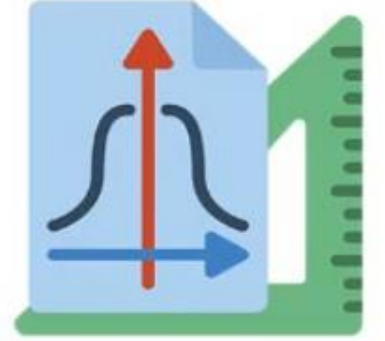




تعريف تبدیل لاپلاس

تعریف تبدیل لاپلاس

$f(t)$ را به عنوان تابعی از متغیر مستقل t در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر است با تابعی از متغیر جدید s که در حالت کلی می‌تواند مختلط نیز باشد. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را با استفاده از فرمول زیر بدست می‌آوریم.

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

رابطه ۱

جهت استفاده از فرمول بالا توجه به نکات زیر ضروری است:

- لاپلاس برای مقادیری از s قابل قبول است که به ازای آن‌ها سمت راست معادله بالا همگرا شود.
- متغیر s می‌تواند مختلط نیز باشد.
- حدود انتگرال نشان می‌دهند که تبدیل لاپلاس، فقط عبارت زیر انتگرال را در بازه $(0^-, +\infty)$ مورد توجه قرار می‌دهد.

نمادگذاری $F(s)$

معمولا نوشتن $Lf(s)$ مشکل است، بنابراین مرسوم است که تابع لاپلاس را به صورت مستقیم نشان می‌دهند. این نمادها در زیر نشان داده شده‌اند.

$$(\mathcal{L}f)(s) = F(s), \quad (\mathcal{L}g)(s) = G(s).$$

اگر تابعی که می‌خواهیم از آن لاپلاس بگیریم، اسم نداشته باشد، می‌توان مستقیما خود تابع را تحت نماد لاپلاس قرار داد. برای نمونه لاپلاس تابع t^2 را می‌توان به صورت $L(t^2)(s)$ یا $L(t^2)$ نشان داد.

در بعضی از موارد نیاز به تغییر تابع $f(t)$ است. در این موارد تابع تغییر داده شده را نیز تحت اوپراتو لاپلاس قرار می‌دهیم. برای نمونه اگر بخواهیم لاپلاس تابع $f(t)$ را در حالتی بیابیم که به اندازه a جابجا شده، از نماد $L(f(t-a))$ استفاده می‌کنیم.

می‌توان گفت که در برخی از موارد، پرانتزهای به کار رفته در نماد لاپلاس کم یا زیاد می‌شوند. در حقیقت تمامی نمادهای به کار رفته در پایین، معادل یکدیگر هستند.

$$(\mathcal{L}f)(s) = F(s) = \mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(t^2)(s); \quad \mathcal{L}f = F = \mathcal{L}(t^2).$$

مثال ۱

فرض کنید هدف ما بدست آوردن لاپلاس تابع $f(t)=1$ است. بنابراین با استفاده از رابطه ۱ داریم:

$$\mathcal{L}(1) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sT} - 1}{-s} \right]_0^T$$

همان‌طور که در رابطه بالا نیز می‌بینید، پاسخ این حد بسته به این‌که مقدار s مثبت یا منفی باشد، متفاوت خواهد بود. در حقیقت پاسخ آن به ازای دو مقدار مثبت و منفی s ، بصورت زیر است:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } s > 0 \\ \infty & \text{اگر } s < 0 \end{cases}$$

در نتیجه لاپلاس تابع ثابت $f(t)=1$ برابر است با:

$$\mathcal{L}(1) = F(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{اگر } s > 0 \\ \text{واگرا} & \text{اگر } s \leq 0. \end{cases}$$

در این مثال قصد داریم تا لاپلاس تابع e^{at} را بیابیم. با استفاده از تعریف داریم:

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)T} - 1}{a-s} \right]_0^T.$$

مشابه با مثال قبل، در این حالت نیز تابع لاپلاس محاسبه شده، وابسته به مقدار s است. در حقیقت می‌توان گفت:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(a-s)T} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } s > a \\ \infty & \text{اگر } s < a. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{اگر } s > a \\ \text{واگرا} & \text{اگر } s \leq a. \end{cases}$$

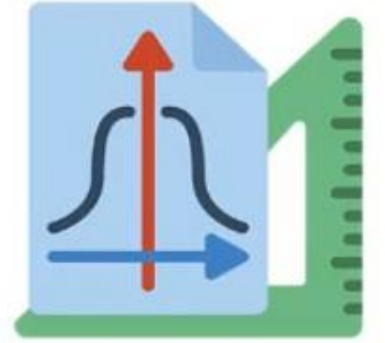
در نتیجه:

مثال ۲

با توجه به دو مثال ۱ و ۲ می‌توان گفت:

$$f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = 1/s, \quad s > 0$$

$$f(t) = e^{at} \Rightarrow F(s) = 1/(s-a), \quad s > a.$$



تکنیک‌های محاسبه لاپلاس

تکنیک‌های محاسبه لاپلاس

از نظر مفهومی لاپلاس یک تابع را بایستی با استفاده از رابطه ۱ بدست آورد. اما جهت سادگی حل مسائل، تکنیک‌هایی نیز وجود دارد که می‌توان با استفاده از آن‌ها لاپلاس را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} (t) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} -\frac{d}{ds} (e^{-st}) dt \\ &= -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} (1) e^{-st} dt \\ &= -\frac{d}{ds} (1/s) \\ &= 1/s^2\end{aligned}$$

برای نمونه لاپلاس تابع t برابر است با:

به همین صورت لاپلاس تابع t^2 به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} (t^2) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} -\frac{d}{ds} (te^{-st}) dt \\ &= -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} (t) e^{-st} dt \\ &= -\frac{d}{ds} (1/s^2) \\ &= 2/s^3\end{aligned}$$

در حقیقت لاپلاس تابع t^n را می‌توان با رابطه زیر بدست آورد.

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

تکنیک‌های محاسبه لاپلاس

قوانین مشابه بسیاری در مورد محاسبه لاپلاس وجود دارد. در ادامه قصد داریم تا لاپلاس تابع $\sin \omega t$ را بیابیم. بر مبنای رابطه ۱، لاپلاس تابع مذکور برابر است با:

$$L\{\sin \omega t\} = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt$$

به منظور استفاده از روش **انتگرال‌گیری جزء به جزء** بایستی فرض زیر را انجام داد.

$$\begin{aligned} u &= \sin \omega t & \rightarrow & \quad du = \omega \cos \omega t dt \\ dv &= e^{-st} dt & \rightarrow & \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

در نتیجه با فرض توابع در نظر گرفته شده در بالا داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u dv &= uv - \int_0^{\infty} v du \\ \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt &= \sin \omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) + \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t dt \end{aligned}$$

در این مرحله دوباره از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم. توابع جدید u و v را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u &= \cos \omega t & \rightarrow & \quad du = -\omega \sin \omega t dt \\ dv &= e^{-st} dt & \rightarrow & \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$

تکنیک‌های محاسبه لاپلاس

با این فرضیات نهایتاً لاپلاس تابع $\sin \omega t$ برابر می‌شود با:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin \omega t - \frac{\omega}{s^2} e^{-st} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{s^2} \int e^{-st} \sin \omega t \, dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{e^{-st}}{s \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)} \left(\sin \omega t + \frac{\omega}{s} \cos \omega t \right) = \left| \frac{se^{-st}}{s^2 + \omega^2} \left(\sin \omega t + \frac{\omega}{s} \cos \omega t \right) \right|_0^{\infty} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

دقیقاً با استفاده از همین روش لاپلاس تابع $\cos \omega t$ برابر با تابع زیر بدست خواهد آمد.

$$\int_0^{\infty} Ae^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{As^2}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \left[-\frac{1}{s} \cos \omega t + \frac{\omega}{s^2} e^{-st} \sin \omega t \right]_0^{\infty} = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

یکی از توابعی که لاپلاس آن در مسائل مهندسی بسیار پرکاربرد است، لاپلاس مشتق تابع است؛ بنابراین فرض کنید می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t) = df(t)/dt$ را بیابیم. در ابتدا فرض شده که لاپلاس تابع $f(t)$ معلوم و برابر با تابع زیر است.

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

تکنیک‌های محاسبه لاپلاس

جهت محاسبه این لاپلاس نیز از مفهوم انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌شود. در حقیقت در این مسئله $u=f(t)$ و $dv=e^{-st}dt$ فرض می‌شود. در حقیقت:

$$\begin{array}{ll} u = f(t) & \longrightarrow du = df(t) \\ dv = e^{-st} dt & \longrightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array}$$

با اعمال انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

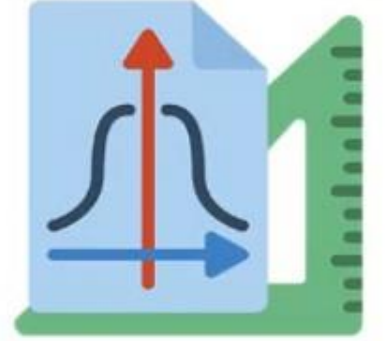
$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \left[-\frac{1}{s} f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt$$

در رابطه بالا عبارت اول، مقدار تابع در صفر و عبارت دوم لاپلاس تابع $f(t)$ را نشان می‌دهد. بنابراین:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s} f(0) + \frac{1}{s} L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}$$

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s L\{f(t)\} - f(0) = s F(s) - f(0)$$

در نتیجه نهایتاً لاپلاس مشتق $f(t)$ برابر می‌شود با:



تبدیل لاپلاس

توابع شناخته شده

تبدیل لاپلاس توابع شناخته شده

تابع

تبدیل تابع

$$1$$

$$1/s$$

$$e^{at}$$

$$1/(s - a)$$

$$t$$

$$1/s^2$$

$$t^n$$

$$n!/s^{n+1}$$

$$\cos(\omega t)$$

$$s/(s^2 + \omega^2)$$

$$\sin(\omega t)$$

$$\omega/(s^2 + \omega^2)$$

$$e^{at} \cos(\omega t)$$

$$(s - a)/((s - a)^2 + \omega^2)$$

$$e^{at} \sin(\omega t)$$

$$\omega/((s - a)^2 + \omega^2)$$

$$\delta(t)$$

$$1$$

$$\delta(t - a)$$

$$e^{-as}$$

تبدیل لاپلاس توابع شناخته شده

تابع

$$\cosh(kt) = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$$

$$\sinh(kt) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$

$$\frac{1}{2\omega^3}(\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))$$

$$\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$$

$$\frac{1}{2\omega}(\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t))$$

$$u(t - a)$$

$$t^n e^{at}$$

تبدیل تابع

$$s/(s^2 - k^2)$$

$$k/(s^2 - k^2)$$

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$e^{-as}/s$$

$$n!/(s - a)^{n+1}$$

تبدیل لاپلاس توابع شناخته شده

البته جهت استفاده از لاپلاس قوانینی نیز وجود دارند که به منظور محاسبه لاپلاس می‌توانند مفید باشند. برای نمونه فرض کنید با داشتن لاپلاس تابع $f(t)$ ، می‌خواهیم لاپلاس $f(t-a)$ را بیابیم. از تعریف لاپلاس می‌دانیم که لاپلاس تابع $f(t-a)$ برابر است با:

$$L[f(t-a)] = \int_0^{\infty} f(t-a) * e^{-st} dt$$

$$du = dt$$

با استفاده از تغییر متغیر $u=t-a$ و نوشتن آن به صورت $t=u+a$ داریم:

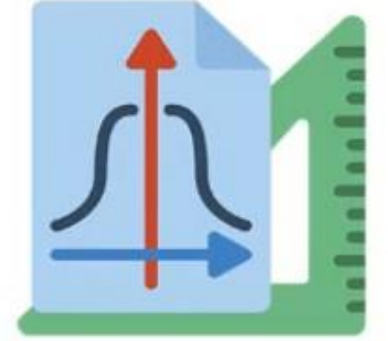
$$L(f(t-a)) = \int_0^{\infty} f(u) * e^{-s(u+a)} du$$

بدیهی است که پاسخ انتگرال بالا برابر با تابع زیر است:

$$L(s) = \int_0^{\infty} f(u) * e^{-su} * e^{-sa} du = e^{-as} \int_0^{\infty} f(u) * e^{-su} du$$

$$L[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

در نتیجه لاپلاس این تابع برابر است با:



قوانین تبدیل لاپلاس

قوانین تبدیل لاپلاس

جهت استفاده از لاپلاس قوانینی نیز وجود دارند که به منظور محاسبه لاپلاس می‌توانند مفید باشند. برای نمونه فرض کنید با داشتن لاپلاس تابع $f(t)$ ، می‌خواهیم لاپلاس $f(t-a)$ را بیابیم. از تعریف لاپلاس می‌دانیم که لاپلاس تابع $f(t-a)$ برابر است با:

$$L[f(t-a)] = \int_0^{\infty} f(t-a) * e^{-st} dt$$

با استفاده از تغییر متغیر $u=t-a$ و نوشتن آن به صورت $t=u+a$ داریم:

$$du = dt$$

$$L(f(t-a)) = \int_0^{\infty} f(u) * e^{-s(u+a)} du$$

بدیهی است که پاسخ انتگرال بالا برابر با تابع زیر است:

$$L(s) = \int_0^{\infty} f(u) * e^{-su} * e^{-sa} du = e^{-as} \int_0^{\infty} f(u) * e^{-su} du$$

$$L[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$$

در نتیجه لاپلاس این تابع برابر است با:

تابع

$$f(t)$$

$$a f(t) + b g(t)$$

$$e^{at} f(t)$$

$$f'(t)$$

$$f''(t)$$

$$f^{(n)}(t)$$

$$t f(t)$$

$$t^n f(t)$$

$$u(t-a) f(t-a)$$

$$u(t-a) f(t)$$

$$(f * g)(t) = \int_{0^-}^{t^+} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

$$\int_{0^-}^{t^+} f(\tau) d\tau$$

تبدیل تابع

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$a F(s) + b G(s)$$

$$F(s-a)$$

$$sF(s) - f(0^-)$$

$$s^2 F(s) - s f(0^-) - f'(0^-)$$

$$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

$$-F'(s)$$

$$(-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$e^{-as} F(s)$$

$$e^{-as} \mathcal{L}(f(t+a))$$

$$F(s) G(s)$$

$$\frac{F(s)}{s}$$

قوانین

مثال

برای نمونه فرض کنید می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع $t^2 \sin(2t)$ بیابیم. یکی از روابط ارائه شده در جدول بالا به صورت زیر است.

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

با فرض این که تابع H ، نشان دهنده تبدیل تابع باشد، داریم:

$$H(s) = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = F''(s), \longrightarrow f(t) = \sin(2t)$$

بنابراین پاسخ لاپلاس مدنظر برابر با مشتق دوم تابع $\frac{1}{s^2 + 1}$ است. در نتیجه با محاسبه مشتق دوم تابع مذکور داریم:

$$H(s) = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3}$$