه برابر است با درجه معادله مشخصه و یا تعداد قطبهای حلقه باز سیستم.

۲- مکان ریشه بر محور حقیقی:

آن بخش از محور حقیقی جزء مکان ریشه است که در سمت راست آن تعداد فردی صفر و قطب وجود داشته باشد.



$$\left[\begin{array}{l} \theta_{p_2} = \theta_{z_1} = \theta_{p_5} = \theta_{p_6} = \theta_{p_7} = \theta_{z_2} = 0 \\ \theta_{p_3} + \theta_{p_4} = 360 \quad \& \quad \theta_{p_1} = 180 \end{array} \right.$$

$$180 + 0 + 360 = 3\pi$$

۳- نقاط شروع و پایانی مکان ریشه:

با کاهش k به سمت صفر، ریشه های معادله مشخصه برابر با قطبهای تابع حلقه باز می شوند، و با افزایش آن به سمت بینهایت ریشه ها برابر با صفرهای تابع حلقه باز می شوند.

$$\frac{\prod_{i=1}^m |(s+z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s+p_j)|} = \frac{1}{|k|}$$

۴- مجانبهای مکان ریشه به ازای $s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} k \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{k}{s^{n-m}} = -1 \Rightarrow s^{n-m} = -k \Rightarrow |s^{n-m}| = |k|$$

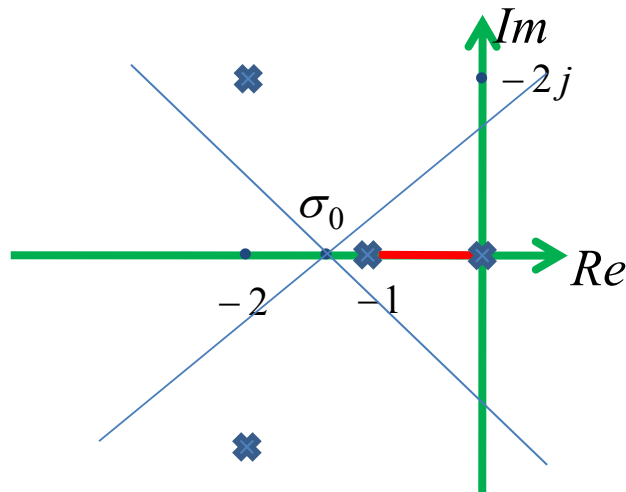
$$\angle -k = \angle s^{n-m} = (1+2i)180 \Rightarrow (n-m)\angle s = (1+2i)180 \Rightarrow \angle s = \frac{(1+2i)180}{n-m}$$

$$\text{خطوط مجانب} \quad \gamma = \frac{(1+2i)180}{n-m}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m}$$

۵- ناحیه تلاقی مجانبها با محور حقیقی:

مثال: $H(s) = 1, G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s^2+4s+8)}$ $\leftarrow s(s+1)(s^2+4s+8) + k = 0$

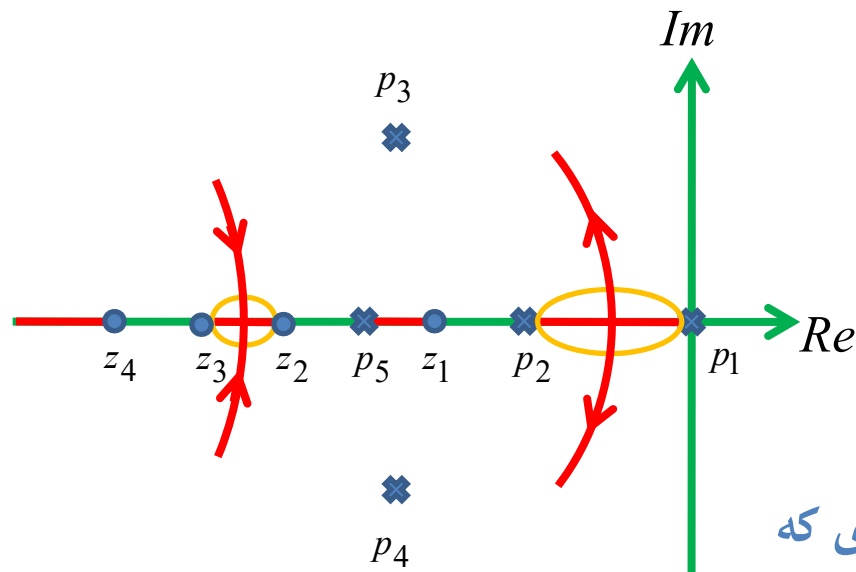


$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_{3,4} = -2 \pm 2j$$

$$\gamma = \frac{(1+2i)180}{4-0}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

$$\gamma = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

$$\sigma_0 = \frac{-1-2+2j-2-2j-0}{4} = \frac{-5}{4} = -1.25$$



۶- نقطه شکستگی بر روی مکان ریشه:

- نقاط در شکست (Break-away points)

- نقاط بر شکست (Break-in points)

- مکان ریشه ممکن است بیش از یک نقطه شکست داشته باشد.

- ممکن است نقطه شکست روی محور حقیقی قرار نداشته باشد.

نقاط شکست برابرند با ریشه های مشتق معادله حلقه بازی که

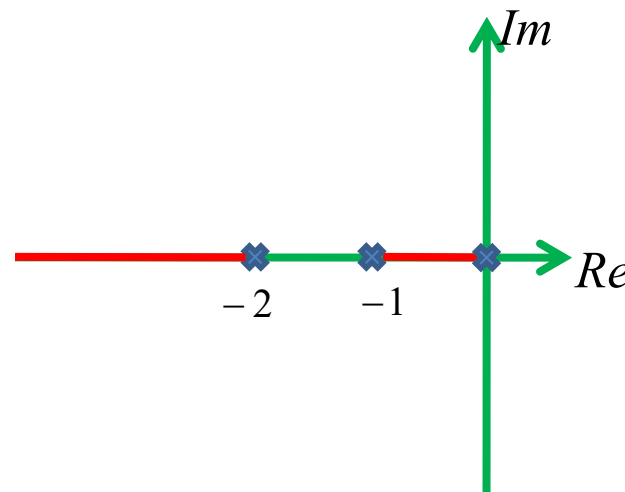
ریشه خود معادله مشخصه نیز باشد.

مثال:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{k}{s(s+1)(s+2)} \right] = \frac{3s^2 + 6s + 2}{s^2(s+1)^2(s+2)^2} = 0 \quad \leftarrow H(s) = 1, G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

$$s_1 = -1.5773$$

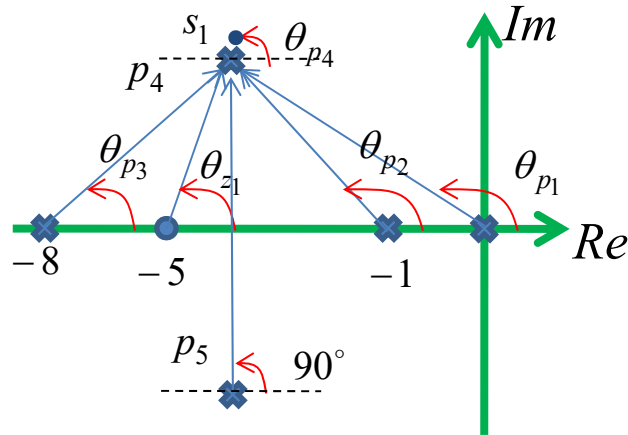
$$s_2 = -0.4226$$



۷- زاویه خروج از قطب های مختلط و زاویه ورود به صفر های مختلط:

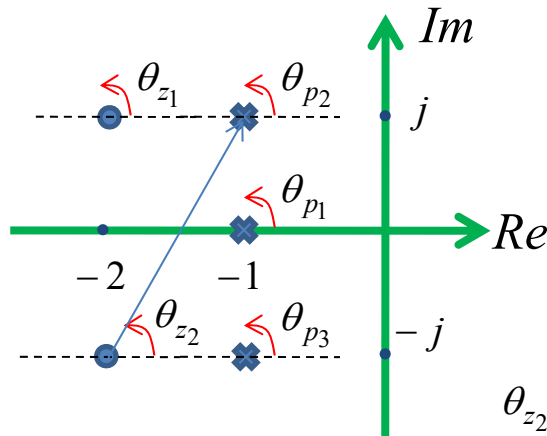
شرط زاویه بایستی در نقاط ورود به صفر و یا خروج از

قطب در ε همسایگی آن نیز برقرار باشد.



$$\theta_{z_1} - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} - \theta_{p_4} - \theta_{p_5} = 180$$

مثال: $H(s) = 1, G(s) = \frac{k(s^2 + 4s + 5)}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$ $\leftarrow z_{1,2} = -2 \pm j, p_1 = -1, p_{2,3} = -1 \pm j$



- محاسبه زاویه خروج از قطب p_2 : $\theta_{z_1} = 0, \theta_{p_1} = \theta_{p_3} = 90$

$$\theta_{z_2} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.43 \Rightarrow \theta_{p_2} = 180 - [(90 + 90) - (0 + 63.43)] = 63.43$$

- محاسبه زاویه ورود به صفر z_1 : $\theta_{z_2} = 90, \theta_{p_1} = \tan^{-1}(1) + 90 = 135, \theta_{p_2} = 180$

$$\theta_{p_3} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 90 = 116.57 \Rightarrow \theta_{z_1} = [(180 + 135 + 116.57) - 90] - 180 = 161.57$$

- محاسبه زاویه خروج از قطب p_1 : $\theta_{p_1} = 180 - [(-90 + 90) - (-45 + 45)] = 180$

۸- محل تلاقی مکان ریشه با محور موهومی:

- با استفاده از روش روث یا هرویتز محل تلاقی را می توان بدست آورد.

مثال: $\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + k = 0$ $\leftarrow$ $\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 6 & k \\ s^1 & \frac{48-k}{6} & \\ s^0 & & \end{array}$ $\leftarrow$ $k = 48$ $\leftarrow$ $6s^2 + 48 = 0$ $\leftarrow$ $s_{1,2} = \pm\sqrt{8}j$

۹- محاسبه مقدار k در یک نقطه از مکان ریشه:

- با استفاده از شرط اندازه و با روش تحلیلی یا ترسیمی می توان مقدار k را در هر نقطه از مکان ریشه محاسبه نمود.

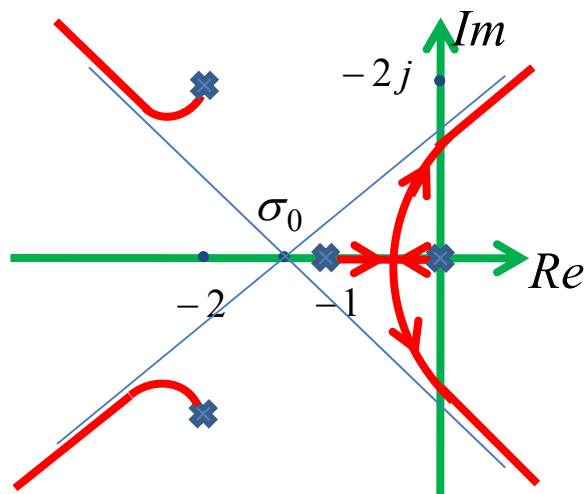
$$|k| = \frac{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از قطبهای حلقه باز به نقطه مورد نظر}}{\text{حاصلضرب طول بردارهای رسم شده از صفرهای حلقه باز به نقطه مورد نظر}}$$

مثال: $H(s) = 1, G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s^2+4s+8)}$ $\leftarrow$ $\begin{array}{l} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_{3,4} = -2 \pm 2j \end{array}$ $\leftarrow$ $\gamma = \frac{(1+2i)180}{4-0}, i = 0,1,2,3$ $\leftarrow$ $\gamma = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

$$\sigma_0 = \frac{-1-2+2j-2-2j-0}{4} = \frac{-5}{4} = -1.25$$

- محاسبه زاویه خروج از قطب $p_3 = -2 + 2j$:

$$\begin{aligned} \theta_{p_3} &= -\theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_4} - (2i+1)180 \\ &= -135 - 116.57 - 90 - (2k+1)180 \\ &= -341.57 - 180 = -161.57 \end{aligned}$$



$$\frac{d}{ds} \left[\frac{k}{s(s+1)(s^2+4s+8)} \right] = \frac{-(4s^3+15s^2+24s+8)}{[s(s+1)(s^2+4s+8)]^2} = 0$$

$$s_1 = -0.4402$$

$$s_{2,3} = -1.6549 \pm 1.3432j$$

محل تلاقی با محور موهومی:

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 12k \\ s^3 & 5 & 8 \\ s^2 & \frac{10}{4} & k \\ s^1 & \frac{20-5k}{\frac{10}{4}} & \\ s^0 & k & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{20-5k}{\frac{10}{4}} = 0 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \frac{10}{4}s^2 + 4 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j1.265$$

قواعد ترسیم مکان ریشه به ازای $k < 0$

۱- تعداد شاخه های (Branch) مکان ریشه:

۲- مکان ریشه بر محور حقیقی:

آن بخش از محور حقیقی جزء مکان ریشه است که در سمت راست آن تعداد زوجی صفر و قطب وجود داشته باشد.

۳- نقاط شروع و پایانی مکان ریشه:

$$\gamma = \frac{2i \cdot 180}{n - m}$$

۴- مجانبهای مکان ریشه به ازای $s \rightarrow \infty$:

۵- ناحیه تلاقی مجانبها با محور حقیقی:

۶- نقطه شکستگی بر روی مکان ریشه:

۷- زاویه خروج از صفرهای مختلط و زاویه ورود به قطب های مختلط: $\sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = \pm 2i\pi$

۸- محل تلاقی مکان ریشه با محور موهومی:

- با استفاده از روش روث یا هرویتز محل تلاقی را می توان بدست آورد.

۹- محاسبه مقدار k در یک نقطه از مکان ریشه:

- با استفاده از شرط اندازه و با روش تحلیلی یا ترسیمی می توان مقدار k را در هر نقطه از مکان ریشه محاسبه نمود.