

# طراحی سیستمهای کنترل در فضای حالت

## ۱-۱۰ مقدمه

در این فصل طراحی در فضای حالت براساس روشهای جایدهی قطب، مشاهده گر، سیستمهای تنظیم کننده بهینه درجه دو مورد بحث قرار می گیرد، و سیستمهای کنترل مقاوم نیز به اختصار معرفی می شوند. روش جایدهی قطب تا حدی شبیه روش مکان هندسی ریشه هاست، از این جهت که قطبهای سیستم حلقه بسته در محلهای مطلوب قرار می گیرند. تفاوت اصلی در این است که در روش مکان هندسی ریشه ها تنها قطبهای غالب حلقه بسته در محلهای مطلوب قرار می گیرند، ولی در روش جایدهی قطب تمام قطبهای سیستم حلقه بسته در محلهای مطلوب قرار می گیرند.

کار را با معرفی مطالب پایه ای روش جایدهی قطب در سیستمهای تنظیم کننده آغاز می کنیم. سپس در مورد طراحی مشاهده گر حالت صحبت کرده، طراحی سیستمهای تنظیم کننده و سیستمهای کنترل با رهیافت جایدهی قطب با مشاهده گر حالت را در ادامه آن بیان خواهیم کرد. سپس در مورد تنظیم کننده های بهینه مرتبه دوم صحبت می کنیم، و سرانجام سیستمهای کنترل مقاوم را معرفی خواهیم کرد.

**نمای کلی فصل.** بخش ۱-۱۰ مطالب مقدماتی را در بر دارد. در بخش ۲-۱۰ رهیافت جایدهی قطب برای طراحی سیستمهای کنترل مورد بحث قرار می گیرد. کار با یافتن شرایط لازم و کافی برای جایدهی اختیاری قطب شروع می شود. سپس معادلات ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  برای جایدهی قطب به دست آورده می شود. در بخش ۳-۱۰ حل مسئله جایدهی قطب با MATLAB معرفی می شود. بخش ۴-۱۰ طراحی سیستمهای سروو با استفاده از رهیافت جایدهی قطب را در بر دارد. مشاهده گر حالت در بخش ۵-۱۰ معرفی می شود. هم

چون

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k & \mathbf{A} \\ \lambda_i^2 & \lambda_j^2 & \lambda_k^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_i^3 & \lambda_j^3 & \lambda_k^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} = (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})(\lambda_k - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)$$

به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \Delta = & f(\mathbf{A}) [((\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)) \\ & - f(\lambda_4)[(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & + f(\lambda_3)[(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & - f(\lambda_2)[(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)] \\ & + f(\lambda_1)[(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)]] \\ = & 0 \end{aligned}$$

با حل این معادله  $f(\mathbf{A})$  را به صورت زیر می یابیم

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) = & f(\lambda_1) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + f(\lambda_2) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \\ & + f(\lambda_3) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I})}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} + f(\lambda_4) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ = & \sum_{k=1}^m f(\lambda_k) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1} \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1} \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)} \end{aligned}$$

که در آن  $m=4$ ، به این ترتیب هم ارزی معادلات (۹-۱۰۲) و (۹-۱۰۳) نشان داده می شود گرچه فرض کرده ایم  $m=4$ ، ولی اگر گویانها را می توان به ازای هر مقدار مثبت  $m$  بسط داد. (حالتی که ماتریس  $\mathbf{A}$  مقادیر ویژه مکرر دارد، در مسئله الف ۹-۱۳ بررسی شده است.)

الف ۹-۱۳ فرمول درونیابی سیلوستر بیان شده با معادله (۹-۱۰۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = 0$$

قطب رخ دهد. در این رهیافت اثر قطبهای غیر غالب حلقه بسته بر پاسخ ناچیز فرض می شود. در روش جایدهی قطب به جای این که تنها قطبهای حلقه بسته غالب مشخص شوند (روش طراحی کلاسیک) تمام قطبهای حلقه بسته مشخص می شوند. (البته جایدهی تمام قطبهای حلقه بسته هزینه دارد، زیرا این کار اندازه گیری موفقیت آمیز تمام متغیرهای حالت، یا گذاشتن مشاهده گر حالت در این سیستم را می طلبد.) برای جایدهی دلخواه تمام قطبهای حلقه بسته از خود سیستم نیز چیزی خواسته می شود. آن چیز این است که سیستم کنترل پذیر حالت کامل باشد. این مطلب را در همین بخش ثابت می کنیم. سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du\end{aligned}\quad (1-10)$$

که در آن  $\mathbf{x}$  = بردار حالت ( $n \times 1$ )

$y$  = سیگنال خروجی (اسکالر)

$u$  = سیگنال کنترل (اسکالر)

$\mathbf{A}$  = ماتریس ثابت ( $n \times n$ )

$\mathbf{B}$  = ماتریس ثابت ( $n \times 1$ )

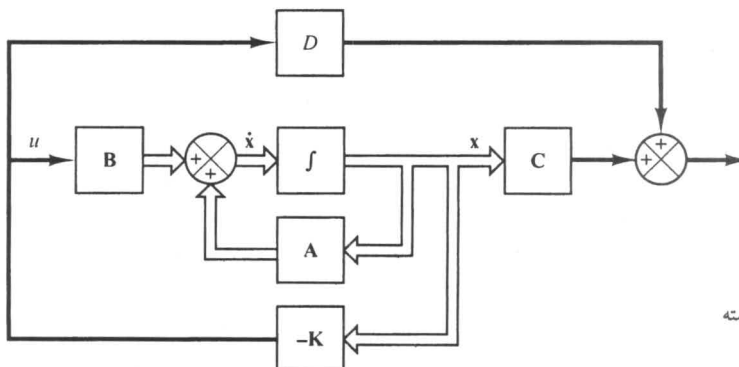
$\mathbf{C}$  = ماتریس ثابت ( $1 \times n$ )

$D$  = ثابت (اسکالر)

سیگنال کنترل را به صورت زیر برمی گزینیم

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2-10)$$

یعنی سیگنال کنترل  $u$  توسط یک حالت لحظه ای تعیین می شود. این طرح را فیدبک حالت می نامند. ماتریس  $\mathbf{K}$  ( $1 \times n$ ) ماتریس بهره فیدبک حالت نامیده می شود. فرض می کنیم که تمام متغیرهای حالت را می توان فیدبک کرد. در تحلیل زیر فرض می کنیم که  $u$  بدون قید است. شکل ۱-۱۰ نمودار بلوکی چنین سیستمی را نشان می دهد.



شکل ۱-۱۰

سیستم کنترل حلقه بسته

با  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$

$$(\lambda - \lambda_1)^r h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left[ g(\lambda) (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m) \right]$$

با جایگذاری  $\lambda_1$  به جای  $\lambda$  در معادله (۹-۱۰۸) به دست می آوریم

$$\left. \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1} = f'(\lambda_1) = \left. \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1}$$

با توجه به معادله (۹-۱۰۵) معادله اخیر به صورت زیر درمی آید

$$f'(\lambda_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-2} \quad (9-109)$$

به نحوی مشابه با دو بار مشتگیری از معادله (۹-۱۰۶) نسبت به  $\lambda$  و گذاشتن  $\lambda_1$  و به جای  $\lambda$  به دست می آوریم

$$\left. \frac{d^2}{d\lambda^2} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1} = f''(\lambda_1) = \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1}$$

این معادله آخری را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$f''(\lambda_1) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \lambda_1 + \cdots + (m-1)(m-2)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-3} \quad (9-110)$$

معادلات (۹-۱۱۰) و (۹-۱۰۹) و (۹-۱۰۷) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 3\alpha_3 \lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-3} &= \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1} \lambda_1^{m-2} &= f'(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-1} &= f(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_2^{m-1} &= f(\lambda_2) \\ &\vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_m + \alpha_2 \lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_m^{m-1} &= f(\lambda_m) \end{aligned} \quad (9-111)$$

این  $m$  معادله همزمان مقادیر  $\alpha_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) را به دست می دهند.  $\phi(A)=0$ ، زیرا یک چندجمله ای کهنه است، پس  $f(A)$  عبارت است از

$$f(A) = g(A)\phi(A) + \alpha(A) = \alpha(A)$$

حال با توجه به معادله (۹-۱۰۵) داریم

$$f(A) = \alpha(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1} \quad (9-112)$$

که در آن مقادیر  $\alpha_k$  برحسب  $f(\lambda_1)$ ،  $f'(\lambda_1)$ ،  $f''(\lambda_1)$ ،  $f(\lambda_2)$ ،  $f(\lambda_3)$ ، ...، و  $f(\lambda_m)$  داده شده است. برحسب دترمینان می توان  $f(A)$  را با حل معادله زیر به دست آورد:



$$\hat{K} = KP = [k_1 \mid k_r]$$

پس داریم

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |P^{-1}(sI - A + BK)P| \\ &= |sI - P^{-1}AP + P^{-1}BKP| = |sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| \\ &= \left| sI - \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} B_{11} \\ 0 \end{array} \right] [k_1 \mid k_r] \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} sI_q - A_{11} + B_{11}k_1 & -A_{12} + B_{11}k_r \\ 0 & sI_{n-q} - A_{22} \end{array} \right| \\ &= |sI_q - A_{11} + B_{11}k_1| \cdot |sI_{n-q} - A_{22}| = 0 \end{aligned}$$

که در آن  $I_q$  ماتریس واحد مرتبه  $q$  و  $I_{n-q}$  ماتریس واحد مرتبه  $(n-q)$  است.

توجه کنید که مقادیر ویژه  $A_{22}$  به  $K$  بستگی ندارند. پس اگر سیستم کنترلپذیر حالت کامل نباشد، ماتریس  $A$  مقادیر ویژه‌ای دارد که نمی‌توان آنها را به دلخواه جایدهی کرد. پس برای جایدهی دلخواه مقادیر ویژه ماتریس  $A - BK$ ، سیستم باید کنترلپذیر حالت کامل باشد (شرط لازم).

حال به اثبات شرط کافی می‌رسیم: اگر سیستم کنترلپذیر حالت کامل باشد تمام مقادیر ویژه ماتریس  $A$  را می‌توان به دلخواه جایدهی کرد.

برای اثبات شرط کافی تبدیل معادله حالت (۱-۱۰) به شکل متعارف کنترلپذیر کاری مناسب است.

ماتریس تبدیل  $T$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T = MW \quad (۴-۱۰)$$

که در آن  $M$  ماتریس کنترلپذیری است

$$M = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (۵-۱۰)$$

و

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۶-۱۰)$$

که در آن  $a_i$  ضرایب چندجمله‌ای مشخصه زیر هستند

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

بردار حالت جدید  $\hat{x}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x = T \hat{x}$$

$$\alpha_0(t) = 4e^t - 3e^{\tau t} + 2te^{\tau t}$$

$$\alpha_1(t) = -4e^t + 4e^{\tau t} - 3te^{\tau t}$$

$$\alpha_2(t) = e^t - e^{\tau t} + te^{\tau t}$$

پس

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{\tau t} + 2te^{\tau t} \\ -4e^t + 4e^{\tau t} - 3te^{\tau t} \\ e^t - e^{\tau t} + te^{\tau t} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-4e^t + 4e^{\tau t} - 3te^{\tau t}) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ + (e^t - e^{\tau t} + te^{\tau t}) \begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} e^{\tau t} & 12e^t - 12e^{\tau t} + 13te^{\tau t} & -4e^t + 4e^{\tau t} \\ 0 & e^{\tau t} & 0 \\ 0 & -3e^t + 3e^{\tau t} & e^t \end{bmatrix}$$

الف ۹-۱۵ نشان دهید سیستم توصیف شده با معادلات زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (۱۱۴-۹)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (۱۱۵-۹)$$

که در آن  $\mathbf{x}$  بردار حالت (بردار  $n \times 1$ ) $\mathbf{y}$  = بردار خروجی (بردار  $m \times 1$ ) ( $m \leq n$ ) $\mathbf{u}$  = بردار کنترل (بردار  $r \times 1$ ) $\mathbf{A}$  = ماتریس حالت (ماتریس  $n \times n$ ) $\mathbf{B}$  = ماتریس کنترل ( $n \times r$ ) $\mathbf{C}$  = ماتریس خروجی (ماتریس  $m \times n$ )کاملاً کنترل پذیر خروجی است، اگر و تنها اگر رتبه ماتریس مرکب  $m \times n \times r$  زیر برابر  $m$  باشد

$$\mathbf{P} = [\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$$

(توجه کنید که برای کنترل پذیری خروجی، کنترل پذیری حالت نه شرط لازم است نه شرط کافی).

حل: فرض کنید سیستم کنترل پذیر خروجی است و خروجی  $\mathbf{y}(t)$  شروع شده از  $\mathbf{y}(0)$  را می توان در فاصله زمان محدود  $0 \leq t \leq T$  به مبدأ فضای حالت برد؛ یعنی

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{Cx}(T) = \mathbf{0} \quad (۱۱۶-۹)$$

حل معادله (۹-۱۱۴) به صورت زیراست

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \left[ \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau \right]$$

معادله مشخصه این سیستم عبارت است از

$$|sI - A + BK| = |T^{-1}(sI - A + BK)T| = |sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| = 0$$

حال بیابید معادله مشخصه سیستم دارای شکل متعارف کنترل‌پذیر را ساده کنیم. با توجه به معادلات (۸-۱۰)، (۹-۱۰) و (۱۱-۱۰) داریم

$$\begin{aligned} & |sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| \\ &= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + \delta_1 + a_1 \end{vmatrix} \\ &= s^n + (\delta_1 + a_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \end{aligned} \quad (12-10)$$

این معادله مشخصه سیستم دارای فیدبک است. پس باید با معادله (۱۰-۱۰)، یعنی معادله مشخصه دلخواه، یکی باشد. با برابر قرار دادن ضرایب توانهای مشابه  $s$  به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ a_n + \delta_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

با یافتن  $\delta_i$  ها از معادلات بالا و گذاشتن‌شان در معادله (۱۱-۱۰) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} K &= [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1] T^{-1} \\ &= [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \cdots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1} \end{aligned} \quad (13-10)$$

پس اگر سیستم کنترل‌پذیر حالت کامل باشد، تمام مقادیر ویژه را می‌توان با انتخاب ماتریس  $K$  به صورت معادله (۱۳-۱۰) به دلخواه جای داد (شرط کافی).

پس ثابت کردیم که شرط لازم و کافی برای جایدهی دلخواه قطب این است که سیستم کنترل‌پذیر حالت کامل باشد.

باید متذکر شویم که اگر سیستم کنترل‌پذیر حالت کامل نباشد، ولی قابلیت پایدارشدن داشته باشد، می‌توان کل سیستم را با قرار دادن  $q$  قطب کنترل‌پذیر در محل‌های مطلوب پایدار کرد.  $n-q$  قطب غیرقابل کنترل نیز پایدارند. پس کل سیستم را می‌توان پایدار کرد.

اگر رتبه  $Q$  برابر  $m$  باشد، رتبه  $P$  هم همینطور است، و برعکس [به ازای  $p=n$  مسئله کاملاً واضح است. اگر  $p < n$ ، آنگاه  $CA^h B_r$  (که در آن  $p \leq h \leq n-1$ ) به طور خطی به  $CB_r$ ،  $CAB_r$ ، ...، و  $CA^{p-1} B_r$  وابسته است. پس رتبه  $P$  با رتبه  $Q$  برابر است. اگر رتبه  $P$  برابر  $m$  باشد؛  $Ce^{AT}x(0)$  فضای خروجی  $m$  بعدی را جارو می‌کند. یعنی اگر رتبه  $P$  برابر  $m$  باشد،  $Cx(0)$  نیز فضای خروجی  $m$  بعدی را جارو می‌کند و سیستم دارای ویژگی کنترل پذیری کامل خروجی است.

برعکس، فرض کنید سیستم کنترل‌پذیر کامل خروجی است، ولی رتبه  $P$  برابر  $k$  است و  $k < m$ . بنابراین تمام خروجی‌های اولیه‌ای که می‌توان آنها را به مبدأ برد، یک فضای  $k$ -بعدی تشکیل می‌دهند. پس ابعاد این فضا کمتر از  $m$  است. این مطلب با فرض کنترل‌پذیری کامل خروجی تناقض دارد. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

توجه کنید که بی‌واسطه می‌توان اثبات کرد که در سیستم تعریف شده با معادلات (۹-۱۱۴) و (۹-۱۱۵) از کنترل‌پذیری کامل حالت در  $0 \leq t \leq T$  می‌توان به کنترل‌پذیری خروجی  $0 \leq t \leq T$  رسید، اگر و تنها اگر  $m$  ردیف  $C$  استقلال خطی داشته باشد.

الف ۹-۱۶ کنترل‌پذیری حالت سیستم زیر را بررسی کنید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u \quad (9-119)$$

حل: برای این سیستم

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

چون

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که  $B$  و  $AB$  مستقل خطی نیستند، پس رتبه ماتریس  $[B \mid AB]$  یک است. بنابراین سیستم فاقد ویژگی کنترل‌پذیری کامل حالت است. در واقع حذف  $x_2$  از معادله (۹-۱۱۹) یا دو معادله همزمان زیر

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 1/5 x_2 + 4u$$

به دست می‌دهد

$$\ddot{x}_1 + 1/5 \dot{x}_1 - 2/5 x_1 = \dot{u} + 2/5 u$$

و به صورت تابع تبدیل

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{s+2/5}{(s+2/5)(s-1)}$$

می‌بینیم که  $(s+2/5)$  از صورت و مخرج این تابع تبدیل حذف می‌شود، پس سیستم کنترل‌پذیر کامل حالت

مقادیر  $k_1$ ،  $k_2$ ، و  $k_3$  را به دست آورد. این روش برای  $n=2$  یا  $n=3$  مناسب است (به ازای  $n$  بزرگتر مقدار عملیات لازم خیلی زیاد می شود).

توجه کنید که اگر سیستمهای کنترل پذیر حالت کامل نباشد، نمی توان ماتریس  $K$  را تعیین کرد (جواب وجود ندارد).

**تعیین ماتریس  $K$  با استفاده از فرمول اکرمین.** برای تعیین ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  فرمول مشهوری به نام فرمول اکرمین وجود دارد. در زیر به معرفی این فرمول می پردازیم. سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

فرض می کنیم سیستم کنترل پذیر حالت کامل است. می خواهیم قطبهای حلقه بسته در  $s = \mu_1$ ،  $s = \mu_2$ ،  $s = \mu_3$ ، ...،  $s = \mu_n$  قرار گیرد.

با استفاده از کنترل فیدبک حالت زیر

$$u = -Kx$$

معادله سیستم به شکل زیر درمی آید

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (10-14)$$

تعریف می کنیم

$$\tilde{A} = A - BK$$

معادله مشخصه مطلوب عبارت است از

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

چون قضیه کیلی - هامیلتون می گوید  $\tilde{A}$  معادله مشخصه خود را ارضا می کند، داریم

$$\phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1 \tilde{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \tilde{A} + \alpha_n I = 0 \quad (10-15)$$

برای یافتن فرمول اکرمین از معادله (10-15) استفاده می کنیم. برای ساده شدن کار حالت  $n=3$  را در نظر می گیریم. (این روش را می توان به سادگی برای  $n$  های بزرگتر تعمیم داد).

اتحادهای زیر را در نظر بگیرید.

$$I = I$$

$$\tilde{A} = A - BK$$

$$\tilde{A}^2 = (A - BK)^2 = A^2 - ABK - BK\tilde{A}$$

$$\tilde{A}^3 = (A - BK)^3 = A^3 - A^2BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2$$

این معادلات را به ترتیب در  $\alpha_3$ ،  $\alpha_2$ ،  $\alpha_1$ ، و  $\alpha_0$  (  $\alpha_0 = 1$  ) ضرب می کنیم و با جمع نتایج به دست می آوریم

پس سیستم مشاهده پذیر است.

تفاوت آشکار کنترل پذیری و مشاهده پذیری این سیستم در این است که در تابع تبدیل سیستم یک حذف صفر - قطب رخ می دهد. با توجه به معادله (۲-۲۹) (به ازای  $D=0$ ) داریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

با توجه به معادلات (۹-۱۲۰) و (۹-۱۲۱) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.4 & s+1.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1.3s + 0.4} \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1.3 & 1 \\ -0.4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+0.8}{(s+0.8)(s+0.5)} \end{aligned}$$

توجه کنید که معادلات (۹-۱۲۲) و (۹-۱۲۳) نیز همین تابع تبدیل را به دست می دهند. واضح است که در این تابع تبدیل حذف صفر - قطب رخ می دهد.

در صورت بروز حذف صفر - قطب در تابع تبدیل، کنترل پذیری و مشاهده پذیری، بسته به گزینش متغیرهای حالت، تغییر می کند. به خاطر داشته باشد که برای کنترل پذیر و مشاهده پذیر بودن باید هیچ حذف صفر - قطبی صورت نگیرد.

الف ۹-۱۸ ثابت کنید سیستم تعریف شده به صورت زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

که در آن  $\mathbf{x}$  = بردار حالت (بردار  $1 \times n$ )

$\mathbf{y}$  = بردار خروجی (بردار  $1 \times m$ ) ( $m \leq n$ )

$\mathbf{A}$  = ماتریس حالت (ماتریس  $n \times n$ )

$\mathbf{C}$  = ماتریس خروجی (ماتریس  $m \times n$ )

کاملاً مشاهده پذیر است، اگر و تنها اگر ماتریس مرکب  $\mathbf{P}$  (ماتریس  $n \times mn$ ) زیر دارای رتبه  $n$  باشد.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا شرط لازم را می یابیم. فرض کنید

رتبه  $\mathbf{P} > n$

بنابراین یک  $\mathbf{x}(0)$  وجود دارد که

برای هر  $n$  صحیح مثبت داریم

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]^{-1} \phi(A) \quad (18-10)$$

معادله (۱۸-۱۰) را فرمول اکرمین برای یافتن ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  می‌نامند.

**سیستمهای تنظیم کننده و سیستمهای کنترل.** سیستمهای مشتمل بر کنترل کننده را می‌توان به دو مقوله تقسیم کرد: سیستم تنظیم کننده (که در آن ورودی مرجع ثابت است و می‌تواند صفر باشد) و سیستم کنترل (که در آنها ورودی مرجع متغیر با زمان است). در ادامه سیستمهای تنظیم کننده را در نظر می‌گیریم. سیستمهای کنترل را در بخش ۷-۱۰ مورد بحث قرار می‌دهیم.

**انتخاب محل مطلوب قطبهای حلقه بسته.** گام اول طراحی به روش جابدهی قطب انتخاب محل مطلوب قطبهای حلقه بسته است. متداول‌ترین رهیافت این است که محل قطبها با توجه به تجارب کسب شده از روش مکان هندسی ریشه‌ها انتخاب شود، یعنی گزینش دو قطب غالب مختلط و انتخاب بقیه قطبها به نحوی که به فاصله زیادی در سمت چپ قطبهای غالب حلقه بسته قرار گیرند.

توجه کنید که اگر قطبهای حلقه بسته غالب را دور از محور  $j\omega$  برگزینیم تا پاسخ سیستم خیلی سریع باشد، سیگنال موجود در سیستم بسیار بزرگ شده، خطر غیرخطی شدن سیستم پیش می‌آید. از این امر باید پرهیز کرد.

رهیافت دیگر کنترل بهینه درجه دو است. در این رهیافت قطبهای حلقه بسته مطلوب به نحوی برگزیده می‌شوند که تعادلی بین پاسخ قابل قبول و میزان انرژی لازم برای کنترل برقرار شود. (بخش ۸-۱۰ را ببینید). توجه کنید که تقاضای پاسخ بسیار سریع مستلزم به کار بردن انرژی زیاد برای کنترل است. همچنین در حالت کلی برای افزایش سرعت پاسخ به عملگرهای بزرگتر و سنگین‌تری نیاز است که هزینه بالاتری دارند.

سیستم شکل ۲-۱۰ به صورت زیر تعریف شده است

مثال ۲-۱۰

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم با استفاده از کنترل فیدبک حالت  $u = -Kx$  قطبهای حلقه بسته را در  $s = -10$  و  $s = -2 \pm j4$  قرار دهیم. این انتخاب براساس این تجربه صورت گرفته است که این قطبها پاسخ گذرای معقول یا مطلوبی به همراه دارند. ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را تعیین کنید.

$$W(t) = \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau$$

می توان به صورت زیر نشان داد که  $W(t)$  ماتریسی غیرتکین است: اگر  $|W(t)| = 0$  آنگاه

$$x^* W(t_1) x = \int_0^{t_1} \|C e^{A t} x\|^2 dt = 0$$

که نتیجه می دهد

$$C e^{A t} x = 0 \quad 0 \leq t \leq t_1$$

یعنی رتبه  $P$  کوچکتر از  $n$  است. پس  $|W(t)| \neq 0$  یا  $W(t)$  ناتکین است. حال از معادله (۹-۱۲۶) به دست می آوریم

$$x(0) = [W(t)]^{-1} Q(t) \quad (9-127)$$

و  $x(0)$  را می توان از معادله (۹-۱۲۷) به دست آورد.

پس نشان دادیم که اگر رتبه  $P$  برابر  $n$  باشد، می توان  $x(0)$  را از  $y(t)$  به دست آورد. توجه کنید که  $x(0)$  و  $y(t)$  به صورت زیر به هم مربوط می شوند

$$y(t) = C e^{A t} x(0) = \alpha_0(t) C x(0) + \alpha_1(t) C A x(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) C A^{n-1} x(0)$$

## مسائل

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x$$

ب ۹-۱ سیستمی با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

نمایش فضای حالت این سیستم را به شکل متعارف (الف) کنترل پذیر؛ (ب) مشاهده پذیر، به دست آورید.

ب ۹-۲ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6u = 6u$$

ب ۹-۴ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است

$$\dot{x} = A \dot{x} + B u$$

$$y = C x$$

نمایش فضای حالت این سیستم به صورت متعارف قطری بیابید.

که در آن

ب ۹-۳ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است



و با قرار دادن  $|sI - A + BK|$  و معادله مشخصه مطلوب را به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
 |sI - A + BK| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right| \\
 &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3 \end{vmatrix} \\
 &= s^3 + (6+k_3)s^2 + (5+k_2)s + 1+k_1 \\
 &= s^3 + 14s^2 + 60s + 200
 \end{aligned}$$

پس

$$1+k_1=200, \quad 5+k_2=60, \quad 6+k_3=14$$

و از آن به دست می آوریم

$$k_3=8, \quad k_2=55, \quad k_1=199$$

یا

$$K = [199 \quad 55 \quad 8]$$

روش ۳: از فرمول اکرمین استفاده می کنیم. با توجه به معادله (۱۰-۱۸) داریم

$$K = [0 \quad 0 \quad 1] [B \mid AB \mid A^2B]^{-1} \phi(A)$$

چون

$$\phi(A) = A^3 + 14A^2 + 60A + 200I$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \\
 &\quad + 60 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

و

$$[B \mid AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

ب ۹-۱۳ سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید. ب ۹-۱۶ سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$c_1$ ،  $c_2$ ، و  $c_3$  را به نحوی برگزینید که سیستم مشاهدهپذیر نباشد. جوابی غیر از جواب واضح  $c_3 = c_2 = c_1 = 0$  بیابید.

ب ۹-۱۷ سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

خروجی عبارت است از

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(الف) نشان دهید سیستم کاملاً مشاهدهپذیر نیست.

(ب) نشان دهید سیستم به ازای خروجی زیر کاملاً مشاهدهپذیر است.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

آیا سیستم کاملاً کنترلپذیر حالت و کاملاً مشاهدهپذیر هست یا نه؟

ب ۹-۱۴ سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

آیا سیستم کاملاً کنترلپذیر حالت و کاملاً مشاهدهپذیر هست یا نه؟ آیا سیستم کنترلپذیر کامل خروجی هست یا نه؟

ب ۹-۱۵ آیا سیستم تعریف شده در زیر کاملاً کنترلپذیر حالت و کاملاً مشاهدهپذیر هست یا نه؟

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وجود دارد. یکی که بسیار به کار می‌رود، ماکزیمم کردن حاشیه‌های پایداری است. جابدهی براین اساس را جابدهی قطب مقاوم می‌نامند. دستور MATLAB برای جابدهی مقاوم place است. گرچه دستور place را می‌توان هم برای سیستمهای یک ورودی - یک خروجی و هم سیستمهای چندورودی به کار برد، ولی برای استفاده از این دستور نباید تکرر قطبها در محلهای مطلوب از رتبه  $B$  بزرگتر باشد. پس اگر ماتریس  $B$  یک ماتریس  $n \times 1$  باشد، برای استفاده از دستور place نباید قطب مکرر وجود داشته باشد.

دستورهای acker و place برای سیستمهای تک ورودی  $K$  یکسانی به دست می‌دهند. (ولی برای سیستمهای چند ورودی باید از دستور place استفاده کرد، نه acker). باید تذکر دهیم که اگر سیستم تک ورودی به سختی کنترل‌پذیر باشد، استفاده از دستور acker ممکن است مشکلات محاسباتی در پی داشته باشد. در این موارد استفاده از دستور place مناسبتر است، به شرطی که مجموعه قطبهای حلقه بسته مطلوب قطب مکرر وجود نداشته باشد.

برای استفاده از دستور acker یا place ابتدا ماتریسهای زیر را به برنامه می‌دهیم

$$\text{ماتریس } A \quad \text{ماتریس } B \quad \text{ماتریس } J$$

ماتریس  $J$  ماتریس مشتمل بر قطبهای حلقه بسته مطلوب است، یعنی

$$J = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$$

سپس می‌نویسیم

$$K = \text{acker}(A, B, J)$$

یا

$$K = \text{place}(A, B, J)$$

سپس می‌توان از دستور  $\text{eig}(A - B * K)$  استفاده کرد و فهمید که آیا  $K$  به دست آمده مقادیر ویژه مورد نظر را به دست می‌دهد یا نه.

همان سیستم مثال ۱۰-۱ را در نظر بگیرید. معادله سیستم عبارت است از

$$\dot{x} = A x + B u$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم با استفاده از کنترل فیدبک حالت  $u = -K x$  قطبهای حلقه بسته را در محلهای

زیر قرار دهیم

$$\mu_1 = -2 + j^4, \quad \mu_2 = -2 - j^4, \quad \mu_3 = -10$$

باید ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را بیابیم.

مثال ۱۰-۲

مشاهده‌گرهای کامل مرتبه و هم مشاهده‌گرهای می‌نیم - مرتبه مورد بحث قرار می‌گیرند. همچنین توابع تبدیل کنترل‌کننده‌های مشاهده‌گر به دست آورده می‌شود. در بخش ۱۰-۶ طراحی سیستمهای تنظیم‌کننده با مشاهده‌گر معرفی می‌شود. بخش ۱۰-۷ به طراحی سیستمهای کنترل با مشاهده‌گر اختصاص دارد. در بخش ۱۰-۸ سیستمهای کنترل کننده بهینه درجه دو معرفی می‌شوند. توجه کنید که ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را می‌توان هم به روش جابدهی قطب و هم به روش کنترل بهینه درجه دو به دست آورد. سرانجام در بخش ۱۰-۹ سیستمهای کنترل مقاوم معرفی می‌شود. این بخش فقط مطالب مقدماتی مبحث کنترل مقاوم را در بردارد.

## ۱۰-۲ جابدهی قطب

در این بخش یک روش طراحی را معرفی می‌کنیم که معمولاً روش جابدهی قطب یا انتساب قطب نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم که تمام متغیرهای حالت قابل اندازه‌گیری و برای فیدبک شدن در دسترس اند. نشان خواهیم داد که اگر سیستم کنترل‌پذیر حالت کامل باشد، می‌توان با فیدبک حالت، و به کمک یک ماتریس بهره فیدبک حالت مناسب، قطبهای حلقه بسته سیستم را در محل دلخواهی قرار داد.

این روش طراحی با تعیین محل مناسب قطبهای حلقه بسته، براساس مشخصات مطلوب پاسخ گذرا و / یا پاسخ فرکانسی، مثلاً سرعت، نسبت میرایی و پهنای باند، و همچنین خواسته‌های حالت ماندگار شروع می‌شود. فرض کنید تصمیم گرفته‌ایم قطبهای حلقه بسته را در  $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$  قرار دهیم. با انتخاب ماتریس بهره مناسب برای فیدبک حالت می‌توان کاری کرد که قطبهای حلقه بسته در محلهای خواسته شده قرار گیرند، به شرطی که سیستم اصلی کنترل‌پذیر حالت کامل باشد.

در این فصل بحث خود را به سیستمهای تک ورودی - تک خروجی محدود می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم سیگنال کنترل  $u(t)$  و سیگنال خروجی  $y(t)$  اسکالر هستند. در اثبات فرمولهای این بخش ورودی مرجع  $r(t)$  را صفر می‌گیریم [در بخش ۱۰-۷ حالت صفر نبودن  $r(t)$  را در نظر می‌گیریم].

در ادامه ثابت می‌کنیم شرط لازم و کافی برای این که بتوان قطبهای حلقه بسته را در محلهای دلخواه صفحه  $s$  قرار داد این است که سیستم کنترل‌پذیر حالت کامل باشد. سپس روشهای تعیین ماتریس بهره فیدبک حالت را ارائه می‌کنیم.

خاطر نشان می‌کنیم که وقتی سیگنال کنترل یک کمیت برداری است، جنبه‌های ریاضی روش جابدهی قطب پیچیده می‌شود، به همین دلیل این حالت را در این کتاب در نظر نمی‌گیریم. (وقتی سیگنال کنترل یک کمیت برداری است ماتریس بهره فیدبک حالت یکتا نیست. می‌توان آزادانه بیش از  $n$  پارامتر را برگزید؛ یعنی علاوه بر امکان قرار دادن  $n$  قطب حلقه بسته در مکانهای دلخواه، می‌توان خواسته‌های دیگری از سیستم حلقه بسته، در صورت وجود، را نیز برآورده کرد.)

**طراحی با جابدهی قطب.** در روش کلاسیک طراحی سیستمهای تک ورودی - تک خروجی، یک کنترل‌کننده (جبران‌ساز) طرح می‌کنیم به نحوی که قطبهای حلقه بسته غالب نسبت میرایی  $\zeta$  و فرکانس طبیعی نامیرایی  $\omega_n$  مطلوبی داشته باشند. در این رهیافت مرتبه سیستم ۱ یا ۲ واحد زیاد می‌شود، مگر این که حذف صفر -

برای رسم منحنی‌های پاسخ ( $x_1$  بر حسب  $t$ ،  $x_2$  بر حسب  $t$ ، و  $x_3$  بر حسب  $t$ ) می‌توان دستور initial را به کار برد. ابتدا باید معادلات فضای حالت سیستم را به صورت زیر تعریف شود

$$\dot{x} = (A - BK)x + Iu$$

$$y = Ix + Iu$$

که در آن  $u$  (یک بردار ورودی سه بعدی) را به کار برده‌ایم. این بردار در محاسبه پاسخ به شرط اولیه 0 فرض می‌شود. سپس تعریف می‌کنیم

$$\text{sys} = \text{ss}(A - B K, \text{eye}(3), \text{eye}(3), \text{eye}(3))$$

و دستور initial را به صورت زیر به کار می‌بریم

$$x = \text{initial}(\text{sys}, [1; 0; 0], t)$$

که در آن  $t$  فاصله زمانی مورد نظرم‌ان است، مثلاً

$$t = 0:0.01:4;$$

و  $x_1$ ،  $x_2$ ، و  $x_3$  را به صورت زیر می‌یابیم:

$$x1 = [1 \ 0 \ 0] * x';$$

$$x2 = [0 \ 1 \ 0] * x';$$

$$x3 = [0 \ 0 \ 1] * x';$$

اکنون دستور plot را به کار می‌بریم کل برنامه در برنامه ۳-۱۰ دیده می‌شود. منحنی‌های پاسخ به دست آمده در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است.

## ۴-۱۰ طراحی سیستمهای سروو

در این بخش رهیافت جایدهی قطب برای طراحی سیستمهای سرووی نوع ۱ را معرفی می‌کنیم. بحث خود را به سیستمهایی که سیگنال کنترل  $u$  و سیگنال خروجی شان  $y$  اسکالر است، محدود می‌کنیم.

در زیر ابتدا مسئله طراحی سیستمهای سرووی نوع ۱ را که در آنها دستگاه انتگرالگیر دارد مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس طراحی سیستمهای سرووی نوع ۱ را برای حالتی که دستگاه انتگرالگیر ندارد در نظر می‌گیریم.

**طراحی سیستم سرووی نوع ۱ با دستگاه دارای انتگرالگیر.** فرض کنید دستگاه به صورت زیر توصیف شده است

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (19-10)$$

$$y = Cx \quad (20-10)$$

که در آن  $x$  = بردار حالت دستگاه ( $n \times 1$ )

$u$  = سیگنال کنترل (اسکالر)

$y$  = سیگنال خروجی (اسکالر)

این سیستم حلقه بسته ورودی ندارد. هدف آن حفظ صفر بودن خروجی است. به خاطر اغتشاشهای ممکن خروجی از صفر فاصله می گیرد. خروجی غیر صفر به ورودی مرجع برگردانده می شود. چنین سیستمی که در آن ورودی مرجع همیشه صفر است، تنظیم کننده خوانده می شود. (توجه کنید که اگر ورودی مرجع سیستم همواره مقدار ثابت غیر صفری باشد، باز هم سیستم را تنظیم کننده می نامند.)

با گذاشتن معادله (۱۰-۲) در معادله (۱۰-۱) به دست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t)$$

حل این معادله عبارت است از

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t} \mathbf{x}(0) \quad (3-10)$$

که در آن  $\mathbf{x}(0)$  حالت اولیه ایجاد شده توسط اغتشاشهای خارجی است. مشخصات پایداری و پاسخ گذرا توسط مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  تعیین می شود. با انتخاب مناسب  $\mathbf{K}$  می توان ماتریس  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  را به یک ماتریس پایدار مجانبی تبدیل کرد، و به ازای هر  $\mathbf{x}(0) \neq 0$  می توان در  $t \rightarrow \infty$ ،  $\mathbf{x}(t)$  را به 0 میل داد. مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  قطبهای تنظیم کننده نامیده می شوند. اگر این قطبها در نیم صفحه چپ قرار داشته باشند، در  $t \rightarrow \infty$   $\mathbf{x}(t)$  به 0 میل می کند. مسئله قرار دادن قطبهای حلقه بسته در محلهای مطلوب مسئله جابدهی قطب نام دارد.

در زیر نشان می دهیم که جابدهی دلخواه قطب برای یک سیستم ممکن است، اگر و تنها اگر آن سیستم کنترل پذیر حالت کامل باشد.

**شرط لازم و کافی برای جابدهی دلخواه قطب.** حال ثابت می کنیم شرط لازم و کافی برای جابدهی دلخواه قطب این است که سیستم کنترل پذیر حالت کامل باشد. ابتدا شرط لازم را به دست می آوریم. از اثبات این مطلب شروع می کنیم که اگر سیستم کنترل پذیر حالت کامل نباشد، ماتریس  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  مقادیر ویژه ای دارد که نمی توان آنها را با فیدبک حالت کنترل کرد.

فرض کنید سیستم توصیف شده با معادله (۱۰-۱) کنترل پذیر حالت کامل نیست. پس رتبه ماتریس کنترل پذیری کمتر از  $n$  است، یا

$$\text{rank}[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = q < n$$

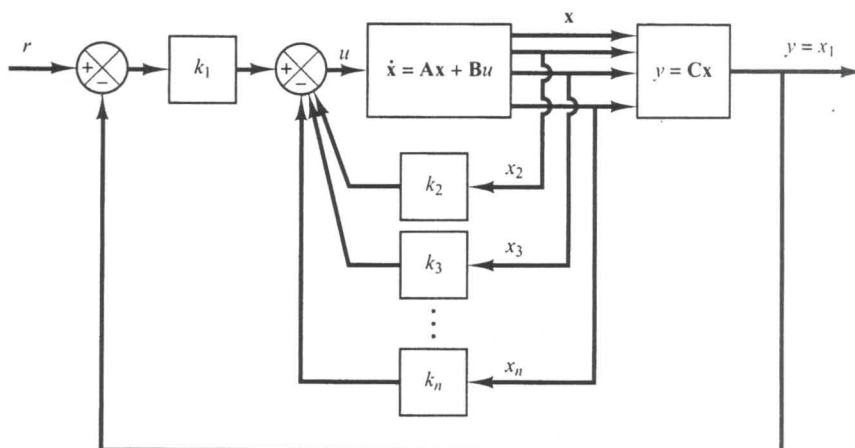
یعنی در ماتریس کنترل پذیری  $q$  بردار ستونی مستقل خطی وجود دارد. این  $q$  بردار ستونی مستقل خطی را  $\mathbf{f}_1$ ،  $\mathbf{f}_2$ ، ...،  $\mathbf{f}_q$  می نامیم.  $n - q$  بردار  $n$  تایی  $\mathbf{v}_{q+1}$ ،  $\mathbf{v}_{q+2}$ ، ...،  $\mathbf{v}_n$  دیگر نیز برمی گیریم، به نحوی که

$$\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \dots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \mathbf{v}_{q+2} \mid \dots \mid \mathbf{v}_n]$$

دارای رتبه  $n$  باشد. پس می توان نشان داد که

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(برای اثبات این معادلات مسئله الف-۱۰-۱ را ببینید.) حال تعریف می کنیم



شکل ۴-۱۰ سیستم سرووی نوع ۱ که دستگاه انتگرالگیر دارد.

$A =$  ماتریس ثابت  $n \times n$

$B =$  ماتریس ثابت  $n \times 1$

$C =$  ماتریس ثابت  $1 \times n$

چنانچه قبلاً گفتیم هم سیگنال کنترل  $u$  و هم سیگنال خروجی  $y$  را اسکالر فرض می‌کنیم. با انتخاب مناسب متغیرهای حالت می‌توان خروجی را با یکی از متغیرهای حالت برابر قرار داد. (روش ارائه شده در فصل ۳ را برای یافتن نمایش فضای حالتی که در آن خروجی  $y$  با متغیر حالت  $x_1$  برابر می‌شود، ببینید.)

شکل ۴-۱۰ آرایش عمومی سیستم سرووی نوع ۱ را برای حالتی که دستگاه انتگرالگیر دارد نشان می‌دهد. در این شکل فرض شده است که  $y = x_1$ . در تحلیل زیر فرض می‌کنیم ورودی مرجع  $r$  یک تابع پله‌ای است. در این سیستم طرح کنترلی زیر را به کار می‌بریم:

$$u = - \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1) = -Kx + k_1 r \quad (۲۱-۱۰)$$

که در آن

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

فرض کنید ورودی مرجع (تابع پله‌ای) در  $t=0$  اعمال شده است. پس در  $t>0$  رفتار دینامیکی سیستم را می‌توان با معادلات (۱۹-۱۰) و (۲۱-۱۰) توصیف کرد، یعنی

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Bk_1 r \quad (۲۲-۱۰)$$

سیستم سرووی نوع ۱ را طوری طرح می‌کنیم که قطبهای حلقه بسته آن در محل‌های دلخواه قرار گیرد. سیستم

اگر رتبه ماتریس کنترل پذیری  $M$  برابر  $n$  باشد (یعنی سیستم کنترل پذیر حالت کامل باشد) وارون ماتریس  $T$  وجود دارد و معادله (۱۰-۱) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \quad (۷-۱۰)$$

که در آن

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (۸-۱۰)$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۹-۱۰)$$

[برای اثبات معادلات (۸-۱۰) و (۹-۱۰) مسائل الف ۱۰-۲ و الف ۱۰-۳ را ببینید.] معادله (۷-۱۰) به شکل متعارف کنترل پذیر است. پس اگر سیستم کنترل پذیر کامل باشد و بردار حالت داده شده  $x$  را با استفاده از ماتریس تبدیل  $T$  معادله (۱۰-۴) به بردار حالت  $\hat{x}$  تبدیل کنیم، می توانیم معادله حالت داده شده را به شکل متعارف کنترل پذیر درآوریم.

حال یک دسته مقدار ویژه دلخواه  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  برمی گزینیم. پس معادله مشخصه مطلوب عبارت است از

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \quad (۱۰-۱۰)$$

می نویسیم

$$KT = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \dots \quad \delta_1] \quad (۱۱-۱۰)$$

اگر  $u = -K\hat{x}$  برای کنترل سیستم بیان شده با معادله (۷-۱۰) به کار رود، معادله سیستم به شکل زیر درمی آید

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} - T^{-1}BKT\hat{x}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$|sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| = 0$$

این معادله مشخصه همان معادله مشخصه سیستم تعریف شده در معادله (۱۰-۱) است، به شرطی که سیگنال کنترل به صورت  $u = -K\hat{x}$  باشد. برای اثبات این مطلب توجه کنید که

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x$$



سیستم سرووی نوع ۱ را به نحوی طرح کنید که قطبهای حلقه بسته در  $-2 \pm j\sqrt{3}$  و  $-10$  قرار داشته باشند. آرایش سیستم را به صورت شکل ۴-۱۰ در نظر بگیرید، و ورودی مرجع  $r$  را تابع پله‌ای فرض کنید.

متغیرهای حالت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{x}_1 \quad x_3 = \dot{x}_2$$

بنابراین نمایش فضای حالت سیستم به صورت زیر است

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (26-10)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (27-10)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

با توجه به شکل ۴-۱۰ و توجه به این که  $n=3$ ، سیگنال کنترل  $u$  عبارت است از

$$u = -(k_2 x_2 + k_3 x_3) + k_1 (r - x_1) = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r$$

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \quad \text{که در آن}$$

ماتریس بهره فیدبک حالت  $\mathbf{K}$  را می‌توان به سادگی با MATLAB به دست آورد. برنامه ۴-۱۰ را ببینید.

#### MATLAB Program 10-4

```
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
B = [0; 0; 1];
J = [-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3) -10];
K = acker(A,B,J)

K =

160.0000 54.0000 11.0000
```

پس ماتریس بهره فیدبک حالت  $\mathbf{K}$  عبارت است از

$$\mathbf{K} = [160 \quad 54 \quad 11]$$

پاسخ پله سیستم طراحی شده: پاسخ پله این سیستم را می‌توان به سادگی با شبیه سازی کامپیوتری به دست آورد.

تعیین ماتریس  $K$  با استفاده از ماتریس تبدیل  $T$ . فرض کنید سیستم به صورت زیر تعریف شده است

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

و سیگنال کنترل عبارت است از

$$u = -Kx$$

ماتریس بهره فیدبک  $K$  را برای این که مقادیر ویژه  $A - BK$  مقادیر دلخواه  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  باشند، می توان با گامهای زیر تعیین کرد. (اگر  $\mu_1$  مقداری مختلط باشد، مزدوج آن نیز باید مقدار ویژه  $A - BK$  باشد).  
گام ۱. کنترل پذیری سیستم را بررسی کنید. اگر سیستم کنترل پذیر حالت کامل است، گامهای زیر را طی کنید.

گام ۲. با توجه به معادله مشخصه  $A$

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

ضرایب  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را بیابید.

گام ۳. ماتریس تبدیل  $T$  را که معادله حالت سیستم را به شکل متعارف کنترل پذیر درمی آورد، به دست آورید. اگر معادله سیستم به شکل متعارف کنترل پذیر باشد، آنگاه  $T = I$ . نوشتن معادله حالت به شکل متعارف کنترل پذیر لازم نیست. تنها چیزی که لازم داریم ماتریس  $T$  است. ماتریس  $T$  از معادله  $(10-4)$  به دست می آید، یعنی

$$T = MW$$

$M$  در معادله  $(10-5)$  و  $W$  در معادله  $(10-6)$  داده شده است.

گام ۴. با استفاده از مقادیر ویژه مطلوب (قطبهای حلقه بسته مطلوب) چندجمله ای مشخصه مطلوب را بنویسید.

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

و ضریب  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  را تعیین کنید.

گام ۵. ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را می توان از معادله  $(10-13)$ ، که در زیر بازنویسی شده، به دست آورد.

$$K = [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \dots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

تعیین ماتریس  $K$  با روش جایگزینی مستقیم. توجه کنید که در صورت مرتبه پایین بودن سیستم ( $n \leq 3$ )

جایگزینی مستقیم ماتریس  $K$  در چندجمله ای مشخصه مطلوب ممکن است ساده تر باشد. مثلاً به ازای  $n=3$

می توان ماتریس بهره  $K$  را به شکل زیر نوشت

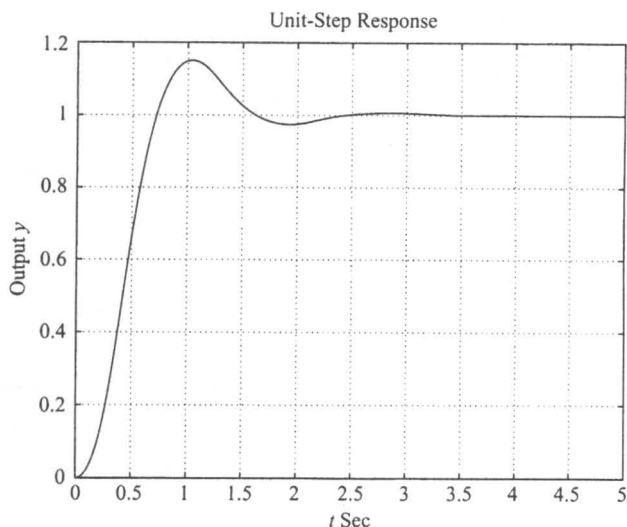
$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

ماتریس  $K$  را در معادله مشخصه  $|sI - A + BK|$  قرار داده، حاصل را با  $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$  برابر قرار

می دهیم

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

چون دو طرف معادله چندجمله ای هایی برحسب  $s$  هستند، با برابر قرار دادن ضرایب توانهای مشابه می توان



شکل ۱۰-۵

منحنی پاسخ پله  $y(t)$  سیستم طراحی شده در مثال ۴-۱۰.

توجه کنید که چون

$$u(\infty) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(\infty) + k_1 r(\infty) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(\infty) + k_1 r$$

داریم

$$\begin{aligned} u(\infty) &= -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \end{bmatrix} + 160r \\ &= -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 160r = 0 \end{aligned}$$

در حالت ماندگار سیگنال کنترل  $u$  صفر می شود.

طراحی سیستم سرووی نوع ۱ برای دستگاه فاقد انتگرالگیر. اگر دستگاه انتگرالگیر نداشته باشد (دستگاه نوع ۰)، اصل پایه‌ای طراحی سیستم سرووی نوع ۱ گذاشتن یک انتگرالگیر در مسیر پیشخورد، بین مقایسه کننده خطا و دستگاه است. این کار در شکل ۱۰-۶ تصویر شده است. (شکل ۱۰-۶ نمودار بلوکی پایه‌ای سیستمهای سرووی نوع ۱، با دستگاه فاقد انتگرالگیر است). با توجه به این نمودار داریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (۱۰-۳۱)$$

$$y = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (۱۰-۳۲)$$

$$u = -\mathbf{K} \mathbf{x} + k_1 \xi \quad (۱۰-۳۳)$$

$$\xi = r - y = r - \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (۱۰-۳۴)$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_r I + \alpha_r \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^r + \tilde{A}^r \\
& = \alpha_r I + \alpha_r (A - BK) + \alpha_1 (A^r - ABK - BK\tilde{A}) + A^r - A^r BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^r \quad (16-10) \\
& = \alpha_r I + \alpha_r A + \alpha_1 A^r + A^r - \alpha_r BK - \alpha_1 ABK - \alpha_1 BK\tilde{A} - A^r BK - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^r
\end{aligned}$$

با توجه به معادله (۱۵-۱۰)

$$\alpha_r I + \alpha_r \tilde{A} + \alpha_1 \tilde{A}^r + \tilde{A}^r = \phi(\tilde{A}) = 0$$

همچنین داریم

$$\alpha_r I + \alpha_r A + \alpha_1 A^r + A^r = \phi(A) \neq 0$$

با گذاشتن دو معادله اخیر در معادله (۱۶-۱۰) به دست می آوریم

$$\phi(\tilde{A}) = \phi(A) - \alpha_r BK - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK\tilde{A}^r - \alpha_1 ABK - ABK\tilde{A} - A^r BK$$

چون  $\phi(\tilde{A}) = 0$  داریم

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= B(\alpha_r K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^r) + AB(\alpha_1 K + K\tilde{A}) + A^r BK \\
&= [B \mid AB \mid A^r B] \begin{bmatrix} \alpha_r K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^r \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} \quad (17-10)
\end{aligned}$$

چون سیستم کنترل پذیر حالت کامل است، وارون ماتریس کنترل پذیری زیر وجود دارد

$$[B \mid AB \mid A^r B]$$

با ضرب دو طرف معادله (۱۷-۱۰) در وارون ماتریس کنترل پذیری به دست می آوریم

$$[B \mid AB \mid A^r B]^{-1} \phi(A) = \begin{bmatrix} \alpha_r K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^r \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix}$$

با ضرب دو طرف این معادله در  $[0 \ 0 \ 1]$  به دست می آوریم

$$[0 \ 0 \ 1][B \mid AB \mid A^r B]^{-1} \phi(A) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_r K + \alpha_1 K\tilde{A} + K\tilde{A}^r \\ \alpha_1 K + K\tilde{A} \\ K \end{bmatrix} = K$$

که می توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$K = [0 \ 0 \ 1][B \mid AB \mid A^r B]^{-1} \phi(A)$$

این معادله ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را به دست می دهد.

(۳۵-۱۰) به دست می آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (۳۷-۱۰)$$

با تعریف

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

می توانیم معادله (۳۷-۱۰) را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} u_e(t) \quad (۳۸-۱۰)$$

که در آن

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I \xi_e(t) \quad (۳۹-۱۰)$$

بردار خطای جدید  $\mathbf{e}(t)$ ، که مرتبه آن  $(n+1)$  است، به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n+1) \text{ بردار مرتبه}$$

پس معادله (۳۸-۱۰) به شکل زیر درمی آید

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \quad (۴۰-۱۰)$$

که در آن

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

و معادله (۳۹-۱۰) به صورت زیر درمی آید

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \quad (۴۱-۱۰)$$

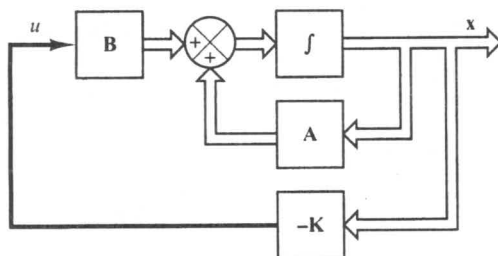
که در آن

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \mid -k_I]$$

معادله حالت خطا را می توان با گذاشتن معادله (۴۱-۱۰) در معادله (۴۰-۱۰) به دست آورد

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e} \quad (۴۲-۱۰)$$

با مشخص کردن مقادیر ویژه مطلوب  $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$  (یعنی قطبهای حلقه بسته مطلوب) به صورت  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$  می توان ماتریس بهره فیدبک حالت  $\mathbf{K}$  و ثابت بهره  $k_I$  را به روش جایدهی قطب بخش ۲-۱۰ به دست آورد، به شرطی که سیستم توصیف شده با معادله (۴۰-۱۰) کنترل پذیر حالت کامل باشد.



شکل ۱۰-۲

سیستم تنظیم کننده.

ابتدا باید ماتریس کنترل پذیری سیستم را بررسی کنیم. این ماتریس عبارت است از

$$M = [B \mid AB \mid A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

می بینیم که  $|M| = -1$  پس رتبه ماتریس  $M$  برابر ۳ است. سیستم کنترل پذیر حالت کامل و جابدهی دلخواه قطبها امکان پذیر است.

حال به حل مسئله می پردازیم. هر سه روش بیان شده در این فصل را به کار می بریم.  
روش ۱: روش اول استفاده از معادله (۱۰-۱۳) است. معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 5s + 1 \\ &= s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0 \end{aligned}$$

یعنی

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_1 = 6$$

معادله مشخصه مطلوب عبارت است از

$$\begin{aligned} (s+2-j4)(s+2+j4)(s+10) &= s^3 + 14s^2 + 60s + 200 \\ &= s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

پس

$$\alpha_3 = 200, \quad \alpha_2 = 60, \quad \alpha_1 = 14$$

با توجه به معادله (۱۰-۱۳) داریم

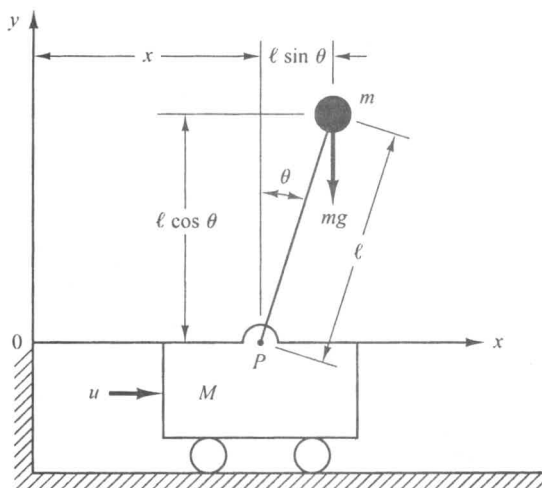
$$K = [\alpha_3 - a_3 \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1}$$

برای این سیستم  $T = I$ ، زیرا معادلات حالت به شکل متعارف کنترل پذیر هستند. بنابراین داریم

$$K = [200 - 1 \mid 60 - 5 \mid 14 - 6] = [199 \quad 55 \quad 8]$$

روش ۲: ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$



شکل ۱۰-۸

سیستم کنترل آونگ وارون.

معادلات سیستم آونگ وارون را در مثال ۳-۶ به دست آوردیم. با توجه معادلات (۳-۲۱) و (۳-۲۰)

معادلات سیستم کنترل آونگ وارون عبارت اند از

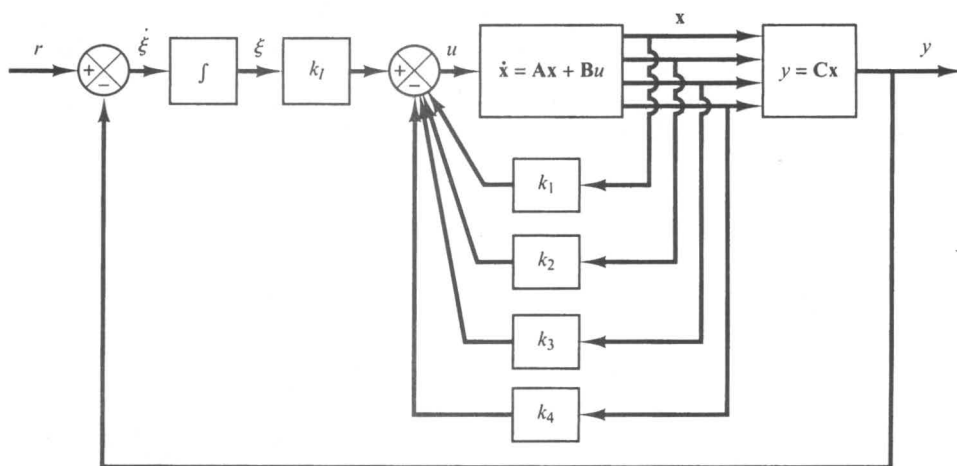
$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \quad (۱۰-۴۳)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (۱۰-۴۴)$$

معادلات (۱۰-۴۳) و (۱۰-۴۴) به ازای مقادیر عددی داده شده به صورت زیر درمی آیند

$$\ddot{\theta} = ۲۰/۶۰۱\theta - u \quad (۱۰-۴۵)$$

$$\ddot{x} = ۰/۵u - ۰/۴۹۰۵\theta \quad (۱۰-۴۶)$$



شکل ۱۰-۹ سیستم کنترل آونگ وارون. (سیستم سرووی نوع ۱ با دستگاه فاقد انتگرالگیر).

به دست می آوریم

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \end{bmatrix}$$

کاملاً مشخص است که سه روش ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  یکسانی به دست می دهند. با این فیدبک حالت قطبهای حلقه بسته در  $s = -2 \pm j4$  و  $s = -10$  قرار می گیرند، که مطلوب ما بوده است.

تذکر می دهیم که اگر مرتبه سیستم ۴ یا بزرگتر باشد، روشهای ۱ و ۳ توصیه می شوند، زیرا تمام محاسبات ماتریسی را می توان با کامپیوتر انجام داد. در صورت استفاده از روش ۲ باید محاسبات را دستی انجام داد، زیرا کامپیوتر نمی تواند با معادله ای شامل پارامترهای مجهول  $k_1, k_2, \dots, k_n$  کار کند.

**توضیح.** توجه به این نکته مهم است که ماتریس  $K$  برای یک سیستم معین یکتا نیست، بلکه به مکان قطبهای حلقه بسته مطلوب (که سرعت و میرایی پاسخ را تعیین می کنند) بستگی دارد. دقت کنید که محل قطبهای حلقه بسته یا معادله مشخصه مطلوب براساس مصالحه ای بین سرعت پاسخ بردار خطا و حساسیت به اغتشاشها و نویز اندازه گیری تعیین می شود. اگر سرعت پاسخ را افزایش دهیم اثرات نامطلوب اغتشاش و نویز اندازه گیری نیز شدید می شود. اگر سیستم مرتبه دو باشد رفتار دینامیکی سیستم (مشخصات پاسخ) را می توان دقیقاً به محل قطبها و صفر (یا صفرهای) حلقه بسته مرتبط کرد. برای سیستمهای مرتبه بالاتر، رفتار دینامیکی سیستم را نمی توان به سادگی به محل قطبهای حلقه بسته ارتباط داد. بنابراین پس از تعیین ماتریس بهره فیدبک حالت برای سیستم مورد نظر، بهتر است که مشخصات پاسخ سیستم براساس ماتریسهای  $K$  متفاوت (که براساس محلهای مختلف برای قطبها تعیین شده اند) با شبیه سازی کامپیوتری مورد بررسی قرار گیرد و ماتریسی انتخاب شود که به ازای آن سیستم بهترین عملکرد را از خود نشان می دهد.

### ۱۰-۳ حل مسئله جابدهی قطب با MATLAB

مسئله جابدهی قطب را می توان به سادگی با MATLAB حل کرد. MATLAB دو دستور برای محاسبه ماتریس بهره فیدبک  $K$  دارد، `acker` و `place`. دستور `acker` بر فرمول اکرمین مبتنی است. این دستور را تنها به سیستمهای یک ورودی می توان اعمال کرد. قطبهای حلقه بسته مطلوب می توانند مکرر باشند (یعنی چند قطب در یک محل).

اگر سیستم چند ورودی باشد، ماتریس  $K$  به ازای یک مجموعه و قطب حلقه بسته یکتا نیست و برای انتخاب  $K$  آزادی بیشتری داریم. رهیافتهای مختلفی برای استفاده سازنده از آزادی های موجود در تعیین  $K$



که در آن

$$\hat{K} = [K \mid -k_I] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \mid -k_I]$$

برای این که پاسخ سیستم طراحی شده سرعت و میرایی خوبی داشته باشد (مثلاً زمان نشست بین ۴ تا ۵ ثانیه و ماکزیمم فراجش بین ۱۵٪ تا ۱۶٪ در پاسخ پله) محل قطبهای حلقه بسته مطلوب را به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5, \mu_5 = -5$$

ماتریس بهره فیدبک حالت را با استفاده از MATLAB به دست می‌آوریم.

قبل از این که جلوتر برویم، باید رتبه ماتریس  $P$  را تعیین کنیم،  $P$  عبارت است از

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52-10)$$

می‌توان نشان داد که رتبه این ماتریس ۵ است. پس سیستم تعریف شده با معادله (۵۱-۱۰) کنترل‌پذیر کامل است و جایدهی دلخواه قطب امری شدنی است. برنامه ۱۰-۶ ماتریس بهره فیدبک حالت  $\hat{K}$  را به دست می‌دهد.

پس داریم

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \\ = [-157.6336 \quad -35.3733 \quad -56.0652 \quad -36.7466]$$

$$k_I = -50.9684$$

و

#### MATLAB Program 10-6

```
A = [0 1 0 0; 20.601 0 0 0; 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0];
B = [0;-1;0;0.5];
C = [0 0 1 0];
Ahat = [A zeros(4,1); -C 0];
Bhat = [B;0];
J = [-1+j*sqrt(3) -1-j*sqrt(3) -5 -5 -5];
Khat = acker(Ahat,Bhat,J)

Khat =

-157.6336 -35.3733 -56.0652 -36.7466 50.9684
```

**MATLAB Program 10-1**

```

A = [0 1 0; 0 0 1; -1 -5 -6];
B = [0; 0; 1];
J = [-2+j*4 -2-j*4 -10];
K = acker(A,B,J)

K =

    199    55     8

```

**MATLAB Program 10-2**

```

A = [0 1 0; 0 0 1; -1 -5 -6];
B = [0; 0; 1];
J = [-2+j*4 -2-j*4 -10];
K = place(A,B,J)
place: ndigits = 15

K =

    199.0000    55.0000     8.0000

```

برنامه‌های ۱-۱۰ و ۲-۱۰ ماتریس بهره  $K$  را به دست می‌دهند. در برنامه اول دستور `acker` و در برنامه دوم دستور `place` به کار رفته است.

همان سیستم مثال ۱-۱۰ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم قطبهای حلقه بسته این سیستم در محلهای زیر قرار گیرد

مثال ۳-۱۰

$$s = -2 + j4 \quad s = -2 - j4 \quad s = -10$$

در مثال ۱-۱۰ ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را به صورت زیر یافتیم

$$K = [199 \quad 55 \quad 8]$$

با استفاده از MATLAB پاسخ سیستم به شرط اولیه زیر را بیابید

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ به شرط اولیه: برای یافتن پاسخ به شرط اولیه  $x(0)$  معادله  $\dot{x} = -Kx$  را در معادله دستگاه قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**MATLAB Program 10-7**

```

%**** The following program is to obtain step response
% of the inverted-pendulum system just designed ****

A = [0 1 0 0; 20.601 0 0 0; 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0];
B = [0; -1; 0; 0.5];
C = [0 0 1 0];
D = [0];
K = [-157.6336 -35.3733 -56.0652 -36.7466];
KI = -50.9684;
AA = [A - B*K B*KI; -C 0];
BB = [0; 0; 0; 1];
CC = [C 0];
DD = [0];

%***** To obtain response curves x1 versus t, x2 versus t,
% x3 versus t, x4 versus t, and x5 versus t, separately, enter
% the following command *****

t = 0:0.02:6;
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD,1,t);

x1 = [1 0 0 0 0]*x';
x2 = [0 1 0 0 0]*x';
x3 = [0 0 1 0 0]*x';
x4 = [0 0 0 1 0]*x';
x5 = [0 0 0 0 1]*x';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid
title('x1 versus t')
xlabel('t Sec'); ylabel('x1')

subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid
title('x2 versus t')
xlabel('t Sec'); ylabel('x2')

subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid
title('x3 versus t')
xlabel('t Sec'); ylabel('x3')

subplot(3,2,4); plot(t,x4); grid
title('x4 versus t')
xlabel('t Sec'); ylabel('x4')

subplot(3,2,5); plot(t,x5); grid
title('x5 versus t')
xlabel('t Sec'); ylabel('x5')

```

**MATLAB Program 10-3**

% Response to initial condition:

$A = [0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; -1 \ -5 \ -6];$

$B = [0; 0; 1];$

$K = [199 \ 55 \ 8];$

$sys = ss(A-B*K, eye(3), eye(3));$

$t = 0:0.01:4;$

$x = initial(sys, [1; 0; 0], t);$

$x1 = [1 \ 0 \ 0]*x';$

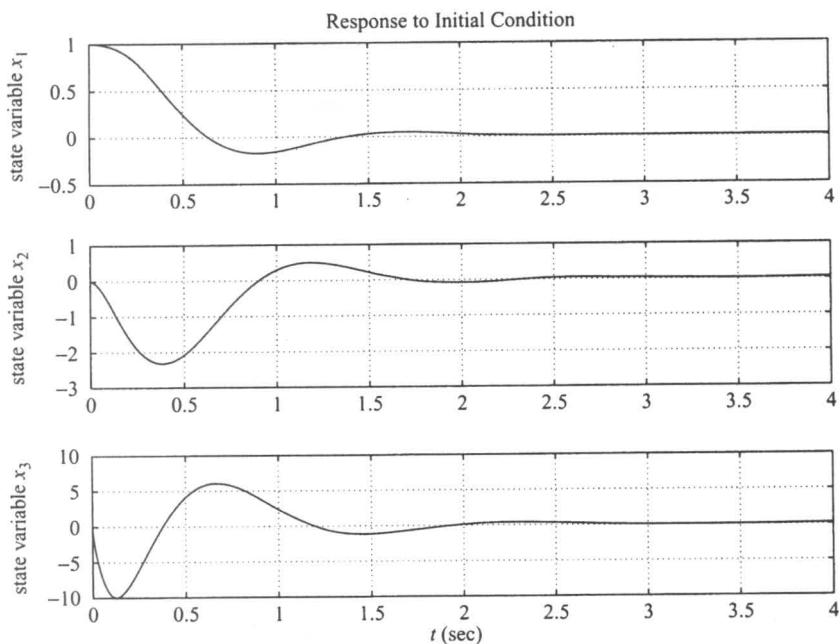
$x2 = [0 \ 1 \ 0]*x';$

$x3 = [0 \ 0 \ 1]*x';$

subplot(3,1,1); plot(t,x1), grid  
title('Response to Initial Condition')  
ylabel('state variable x1')

subplot(3,1,2); plot(t,x2), grid  
ylabel('state variable x2')

subplot(3,1,3); plot(t,x3), grid  
xlabel('t (sec)')  
ylabel('state variable x3')



**مشاهده گر حالت.** مشاهده گر حالت متغیرهای حالت را براساس اندازه گیری متغیرهای خروجی و کنترل برآورد می کند. در اینجا مفهوم مشاهده پذیری بخش ۹-۷ نقش مهمی بازی می کند. به زودی نشان می دهیم که مشاهده گر حالت را به شرطی می توان ساخت که سیستم مشاهده پذیر باشد.

در بحث زیر برای نشان دادن بردار حالت مشاهده شده نماد  $\bar{x}$  را به کار می بریم. در بسیاری از موارد عملی برای ایجاد بردار کنترل مطلوب از بردار حالت مشاهده شده  $\bar{x}$  استفاده می شود.

سیستم تعریف شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B u \quad (۵۵-۱۰)$$

$$y = C\bar{x} \quad (۵۶-۱۰)$$

مشاهده گر زیر سیستمی است که بردار حالت دستگاه را بازسازی می کند. مدل ریاضی مشاهده گر اساساً همان مدل دستگاه است. با این تفاوت که جملاتی اضافی در آن در نظر می گیریم، از جمله خطای برآورد شده که برای جبران عدم دقتهای ماتریسهای  $A$  و  $B$  و فقدان خطای اولیه به کار می رود. خطای برآورد یا خطای مشاهده، تفاضل بین خروجی اندازه گیری شده و خروجی برآورد شده است. خطای اولیه تفاضل بین حالت اولیه و خطای برآورد شده اولیه است. پس مدل ریاضی مشاهده گر را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B u + K_e(y - C\bar{x}) \\ &= (A - K_e C)\bar{x} + B u + K_e y \end{aligned} \quad (۵۷-۱۰)$$

که  $\bar{x}$  حالت برآورد شده و  $C\bar{x}$  خروجی برآورد شده است. ورودیهای مشاهده گر، خروجی  $y$  و ورودی کنترل هستند. ماتریس  $K_e$  که ماتریس بهره مشاهده گر نامیده می شود، یک ماتریس وزندهی برای جملات تصحیح کننده شامل تفاضل خروجی اندازه گیری شده  $y$  و خروجی برآورد شده  $C\bar{x}$  است. این جمله دائماً خروجی مدل را تصحیح کرده، عملکرد مشاهده گر را بهبود می دهد. شکل ۱۰-۱۱ نمودار بلوکی سیستم و مشاهده گر حالت کامل مرتبه را نشان می دهد.

**مشاهده گر حالت کامل - مرتبه.** مرتبه مشاهده گری که در اینجا مورد بحث قرار می دهیم با مرتبه سیستم یکسان است. فرض می کنیم سیستم با معادلات (۵۵-۱۰) و (۵۶-۱۰) و مشاهده گر با معادله (۵۷-۱۰) توصیف می شود.

برای یافتن معادله خطای مشاهده گر، معادله (۵۷-۱۰) را از معادله (۵۵-۱۰) کم می کنیم

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} - \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} - A\bar{x} - K_e(C\bar{x} - C\bar{x}) \\ &= (A - K_e C)(\bar{x} - \bar{x}) \end{aligned} \quad (۵۸-۱۰)$$

تفاضل  $\bar{x}$  و  $x$  را بردار خطا  $e$  می نامیم، یا

$$e = x - \bar{x}$$

حال معادله (۵۸-۱۰) به صورت زیر درمی آید

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \quad (۵۹-۱۰)$$

طراحی شده پایداری مجانبی دارد، و در آن  $y(\infty)$  به مقدار ثابت  $r$  گراییده،  $u(\infty)$  صفر می‌شود. ( $r$  ورودی پله‌ای است).

در حالت ماندگار داریم

$$\dot{x}(\infty) = (A - BK)x(\infty) + Bk_1 r \quad (۲۳-۱۰)$$

چون  $r(t)$  تابع پله‌ای است، در  $t > 0$  داریم (ثابت)  $r(\infty) = r(t) = r$ . با کم کردن معادله (۲۳-۱۰) از معادله (۲۲-۱۰) به دست می‌آوریم

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) = (A - BK)[x(t) - x(\infty)] \quad (۲۴-۱۰)$$

با تعریف

$$x(t) - x(\infty) = e(t)$$

معادله (۲۴-۱۰) به شکل زیر درمی‌آید

$$\dot{e} = (A - BK)e \quad (۲۵-۱۰)$$

معادله (۲۵-۱۰) رفتار دینامیکی خطا را توصیف می‌کند.

در اینجا طراحی سیستم سرووی نوع ۱ را به طراحی یک تنظیم کننده پایدار مجانبی تبدیل کردیم به نحوی که به ازای هر شرط اولیه  $e(0)$ ،  $e(t)$  به صفر میل می‌کند. اگر سیستم توصیف شده با معادله (۱۹-۱۰) کنترل‌پذیر حالت کامل باشد، با مشخص کردن مقادیر ویژه  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  برای ماتریس  $A - BK$  می‌توان ماتریس  $K$  را به روش جایدهی قطب بیان شده در بخش ۱۰-۲ تعیین کرد.

مقادیر حالت ماندگار  $x(t)$  و  $u(t)$  را می‌توان به صورت زیر یافت: در حالت ماندگار ( $t = \infty$ ) طبق معادله (۲۲-۱۰) داریم

$$\dot{x}(\infty) = 0 = (A - BK)x(\infty) + Bk_1 r$$

چون مقادیر ویژه مطلوب  $(A - BK)$  همگی در نیم صفحه چپ قرار دارند، ماتریس  $A - BK$  وارون دارد. پس  $x(\infty)$  را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

$$x(\infty) = -(A - BK)^{-1} Bk_1 r$$

همچنین  $u(\infty)$  به صورت زیر تعیین می‌شود

$$u(\infty) = -Kx(\infty) + k_1 r = 0$$

(درستی معادله اخیر در مثال ۱۰-۴ نشان داده شده است.)

طراحی یک سیستم سرووی نوع ۱ را، که تابع تبدیل دستگاه آن انتگرالگیر دارد، در نظر بگیرید. تابع تبدیل دستگاه را به صورت زیر فرض کنید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

مثال ۱۰-۴

در طراحی مشاهده‌گر حالت کامل - مرتبه باید مسئله همزاد را حل کنیم، یعنی باید مسئله جابدهی قطب سیستم همزاد زیر

$$\dot{z} = A^* z + C^* v$$

$$n = B^* z$$

را با سیگنال کنترل  $v$  زیر حل کنیم

$$v = -Kz$$

اگر سیستم همزاد کنترل‌پذیر حالت کامل باشد، ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را می‌توان به نحوی طرح کرد که  $A^* - C^* K$  مقادیر ویژه دلخواهی داشته باشد.

اگر  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  مقادیر ویژه مطلوب ماتریس مشاهده‌گر حالت باشد، با قرار دادن آنها به عنوان مقادیر ویژه مطلوب ماتریس بهره سیستم همزاد به دست می‌آوریم

$$|sI - (A^* - C^* K)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

با توجه به این که مقادیر ویژه  $A^* - C^* K$  و مقادیر ویژه  $A^* - K^* C$  یکسان‌اند، داریم

$$|sI - (A^* - C^* K)| = |sI - (A - K^* C)|$$

با مقایسه چندجمله‌ای مشخصه  $|sI - (A^* - K^* C)|$  و چندجمله‌ای مشخصه  $|sI - (A - K_e C)|$  سیستم مشاهده‌گر می‌فهمیم که [معادله (۵۷-۱۰) را ببینید].  $K_e$  و  $K^*$  به صورت زیر به هم مرتبط‌اند

$$K_e = K^*$$

پس با استفاده از ماتریس  $K$  سیستم همزاد، که به روش جابدهی قطب به دست می‌آید، می‌توان ماتریس بهره مشاهده‌گر  $K_e$  سیستم اصلی را از رابطه  $K_e = K^*$  به دست آورد. (برای جزییات مسئله الف-۱۰-۱۰ را ببینید).

**شرط لازم و کافی برای مشاهده حالت.** همانطور که دیدیم شرط لازم و کافی برای تعیین ماتریس بهره مشاهده‌گر  $K_e$  به نحوی که  $A - K_e C$  دارای مقادیر ویژه مطلوب باشد این است که همزاد سیستم اصلی، یعنی

$$\dot{z} = A^* z + C^* v$$

کنترل‌پذیر حالت کامل باشد. شرط کنترل‌پذیری کامل این سیستم همزاد این است که رتبه ماتریس زیر  $n$  باشد

$$[C^* \mid A^* C^* \mid \cdots \mid (A^*)^{n-1} C^*]$$

این همان شرط مشاهده‌پذیری کامل سیستم اصلی تعریف شده با معادلات (۵۵-۱۰) و (۵۶-۱۰) است. پس شرط لازم و کافی برای مشاهده حالت سیستم توصیف شده با معادلات (۵۵-۱۰) و (۵۶-۱۰) این است که سیستم مشاهده‌پذیر کامل باشد.

پس از تعیین مقادیر ویژه دلخواه (یا معادله مشخصه دلخواه) می‌توان مشاهده‌گر حالت کامل مرتبه را

چون

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 & 56 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله (۱۰-۲۲) معادله حالت سیستم طراحی شده به صورت زیر

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{bmatrix} r \quad (10-29)$$

و معادله خروجی به صورت زیر است

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (10-30)$$

معادلات (۱۰-۲۹) و (۱۰-۳۰) را برای حالتی که  $r$  تابع پله واحد است، حل می‌کنیم و پاسخ پله  $y(t)$  را به دست می‌آوریم. برنامه ۱۰-۵ پاسخ پله سیستم را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ پله حاصل در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است.

**MATLAB Program 10-5**

```
% ----- Unit-step response -----
% ***** Enter the state matrix, control matrix, output matrix,
% and direct transmission matrix of the designed system *****
AA = [0 1 0; 0 0 1; -160 -56 -14];
BB = [0; 0; 160];
CC = [1 0 0];
DD = [0];
% ***** Enter step command and plot command *****
t = 0:0.01:5;
y = step(AA,BB,CC,DD,1,t);
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output y')
```



$$\left| sI - (A - K_e C) \right| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

با برابر قرار دادن ضرایب توانهای مشابه  $s$  می‌توانیم  $k_{e1}$ ،  $k_{e2}$  و  $k_{e3}$  را بیابیم. این روش برای  $n \leq 3$  مناسب است.  $n$  بعد بردار حالت  $K$  است. (البته به ازای  $n > 3$  نیز می‌توان این روش را به کار برد، ولی عملیات لازم بسیار زیاد می‌شود.)

روش دیگر یافتن ماتریس بهره مشاهده گر حالت  $K_e$  استفاده از فرمول اکرمین است. این روش را در زیر معرفی می‌کنیم.

**فرمول اکرمین.** سیستم تعریف شده در زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۶۲-۱۰)$$

$$y = Cx \quad (۶۳-۱۰)$$

در بخش ۲-۱۰ فرمول اکرمین را برای جابدهی قطب سیستم تعریف شده با معادله (۶۲-۱۰) معرفی کردیم. این فرمول در معادله (۱۸-۱۰) بیان شده، که آن را در زیر تکرار می‌کنیم:

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]^{-1} \phi(A)$$

برای سیستم همزاد معادلات (۶۲-۱۰) و (۶۳-۱۰)، یعنی

$$\dot{z} = A^*z + C^*v$$

$$n = B^*z$$

فرمول جابدهی قطب اکرمین به صورت زیر درمی‌آید

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [C^* \mid A^*C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1}C^*]^{-1} \phi(A^*) \quad (۶۴-۱۰)$$

چنانچه قبلاً گفتیم ماتریس بهره مشاهده گر حالت  $K_e$  با  $K^*$  برابرست؛  $K$  از معادله (۶۴-۱۰) به دست می‌آید،

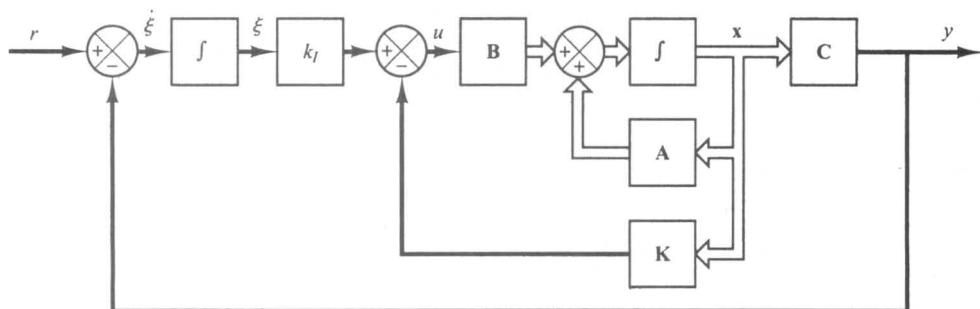
پس

$$K_e = K^* = \phi(A^*)^* \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۶۵-۱۰)$$

که در آن  $\phi(s)$  چندجمله‌ای مشخصه مطلوب مشاهده گر مطلوب حالت است. یعنی

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \dots (s - \mu_n)$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  مقادیر ویژه مطلوب هستند. معادله (۶۵-۱۰) را فرمول اکرمین برای تعیین ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  می‌نامند.



شکل ۱۰-۶ سیستم سرووی نوع ۱.

که در آن  $\mathbf{x}$  = بردار حالت دستگاه ( $n \times 1$ )

$u$  = سیگنال کنترل (اسکالر)

$y$  = سیگنال خروجی (اسکالر)

$\xi$  = خروجی انتگرالگیر (متغیر حالت سیستم، اسکالر)

$r$  = سیگنال ورودی مرجع (تابع پله‌ای، اسکالر)

$\mathbf{A}$  = ماتریس ثابت ( $n \times n$ )

$\mathbf{B}$  = ماتریس ثابت ( $n \times 1$ )

$\mathbf{C}$  = ماتریس ثابت ( $1 \times n$ )

فرض می‌کنیم دستگاه توصیف شده با معادله (۱۰-۳۱) کنترل‌پذیر کامل است. تابع تبدیل دستگاه عبارت است از

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

فرض می‌کنیم  $G_p(s)$  در مبدأ صفر ندارد تا احتمال حذف انتگرالگیر اضافه شده توسط این صفر پیش نیاید.

فرض کنید ورودی مرجع (تابع پله‌ای) در  $t=0$  اعمال می‌شود. پس برای توصیف رفتار دینامیکی سیستم

در  $t > 0$  معادلات (۱۰-۳۱) و (۱۰-۳۴) را ترکیب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (10-35)$$

یک سیستم دارای پایداری مجانبی طرح می‌کنیم، به نحوی که  $\mathbf{x}(\infty)$ ،  $\xi(\infty)$  و  $u(\infty)$  به مقادیری ثابت میل کنند. پس در حالت ماندگار  $\xi(t) = 0$  و داریم  $y(\infty) = r$ .

در حالت ماندگار داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (10-36)$$

چون  $r(t)$  ورودی پله‌ای است، در  $t > 0$  داریم  $r(t) = r$ . با کم کردن معادله (۱۰-۳۶) از معادله

با فرض این که آرایش سیستم همانند شکل ۱۰-۱۱ است، یک مشاهده‌گر کامل - مرتبه طرح کنید. مقادیر ویژه مطلوب ماتریس مشاهده‌گر را به صورت زیر فرض کنید

$$\mu_1 = -10, \quad \mu_2 = -10$$

طراحی مشاهده‌گر حالت در واقع معادل تعیین یک ماتریس بهره  $K_e$  مناسب است.

ابتدا ماتریس مشاهده‌پذیری را بررسی می‌کنیم. رتبه ماتریس زیر ۲ است

$$[C^* | A^*C^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس سیستم مشاهده پذیر کامل است و می‌توان ماتریس بهره مشاهده‌گر مطلوب را تعیین کرد. این مسئله را به سه روش حل می‌کنیم.

روش ۱: ماتریس بهره مشاهده‌گر را با استفاده از معادله (۱۰-۶۱) تعیین می‌کنیم. ماتریس حالت داده شده  $A$  به صورت متعارف مشاهده‌پذیر است. پس ماتریس تبدیل  $Q = (WN^*)^{-1}$  برابر  $I$  است. معادله مشخصه سیستم داده شده عبارت است از

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -20/6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20/6$$

$$= s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

پس داریم

$$a_2 = -20/6, \quad a_1 = 0$$

معادله مشخصه مطلوب عبارت است از

$$(s+10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2 = 0$$

پس

$$\alpha_2 = 100, \quad \alpha_1 = 20$$

بنابراین ماتریس بهره مشاهده‌گر  $K_e$  را می‌توان از معادله (۱۰-۶۱) به صورت زیر به دست آورد:

$$K_e = (WN^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

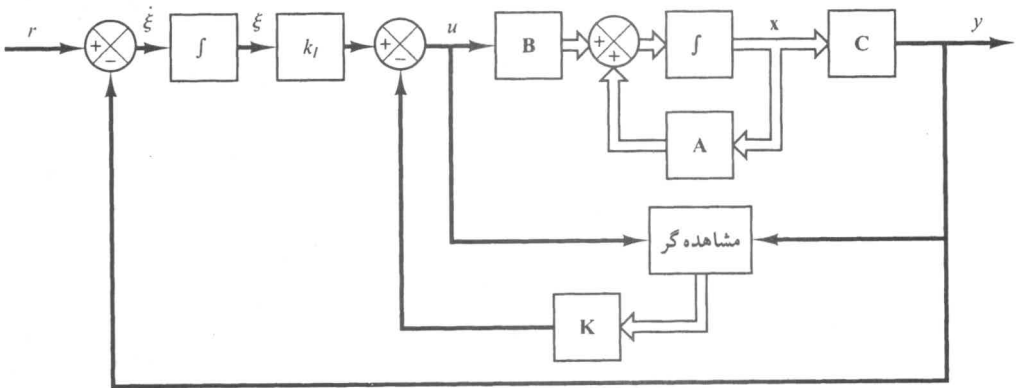
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 + 20/6 \\ 20 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120/6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

روش ۲: با توجه به معادله (۱۰-۵۹)

$$\dot{e} = (A - K_e C)e$$

معادله مشخصه مشاهده‌گر عبارت است از

$$|sI - A + K_e C| = 0$$



شکل ۷-۱۰ سیستم سرووی نوع ۱ با مشاهده گر حالت.

توجه کنید که اگر رتبه ماتریس زیر

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$n+1$  باشد، سیستم توصیف شده با معادله (۴۰-۱۰) کنترل پذیر حالت کامل است. (مسئله الف ۱۰-۱۲ را ببینید.)

معمولاً تمام متغیرهای حالت را نمی توان مستقیماً اندازه گرفت. در این صورت به یک مشاهده گر حالت نیاز داریم. شکل ۷-۱۰ نمودار بلوکی یک سیستم سرووی نوع ۱ با مشاهده گر حالت را نشان می دهد. [در این شکل هر بلوک دارای علامت انتگرال، یک انتگرالگیر با تابع تبدیل  $1/s$  است.] در بخش ۵-۱۰ راجع به مشاهده گر حالت به تفصیل صحبت خواهیم کرد.

#### مثال ۵-۱۰

سیستم کنترل آونگ وارون شکل ۸-۱۰ را در نظر بگیرید. در این مثال تنها با حرکت آونگ و ارابه در صفحه کاغذ سر و کار داریم.

می خواهیم تا حد ممکن آونگ را در وضعیت قائم نگه داریم و وضعیت ارابه را نیز کنترل کنیم، مثلاً به آن یک حرکت پله ای بدهیم. برای کنترل وضعیت ارابه باید یک سیستم سرووی نوع ۱ بسازیم. آونگ وارون سوار بر ارابه انتگرالگیر ندارد. بنابراین باید سیگنال وضعیت  $y$  (که وضعیت لحظه ای ارابه را نشان می دهد) به ورودی برگردانده شده، مطابق شکل ۹-۱۰ یک انتگرالگیر در مسیر پیشخورد گذاشته شود. فرض می کنیم زاویه آونگ  $\theta$  و سرعت زاویه ای آن  $\dot{\theta}$  کوچک است، به نحوی که  $\sin \theta \approx \theta$ ،  $\cos \theta \approx 1$  و  $\ddot{\theta} \approx 0$ .

مقادیر عددی به صورت زیر هستند

$$M = 2 \text{ kg}, \quad m = 0.1 \text{ kg}, \quad l = 0.5 \text{ m}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120/6 \\ 20 \end{bmatrix} y$$

سرانجام تذکر می‌دهیم که همانند حالت جایدی قطب، اگر مرتبه سیستم ۴ یا بزرگتر باشد، روشهای ۱ و ۳ ترجیح دارند، زیرا تمام محاسبات ماتریسی را می‌توان با کامپیوتر انجام داد، حال آن‌که روش ۲ همیشه مستلزم محاسبات دستی است، زیرا کامپیوتر نمی‌تواند با معادلات دارای پارامترهای مجهولی چون  $k_{e1}, \dots, k_{en}$  کار کند.

**اثر افزودن مشاهدهگر به سیستم حلقه بسته.** در مسئله جایدی قطب فرض کردیم حالت واقعی  $x(t)$  برای فیدبک مهیاست. ولی در عمل حالت واقعی  $x(t)$  ممکن است قابل اندازه‌گیری نباشد. بنابراین باید مشاهده‌گری طرح کنیم و حالت مشاهده شده  $\tilde{x}(t)$  را به صورت نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۲ برای فیدبک به کار ببریم. بنابراین فرایند طراحی دو مرحله دارد، مرحله اول تعیین ماتریس بهره فیدبک  $K$  برای داشتن معادله مشخصه مطلوب، و مرحله دوم تعیین ماتریس بهره مشاهدهگر  $K_e$  برای دستیابی به مشاهده‌گری با مشخصات مطلوب است.

حال می‌خواهیم اثر استفاده از حالت مشاهده شده  $\tilde{x}(t)$  به جای حالت واقعی  $x(t)$  بر معادله مشخصه سیستم کنترل حلقه بسته را بررسی کنیم.

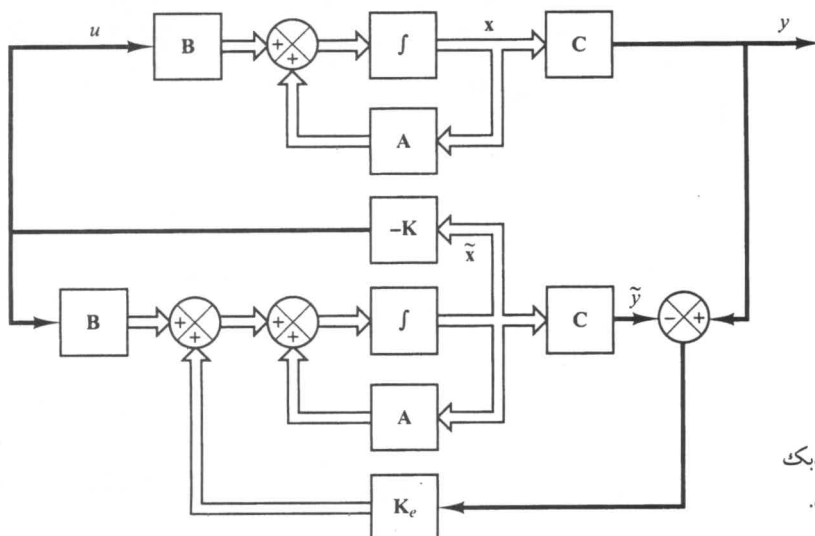
سیستم کنترل‌پذیر کامل و مشاهده پذیر کامل توصیف شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

برای کنترل فیدبک حالت، براساس حالت مشاهده شده  $\tilde{x}$  داریم

$$u = -K\tilde{x}$$



شکل ۱۰-۱۲

سیستم کنترل با فیدبک  
حالت مشاهده شده.

متغیرهای حالت  $x_1, x_2, x_3, x_4$  را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

با توجه به معادلات (۱۰-۴۵) و (۱۰-۴۶) و شکل ۱۰-۹، و در نظر گرفتن وضعیت ارا به  $x$  به عنوان خروجی، معادلات زیر را برای سیستم به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (۱۰-۴۷)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (۱۰-۴۸)$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I \xi \quad (۱۰-۴۹)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (۱۰-۵۰)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

معادله حالت خطا برای سیستمهای سرووی نوع ۱ مطابق معادله (۱۰-۴۰) است:

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \quad (۱۰-۵۱)$$

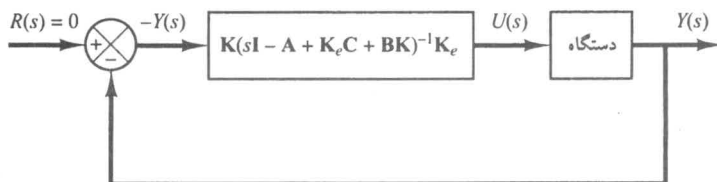
که در آن

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و سیگنال کنترل مطابق معادله (۱۰-۴۱) است:

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$



شکل ۱۰-۱۳ نمایش بلوکی سیستم دارای کنترل کننده - مشاهده گر.

از معادله (۷۱-۱۰) تبدیل لاپلاس می‌گیریم (شرایط اولیه را صفر می‌گیریم)

$$\tilde{X}(s) = (sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(s)$$

با گذاشتن این معادله در معادله (۷۲-۱۰) به دست می‌آوریم

$$U(s) = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(s) \quad (۷۳-۱۰)$$

پس تابع تبدیل  $U(s)/Y(s)$  عبارت است از

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e$$

شکل ۱۰-۱۳ نمایش بلوکی سیستم را نشان می‌دهد. توجه کنید که تابع تبدیل  $U(s)/[-Y(s)]$ ، یعنی  $K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e$  برای سیستم به عنوان کنترل کننده عمل می‌کند. به همین دلیل تابع تبدیل

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e \quad (۷۴-۱۰)$$

را تابع تبدیل کنترل کننده مبتنی بر مشاهده گر، یا به طور خلاصه، تابع تبدیل کنترل کننده - مشاهده گر می‌نامیم. توجه کنید که ماتریس مشاهده گر - کنترل کننده، یعنی

$$A - K_e C - BK$$

ممکن است پایدار باشد و ممکن است نباشد، گرچه  $A - BK$  و  $A - K_e C$  پایدار هستند. در واقع در بعضی موارد ماتریس  $A - K_e C - BK$  ممکن است به زحمت پایدار باشد یا اصلاً ناپایدار باشد.

یک سیستم تنظیم کننده برای دستگاه زیر طراحی کنید:

مثال ۷-۱۰

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۷۵-۱۰)$$

$$y = Cx \quad (۷۶-۱۰)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20/6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

می‌خواهیم قطبهای حلقه بسته در  $\mu_1 = -1/8 + j2/4$  و  $\mu_2 = -1/8 - j2/4$  قرار گیرند.

مشخصات پاسخ پله واحد سیستم طراحی شده. اکنون که ماتریس بهره فیدبک  $K$  و ثابت بهره انترالگیر  $k_I$  را تعیین کرده‌ایم، می‌توانیم پاسخ پله موقعیت ارا به را با حل معادله زیر به دست آوریم، معادله‌ای که با گذاشتن (۱۰-۴۹) در معادله (۱۰-۳۵) به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (10-53)$$

خروجی سیستم  $x_3(t)$  است، یا

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} r \quad (10-54)$$

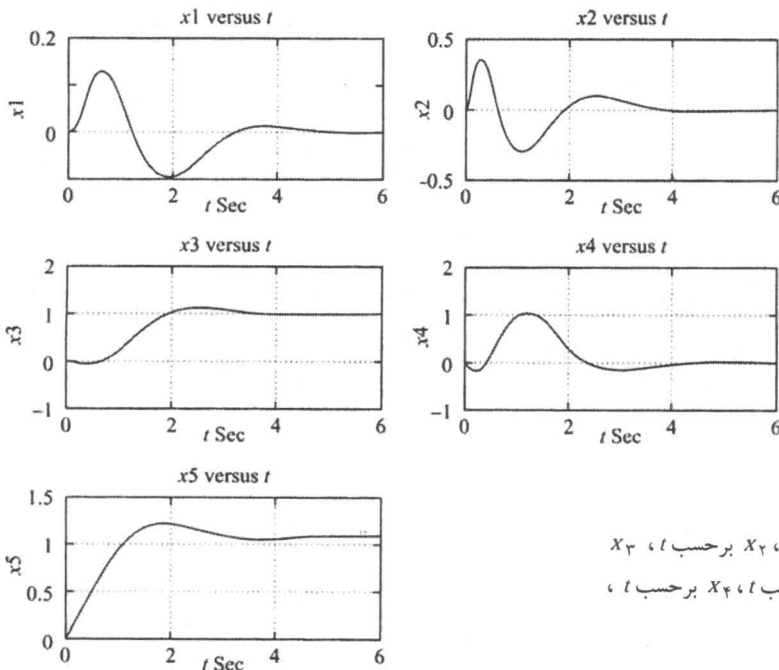
ماتریس حالت، ماتریس کنترل، ماتریس خروجی، و ماتریس انتقال مستقیم داده شده در معادلات (۱۰-۵۳) و (۱۰-۵۴) را به ترتیب  $AA$ ،  $BB$ ،  $CC$ ، و  $DD$  تعریف کنید. برنامه ۱۰-۷ را می‌توان برای یافتن منحنی‌های پاسخ پله سیستم طراحی شده به کار برد. توجه کنید که برای یافتن پاسخ پله واحد دستور زیر را به کار برده‌ایم

$$[y, x, t] = \text{step}(AA, BB, CC, DD, 1, t)$$

شکل ۱۰-۱۰ منحنی‌های  $x_1$  برحسب  $t$ ،  $x_2$  برحسب  $t$ ،  $x_3$  (خروجی) برحسب  $t$ ،  $x_4$  برحسب  $t$ ، و  $x_5$  برحسب  $t$  را نشان می‌دهد. توجه کنید که  $y(t) = x_3(t)$  تقریباً ۱۵٪ فراجش دارد و زمان نشست آن حدود ۴/۵ sec است.  $x_5(t) = \xi(t)$  به ۱/۱ میل می‌کند. این نتیجه را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

چون

$$\dot{x}(\infty) = 0 = Ax(\infty) + Bu(\infty)$$



شکل ۱۰-۱۰

منحنی‌های  $x_1$  برحسب  $t$ ،  $x_2$  برحسب  $t$ ،  $x_3$  (خروجی) برحسب  $t$ ،  $x_4$  برحسب  $t$ ، و  $x_5 = \xi(t)$  برحسب  $t$ .



$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$K_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20/6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84/6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84/6 \end{bmatrix} \quad (77-10)$$

معادله (۷۷-۱۰) ماتریس بهره مشاهده‌گر  $K_e$  را می‌دهد. معادله مشاهده‌گر با توجه به معادله (۶۰-۱۰) عبارت است از

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C) \tilde{x} + B u + K_e y \quad (78-10)$$

چون

$$u = -K \tilde{x}$$

معادله (۷۸-۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C - BK) \tilde{x} + K_e y$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20/6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29/6 & 3/6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84/6 \end{bmatrix} y$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93/6 & -3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84/6 \end{bmatrix} y$$

شکل ۱۰-۱۴ (الف) نمودار بلوکی سیستم دارای فیدبک حالت مشاهده‌شده را نشان می‌دهد. با توجه به معادله (۷۴-۱۰) تابع تبدیل کنترل‌کننده - مشاهده‌گر عبارت است از

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = K (sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e$$

$$= \begin{bmatrix} 29/6 & 3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+16 & -1 \\ 93/6 & s+3/6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 84/6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{777/2s + 3690/7}{s^2 + 19/6s + 151/2}$$

با MATLAB نیز می‌توان همین تابع تبدیل را به دست آورد. برای مثال برنامه ۱۰-۸ تابع تبدیل مشاهده‌گر - کنترل‌کننده را در حالتی که مشاهده‌گر کامل مرتبه است به دست می‌دهد. شکل ۱۰-۱۴ ب نمودار بلوکی این سیستم را نشان می‌دهد.

یا

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20/601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0/4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0/5 \end{bmatrix} u(\infty)$$

به دست می‌آوریم

$$u(\infty) = 0$$

چون  $u(\infty) = 0$ ، با توجه به معادله  $(10-33)$  داریم

$$u(\infty) = 0 = -Kx(\infty) + k_I \xi(\infty)$$

و در نتیجه

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I} [Kx(\infty)] = \frac{1}{k_I} [k_r x_r(\infty)] = \frac{-56/0652}{-50/9684} r = 1/1 \quad r$$

پس به ازای  $r=1$  داریم

$$\xi(\infty) = 1/1$$

باید توجه کنید که در هر مسئله طراحی اگر سرعت و میرایی کاملاً دلخواه نباشد، باید معادله مشخصه مطلوب اصلاح و ماتریس  $\hat{K}$  جدیدی تعیین شود. شبیه‌سازیهای کامپیوتری باید آنقدر تکرار شود تا نتایج رضایت‌بخشی به دست آید.

## ۱۰-۵ مشاهده‌گر حالت

در رهیافت جایدهی قطب فرض کردیم که تمام متغیرهای حالت برای فیدبک مهیا هستند. ولی در عمل تمام متغیرهای حالت برای فیدبک در دسترس نیستند. بنابراین باید متغیرهای حالت خارج از دسترس را برآورد کنیم. برآورد متغیرهای حالت غیرقابل اندازه‌گیری را معمولاً **مشاهده** می‌نامند. وسیله (یا برنامه کامپیوتری) تخمین زننده متغیر حالت را **مشاهده‌گر حالت**، یا به طور ساده‌تر **مشاهده‌گر**، می‌خوانند. اگر مشاهده‌گر تمام متغیرهای حالت سیستم را مشاهده کند، چه آنهایی که برای اندازه‌گیری مستقیم در دسترس‌اند و چه آنهایی که نیستند، آن را **مشاهده‌گر حالت کامل** - مرتبه می‌نامند. مواردی پیش می‌آید که چنین مشاهده‌گری لازم نیست، مثلاً وقتی بخواهیم تنها متغیرهای حالت غیرقابل اندازه‌گیری را مشاهده کنیم. برای مثال چون متغیرهای خروجی مشاهده‌پذیرند و با متغیرهای حالت رابطه خطی دارند، مشاهده تمام متغیرهای حالت ضروری نیست، بلکه تنها مشاهده  $n-m$  متغیر حالت کافی است؛  $n$  مرتبه بردار حالت و  $m$  مرتبه بردار خروجی است.

مشاهده‌گری که کمتر از  $n$  متغیر حالت را مشاهده می‌کند،  $n$  مرتبه بردار حالت است، **مشاهده‌گر حالت نازل** - مرتبه یا به طور ساده‌تر **مشاهده‌گر نازل** - مرتبه نامیده می‌شود. اگر رتبه مشاهده‌گر نازل - مرتبه کمترین رتبه ممکن باشد، آن را **مشاهده‌گر حالت می‌نیم** مرتبه یا به طور ساده‌تر **مشاهده‌گر می‌نیم** - مرتبه، می‌نامند. در این بخش درباره هر دو مشاهده‌گر کامل - مرتبه و می‌نیم - مرتبه صحبت خواهیم کرد.

رفتار دینامیکی سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده طرح شده در بالا را می‌توان با معادلات زیر توصیف کرد: برای دستگاه

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20/6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

برای مشاهده‌گر

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93/6 & -3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84/6 \end{bmatrix} y$$

$$u = -\begin{bmatrix} 29/6 & 3/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

سیستم کل مرتبه ۴ است. معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$|sI - A + BK| |sI - A + K_e C| = (s^2 + 3/6s + 9)(s^2 + 16s + 64)$$

$$= s^4 + 19/6s^3 + 130/6s^2 + 374/4s + 576 = 0$$

معادله مشخصه را می‌توان با توجه به نمودار بلوکی شکل ۱۰-۱۴ (ب) نیز به دست آورد. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{77/2s + 3690/7}{(s^2 + 19/6s + 151/2)(s^2 - 20/6) + 77/2s + 3690/7}$$

پس معادله مشخصه به صورت زیر است

$$(s^2 + 19/6s + 151/2)(s^2 - 20/6) + 77/2s + 3690/7$$

$$= s^4 + 19/6s^3 + 130/6s^2 + 374/4s + 576 = 0$$

صد البته معادله مشخصه نمایش فضای حالت سیستم و نمایش تابع تبدیلی سیستم یکی هستند.

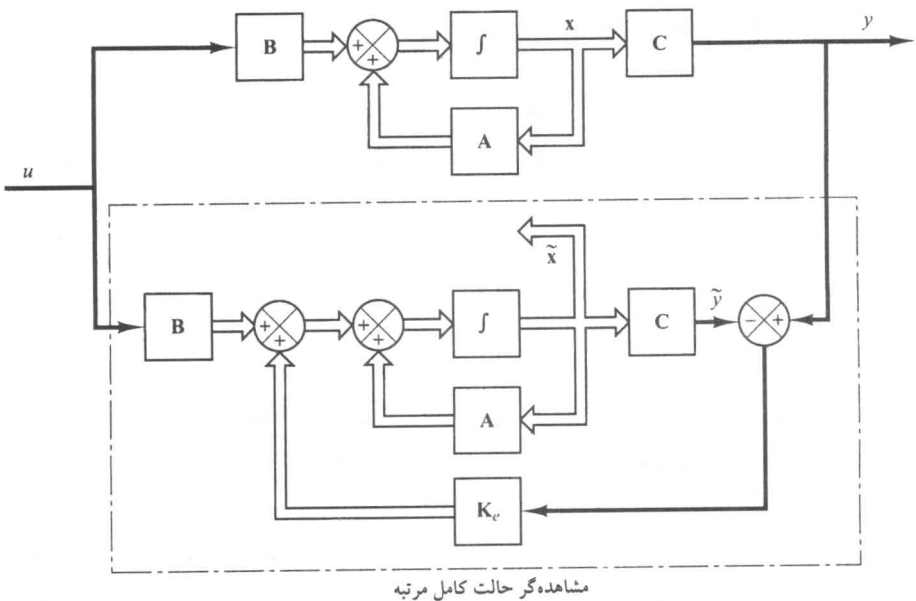
سرانجام پاسخ سیستم را به ازای شرایط اولیه زیر می‌یابیم

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 0/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله (۷۰-۱۰) پاسخ شرایط اولیه را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برنامه ۱۰-۹ یک برنامه MATLAB برای یافتن منحنی‌های پاسخ نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۵ می‌باشد.



شکل ۱۰-۱۱ نمودار بلوکی سیستم و مشاهده گر کامل - مرتبه در حالتی که ورودی  $u$  و خروجی  $y$  اسکالرند.

معادله (۱۰-۵۹) نشان می دهد که رفتار دینامیکی بردار خطای مشاهده گر توسط مقادیر ویژه ماتریس  $A - K_e C$  تعیین می شود. اگر ماتریس پایدار باشد، بردار خطا به ازای هر خطای اولیه  $e(0)$  به صفر همگرا می شود. یعنی به  $x(t)$  همگرا می شود، مستقل از این که  $x(0)$  و  $\tilde{x}(0)$  چه باشند. اگر مقادیر ویژه ماتریس  $A - K_e C$  را به نحوی برگزینیم که رفتار دینامیکی بردار خطا پایداری مجانبی داشته، به حد کافی سریع باشد، بردار خطا با سرعت کافی به صفر (مبدأ) میل می کند.

اگر سیستم مشاهده پذیر کامل باشد می توان ثابت کرد که ماتریس  $K_e$  را می توان به نحوی برگزید که  $A - K_e C$  مقادیر ویژه دلخواهی داشته باشد. یعنی ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  را می توان به نحوی تعیین کرد که  $A - K_e C$  ماتریس مطلوبی باشد. این مطلب را در زیر مورد بحث قرار می دهیم.

**مسئله همزاد.** مسئله طراحی مشاهده گر کامل - مرتبه چیزی نیست جز تعیین ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  برای پایدار بودن مجانبی رفتار دینامیکی خطا، تعریف شده با معادله (۱۰-۵۹) و داشتن پاسخی با سرعت کافی (پایداری مجانبی و سرعت پاسخ خطا، با مقادیر ویژه ماتریس  $A - K_e C$  تعیین می شود). پس طراحی مشاهده گر کامل - مرتبه به تعیین  $K_e$  مناسب برای این که  $A - K_e C$  مقادیر ویژه مطلوب را داشته باشد، می انجامد. پس این مسئله همان مسئله جایدهی قطب است که در بخش ۱۰-۲ مورد بررسی قرار گرفت. در واقع این دو مسئله ریاضی یکسان هستند. این ویژگی همزادی نام دارد.

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

**مشاهده گر می نیمم - مرتبه.** مشاهده گرهایی که تاکنون صحبتشان بود برای بازسازی تمام متغیرهای حالت به کار می رفتند. در عمل بعضی متغیرهای حالت را می توان دقیقاً اندازه گیری کرد. تخمین این متغیرهای دقیقاً اندازه گیری شده لازم نیست.

فرض کنید بردار حالت  $x$ ،  $n \times 1$  و بردار خروجی  $y$ ،  $m \times 1$  است، و بردار خروجی را می توان اندازه گیری کرد. چون  $m$  متغیر خروجی ترکیبی خطی از متغیرهای حالت هستند، تخمین  $m$  متغیر حالت ضروری نیست. تنها به برآورد  $n-m$  متغیر حالت نیاز داریم. بنابراین مشاهده گر نازل - مرتبه یک مشاهده گر مرتبه  $(n-m)$  ام است. این مشاهده گر مرتبه  $(n-m)$  ام، یک مشاهده گر می نیمم - مرتبه است. شکل ۱۰-۱۶ نمودار بلوکی سیستمی با مشاهده گر می نیمم - مرتبه را نشان می دهد.

البته توجه به این نکته مهم است که اگر اندازه گیری متغیرهای خروجی مستلزم نویز زیاد بوده، چندان دقیق نباشد، کاربرد مشاهده گر کامل - مرتبه سیستمی با عملکرد بهتر به همراه دارد.

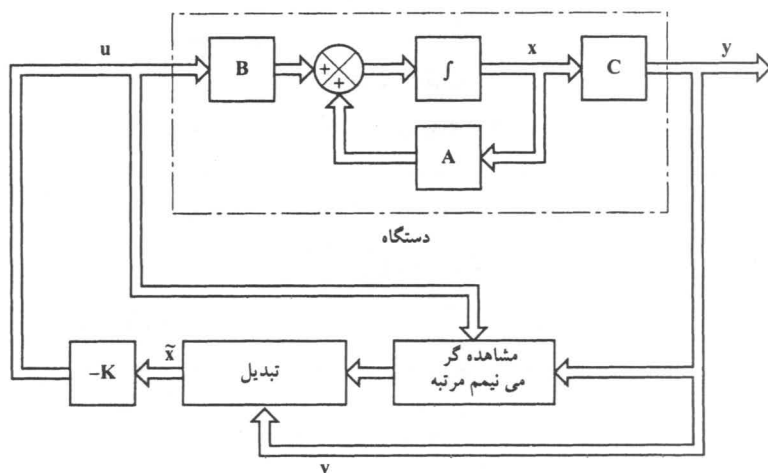
برای معرفی ایده اصلی مشاهده گر می نیمم - مرتبه، بدون پرداخت به پیچیدگیهای ریاضی، حالتی را در نظر می گیریم که خروجی اسکالر است (یعنی  $m=1$ ) و معادله حالت مشاهده گر می نیمم - مرتبه را به دست می آوریم.

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۷۹-۱۰)$$

$$y = Cx \quad (۸۰-۱۰)$$

که بردار حالت  $x$  آن را می توان دو بخش کرد،  $x_a$  (اسکالر) و  $x_b$  [بردار  $(n-1) \times 1$ ]. متغیر حالت  $x_a$  با خروجی برابر است، بنابراین قابل اندازه گیری است، ولی  $x_b$  بخش خارج از دسترس بردار حالت است. پس معادلات حالت و خروجی تقسیم شده عبارت اند از



شکل ۱۰-۱۶ سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده با مشاهده گر می نیمم - مرتبه.

طراحی کرد، به شرطی که دستگاه کاملاً مشاهده‌پذیر باشد. مقادیر ویژه مطلوب معادله مشخصه باید به نحوی انتخاب شوند که سرعت مشاهده‌گر حالت حداقل دو تا پنج برابر سرعت سیستم حلقه بسته باشد. همانطور که قبلاً گفتیم معادله مشاهده‌گر حالت کامل مرتبه عبارت است از

$$\dot{\bar{x}} = (A - K_e C)\bar{x} + B u + K_e y \quad (10-60)$$

گوشزد می‌کنیم که تا اینجا فرض کرده‌ایم ماتریس‌های  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  مشاهده‌گر دقیقاً همان ماتریس‌های دستگاه واقعی هستند. اگر بین  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  دستگاه و مشاهده‌گر تفاوت وجود داشته باشد، دیگر رفتار دینامیکی خطای مشاهده‌گر مطابق معادله (10-59) نیست. یعنی خطا ممکن است برخلاف انتظار به صفر نگراید. پس باید  $K_e$  را طوری برگزید که مشاهده‌گر به رغم خطاهای کوچک مدلسازی پایدار باشد و خطا کوچک بماند.

**روش تبدیل برای یافتن ماتریس بهره مشاهده‌گر.** با دنبال کردن همان مسیر به کار رفته برای یافتن معادلات ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  معادلات زیر را می‌یابیم:

$$K_e = Q \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (W N^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (10-61)$$

که در آن  $K_e$  یک ماتریس  $n \times 1$  است

$$Q = (W N^*)^{-1}$$

$$N = [C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*] \quad \text{و}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[معادله (10-61) در مسئله الف 10-10 به دست آمده است.]

**روش جایگذاری مستقیم برای یافتن ماتریس بهره مشاهده‌گر حالت.** همانند مسئله جایدهی قطب، اگر سیستم مرتبه پایین باشد، جایگذاری مستقیم ماتریس  $K_e$  در چندجمله‌ای مشخصه مطلوب راحتتر است. مثلاً اگر  $x$  یک بردار  $3 \times 1$  باشد، ماتریس بهره مشاهده‌گر  $K_e$  را به صورت زیر می‌نویسیم

$$K_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix}$$

این ماتریس  $K_e$  را در چندجمله‌ای مشخصه مطلوب قرار می‌دهیم

”معادله خروجی“ مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه به صورت زیر است

$$\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u = A_{ab} x_b$$

مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه را می‌توان به این صورت طرح کرد: ابتدا توجه کنید که معادله مشاهده‌گر کامل - مرتبه به صورت زیر، یعنی همان معادله (۵۷-۱۰) است:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C) \tilde{x} + B u + K_e y \quad (۸۵-۱۰)$$

با جایگذاری‌های مندرج در جدول ۱-۱۰، در معادله (۸۵-۱۰) به دست می‌آوریم

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{x}_b + A_{ba} x_a + B_b u + K_e (\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u) \quad (۸۶-۱۰)$$

که در آن ماتریس بهره مشاهده‌گر حالت  $K_e$  یک ماتریس  $(n-1) \times 1$  است. معادله (۸۶-۱۰) نشان می‌دهد که برای تخمین  $\tilde{x}_b$  به مشتق  $\dot{x}_a$  نیاز داریم. این امر مشکل ایجاد می‌کند، زیرا مشتگیری با تقویت‌نویز همراه است. اگر  $x_a$  (همان  $y$ ) نویز داشته باشد، نمی‌توان از مشتق آن استفاده کرد. برای پرهیز از این مشکل  $\dot{x}_a$  را به صورت زیر حذف می‌کنیم. ابتدا معادله (۸۶-۱۰) را به صورت زیر درمی‌آوریم

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{x}_b + (A_{ba} - K_e A_{aa}) y + (B_b - K_e B_a) u \\ &= (A_{bb} - K_e A_{ab}) (\tilde{x}_b - K_e y) + [(A_{bb} - K_e A_{ab}) K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}] y \\ &\quad + (B_b - K_e B_a) u \end{aligned} \quad (۸۷-۱۰)$$

تعریف می‌کنیم

$$x_b - K_e y = x_b - K_e x_a = \eta$$

و

$$\tilde{x}_b - K_e y = \tilde{x}_b - K_e x_a = \tilde{\eta} \quad (۸۸-۱۰)$$

جدول ۱-۱۰ جایگذاری‌های لازم برای نوشتن معادله مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه.

| مشاهده‌گر حالت می‌نیم - مرتبه                     | مشاهده‌گر حالت مرتبه                      |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\tilde{x}_b$                                     | $\tilde{x}$                               |
| $A_{bb}$                                          | $A$                                       |
| $A_{ba} x_a + B_b u$                              | $B u$                                     |
| $\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u$                  | $y$                                       |
| $A_{ab}$                                          | $C$                                       |
| $K_e [(n-1) \times 1]$ [ماتریس $1 \times (n-1)$ ] | $K_e (n \times 1)$ [ماتریس $1 \times n$ ] |

**توضیحاتی راجع به انتخاب بهترین  $K_e$ .** با توجه به شکل ۱۰-۱۱ می بینیم که سیگنال فیدبکی که ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  تولید می کند به عنوان سیگنال تصحیح کننده به کار می رود تا نقصان اطلاعات راجع به دستگاه کم اثر شود. اگر اطلاعات خیلی نقص داشته باشد، سیگنال فیدبک شده از طریق ماتریس  $K_e$  بزرگ می شود. اگر سیگنال خروجی  $y$  به شدت آلوده به نویز و اغتشاش باشد، این خروجی قابل اعتماد نیست و سیگنال فیدبک شده از طریق ماتریس  $K_e$  کوچک است. در تعیین ماتریس  $K_e$  باید اثر اغتشاش و نویزهای خروجی  $y$  به دقت بررسی شود.

به خاطر داشته باشید که ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  به معادله مشخصه دلخواه بستگی دارد

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) \dots (s - \mu_n) = 0$$

در بسیاری از حالات انتخاب  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  انتخابی یکتا نیست. ولی به عنوان یک قاعده کلی قطبهای مشاهده گر باید دو تا پنج مرتبه سریعتر از قطبهای کنترل کننده باشد تا خطای مشاهده (خطای برآورد) به سرعت به صفر بگراید. پس خطای برآورد مشاهده گر دو تا پنج مرتبه سریعتر از بردار حالت  $x$  به صفر می گراید. این سرعت بالاتر خطای مشاهده گر (در مقایسه با سیستم اصلی) باعث می شود پاسخ سیستم توسط قطبهای غالب کنترل کننده تعیین شود.

توجه به این نکته مهم است که اگر نویز سیستم زیاد باشد، ممکن است سرعت قطبهای مشاهده گر را نصف قطبهای کنترل کننده برگزینیم تا پهنای باند سیستم کمتر شده، نویز کاهش یابد. در این صورت پاسخ سیستم از قطبهای مشاهده گر به شدت تأثیر می پذیرد. اگر قطبهای مشاهده گر سمت راست قطبهای کنترل کننده قرار گیرند، قطبهای مشاهده گر قطب غالب سیستم می شوند، نه قطب کنترل کننده.

در طراحی مشاهده گر حالت بهتر است چند ماتریس بهره  $K_e$  براساس معادله مشخصه های متفاوت تعیین شود. به ازای هر ماتریس باید آزمایشهای شبیه سازی شده اجرا و عملکرد سیستم برآورده شود. در این صورت می توان بهترین  $K_e$  را براساس عملکرد کلی سیستم انتخاب کرد. در بسیاری از حالتها عملی انتخاب بهترین ماتریس  $K_e$  در واقع معادل ایجاد مصالحه ای بین سرعت پاسخ و حساسیت به اغتشاش و نویز است.

سیستم زیر را در نظر بگیرید

مثال ۱۰-۶

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 20/6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالت مشاهده شده را فیدبک می کنیم، یعنی

$$u = -K\bar{x}$$



که 0 یک بردار ردیفی مشتمل بر  $(n-1)$  صفر است. با تعریف

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n-1}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ - \\ e \end{bmatrix}$$

می توان  $\tilde{x}$  را به صورت زیر بر حسب  $\tilde{\eta}$  و  $y$  نوشت

$$\tilde{x} = \hat{C} \tilde{\eta} + \hat{D} y \quad (91-10)$$

این معادله تبدیل  $\tilde{\eta}$  به  $\tilde{x}$  را به دست می دهد.

شکل ۱۷-۱۰ نمودار بلوکی سیستم کنترل با فیدبک حالت مشاهده شده، با مشاهده گر می نیم - مرتبه را نشان می دهد که بر معادلات  $(79-10)$ ،  $(80-10)$ ،  $(90-10)$  و  $(91-10)$  و  $u = -K\tilde{x}$  مبتنی است.

حال معادله خطای مشاهده گر را به دست می آوریم. با استفاده از معادله  $(83-10)$  می توان معادله  $(86-10)$  را به صورت زیر درآورد

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{x}_b + A_{ba} x_a + B_b u + K_e A_{ab} x_b \quad (92-10)$$

معادله  $(92-10)$  را از معادله  $(84-10)$  کم می کنیم، و به دست می آوریم

$$\dot{\tilde{x}}_b - \tilde{\dot{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})(x_b - \tilde{x}_b) \quad (93-10)$$

با تعریف

$$e = x_b - \tilde{x}_b = \eta - \tilde{\eta}$$

معادله  $(93-10)$  به صورت زیر درمی آید

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab})e \quad (94-10)$$

این معادله خطای مشاهده گر می نیم - مرتبه است. دقت کنید که  $e$  یک بردار  $(n-1)$  تایی است. با دنبال کردن روشی که برای مشاهده گر کامل - مرتبه بیان شد می توان رفتار دینامیکی خطا را به دلخواه تعیین کرد، به شرطی که رتبه ماتریس زیر  $(n-1)$  باشد

$$\begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab} A_{bb} \\ \vdots \\ A_{ab} A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

(این شرط مشاهده پذیری کامل است که می توان آن را به مشاهده گر می نیم - مرتبه اعمال کرد).

معادله مشخصه مشاهده گر می نیم - مرتبه از معادله  $(94-10)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_{n-1}) \\ &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (95-10)$$

که  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  مقادیر ویژه مطلوب مشاهده گر می نیم - مرتبه هستند. برای تعیین ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  ابتدا مقادیر ویژه مطلوب را برمی گزینیم [یعنی ریشه های معادله مشخصه، معادله  $(95-10)$ ، را

با تعریف

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه به صورت زیر درمی آید:

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20/6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -20/6 + k_{e1} \\ -1 & s + k_{e2} \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + k_{e2}s - 20/6 + k_{e1} = 0 \quad (66-10)$$

معادله مشخصه مطلوب به صورت زیر است

$$s^2 + 20s + 100 = 0$$

مقایسه این معادله و معادله (۶۶-۱۰) نشان می دهد که

$$k_{e2} = 20, \quad k_{e1} = 120/6$$

یا

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 120/6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

روش ۳: از فرمول اگر من داده شده در معادله (۶۵-۱۰) استفاده می کنیم

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 20s + 100$$

پس

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 100\mathbf{I}$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= (\mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 100\mathbf{I}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 120/6 & 412 \\ 20 & 120/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120/6 \\ 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

البته از هر روشی که برویم همان  $\mathbf{K}_e$  را به دست می آوریم.

معادله مشاهده گر حالت کامل - مرتبه از معادله (۵۷-۱۰) به دست می آید:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

(جزییات در مسئله الف-۱۰-۱۱ عنوان شده است). قطبهای حلقه بسته سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده با مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه جمع قطبهای حلقه بسته ناشی از جایدی قطب [مقادیر ویژه ماتریس  $(A-BK)$ ] و قطبهای حلقه بسته ناشی از مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه [مقادیر ویژه ماتریس  $(A_{bb} - K_e A_{ab})$ ] است. بنابراین طراحی جایدی قطب و طراحی مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه از هم مستقل‌اند.

**تعیین ماتریس بهره مشاهده‌گر با MATLAB.** به خاطر همزادی جایدی قطب و طراحی مشاهده‌گر، یک الگوریتم را می‌توان برای هر دو مسئله جایدی قطب و مشاهده‌گر به کار برد. پس دستورهای `place` و `acker` را می‌توان برای تعیین ماتریس بهره  $K_e$  نیز به کار برد.

قطبهای حلقه بسته مشاهده‌گر مقادیر ویژه ماتریس  $A - K_e C$  است. قطبهای حلقه بسته جایدی قطب مقادیر ویژه ماتریس  $A - BK$  است.

با توجه به همزادی بین جایدی قطب و طراحی مشاهده‌گر می‌توان  $K_e$  را با در نظر گرفتن مسئله جایدی قطب مسئله همزاد تعیین کرد. یعنی باید  $K_e$  را برای قرار گرفتن مقادیر ویژه  $A^* - C^* K_e$  در محل‌های مطلوب به دست آورد. چون  $K_e = K^*$  برای مشاهده‌گر کامل مرتبه دستور زیر به کار برده می‌شود

$$K_e = \text{acker}(A', C', L')$$

که در آن  $L$  بردار مشتمل بر مقادیر ویژه مطلوب است. به نحوی مشابه برای مشاهده‌گر کامل مرتبه می‌توان دستور زیر را به کار برد

$$K_e = \text{place}(A', C', L')$$

به شرطی که  $L$  قطب مکرر نداشته باشد. [در دستورهای بالا پریم ('') ترانهاده ماتریس را به دست می‌دهد]. برای مشاهده‌گر می‌نیم مرتبه (یا نازل مرتبه) دستورهای زیر به کار برده می‌شود:

$$K_e = \text{acker}(Abb', Aab', L')$$

یا

$$K_e = \text{palce}(Abb', Aab', L')$$

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

فرض کنید می‌خواهیم قطبهای سیستم حلقه بسته را در محل‌های زیر قرار دهیم

$$s_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad s_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad s_3 = -6$$

مثال ۸-۱۰

با این کنترل معادله حالت به صورت زیر درمی آید

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} - BK\bar{x} = (A - BK)\bar{x} + BK(x - \bar{x}) \quad (۶۷-۱۰)$$

تفاضل حالت واقعی  $x(t)$  و حالت مشاهده شده  $\bar{x}(t)$  را به عنوان خطا  $e(t)$  تعریف می کنیم

$$e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$$

با گذاشتن بردار خطا  $e(t)$  در معادله (۶۷-۱۰) به دست می آوریم

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe \quad (۶۸-۱۰)$$

معادله خطای مشاهده کننده در معادله (۵۹-۱۰) داده شده است، که در زیر تکرار می شود

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \quad (۶۹-۱۰)$$

با ترکیب معادلات (۶۸-۱۰) و (۶۹-۱۰) به دست می آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ e \end{bmatrix} \quad (۷۰-۱۰)$$

معادله (۷۰-۱۰) رفتار دینامیکی سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده را توصیف می کند. معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$|sI - A - BK| |sI - A - K_e C| = 0$$

توجه کنید که قطبهای حلقه بسته سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده، مجموع قطبهای طراحی جایدهی قطب و طراحی مشاهده گر است. این طراحی را می توان به طور مجزا انجام داد و سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده را ساخت، توجه کنید اگر دستگاه مرتبه  $n$  باشد، مشاهده گر نیز مرتبه  $n$  است (در صورت استفاده از مشاهده گر کامل - مرتبه) و معادله مشخصه کل سیستم حلقه بسته مرتبه  $2n$  است.

**تابع تبدیل کنترل کننده مبتنی بر مشاهده گر.** سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

فرض کنید سیستم مشاهده پذیر کامل است، ولی  $x$  قابل اندازه گیری مستقیم نیست. فرض کنید کنترل فیدبک حالت مشاهده شده  $u = -K\bar{x}$  به کار رفته است. پس معادلات مشاهده گر عبارت اند از

$$\dot{\bar{x}} = (A - K_e C - BK)\bar{x} + K_e y \quad (۷۱-۱۰)$$

$$u = -K\bar{x} \quad (۷۲-۱۰)$$

معادله (۷۱-۱۰) با گذاشتن  $u = -K\bar{x}$  در معادله (۵۷-۱۰) به دست آمده است.

**MATLAB Program 10-10**

```

A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B = [0; 0; 1];
J = [-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3) -6];
K = acker(A,B,J)

K =

    90.0000    29.0000     4.0000

Abb = [0 1; -11 -6];
Aab = [1 0];
L = [-10 -10];
Ke = acker(Abb',Aab',L)'

Ke =

    14
     5

```

با توجه به معادلات (۸۸-۱۰) و (۸۹-۱۰) معادله مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\dot{\tilde{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a) u \quad (۱۰۰-۱۰)$$

که در آن

$$\tilde{\eta} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{x}_1$$

چون

$$\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه، معادله (۱۰۰-۱۰) به صورت در می‌آید

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_1 \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right\} y + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right\} u$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_1 \\ \dot{\tilde{\eta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -191 \\ -260 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_e y$$

یا

به روش جابدهی قطب عمل می‌کنیم و ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را به صورت زیر می‌یابیم

$$K = [29.6 \quad 3.6]$$

به ازای این ماتریس بهره فیدبک حالت، سیگنال کنترل  $u$  به صورت زیر است

$$u = -Kx = -[29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید به جای فیدبک حالت، فیدبک حالت مشاهده شده را به کار برده‌ایم، یعنی

$$u = -K\tilde{x} = -[29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس بهره مشاهده‌گر طوری انتخاب شده است که مقادیر ویژه زیر را داشته باشد

$$s = -8, \quad s = -8$$

ماتریس بهره مشاهده‌گر  $K_e$  را یافته، نمودار بلوکی سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده را رسم می‌کنیم. سپس تابع تبدیل کنترل کننده - مشاهده‌گر  $U(s)/[-Y(s)]$  را یافته، نمودار بلوکی سیستم را رسم می‌کنیم. سرانجام پاسخ سیستم به شرایط اولیه زیر را به دست می‌آوریم

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e(0) = x(0) - \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای سیستم توصیف شده با معادله  $(10-75)$ ، معادله مشخصه عبارت است از

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6s = s^2 + a_1s + a_2$$

پس

$$a_2 = -20.6, \quad a_1 = 0$$

معادله مشخصه مطلوب مشاهده‌گر عبارت است از

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64 \\ = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2$$

$$\alpha_2 = 64, \quad \alpha_1 = 16$$

پس

برای تعیین ماتریس بهره مشاهده‌گر معادله  $(10-61)$  را به کار می‌بریم.

$$K_e = (WN^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$N = [C^* \mid A^*C^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانند روش به کار رفته برای اشتقاق معادله (۹۰-۱۰) تعریف می کنیم.

$$\hat{A} = A_{bb} - K_e A_{ab}$$

$$\hat{B} = \hat{A} K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}$$

$$\hat{F} = B_b - K_e B_a$$

بنابراین سه معادله زیر مشاهده گر می نیمم - مرتبه را تعریف می کنند.

$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{A} \tilde{\eta} + \hat{B} y + \hat{F} u \quad (101-10)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{x}_b - K_e y \quad (102-10)$$

$$u = -K \tilde{x} \quad (103-10)$$

چون معادله (۱۰۳-۱۰) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} u = -K \tilde{x} &= -[K_a \quad K_b] \begin{bmatrix} y \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} = -K_a y - K_b \tilde{x}_b \\ &= -K_b \tilde{\eta} - (K_a + K_b K_e) y \end{aligned} \quad (104-10)$$

با گذاشتن معادله (۱۰۴-۱۰) در معادله (۱۰۱-۱۰) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= \hat{A} \tilde{\eta} + \hat{B} y + \hat{F} [-K_b \tilde{\eta} - (K_a + K_b K_e) y] \\ &= (\hat{A} - \hat{F} K_b) \tilde{\eta} + [\hat{B} - \hat{F} (K_a + K_b K_e)] y \end{aligned} \quad (105-10)$$

تعریف می کنیم

$$\tilde{A} = \hat{A} - \hat{F} K_b$$

$$\tilde{B} = \hat{B} - \hat{F} (K_a + K_b K_e)$$

$$\tilde{C} = -K_b$$

$$\tilde{D} = -(K_a + K_b K_e)$$

بنابراین معادلات (۱۰۵-۱۰) و (۱۰۴-۱۰) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\dot{\tilde{\eta}} = \tilde{A} \tilde{\eta} + \tilde{B} y \quad (106-10)$$

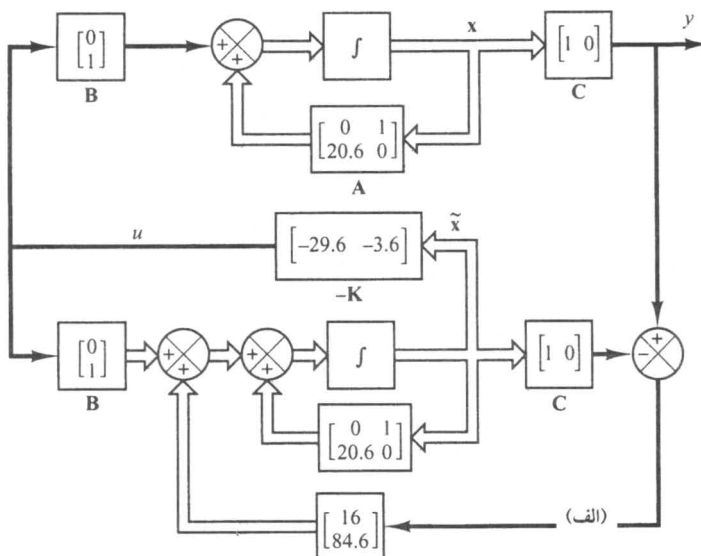
$$u = \tilde{C} \tilde{\eta} + \tilde{D} y \quad (107-10)$$

معادلات (۱۰۶-۱۰) و (۱۰۷-۱۰) کنترل کننده مبتنی بر مشاهده گر می نیمم - مرتبه را تعریف می کنند. اگر  $u$  را خروجی و  $y$  را ورودی در نظر بگیریم، می توانیم  $U(s)$  را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} U(s) &= [\tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}] Y(s) \\ &= -[\tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}] [-Y(s)] \end{aligned}$$

چون ورودی کنترل کننده مشاهده گر  $-Y(s)$  است نه  $Y(s)$ ، تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده گر عبارت است از

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = -[\tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}] \quad (108-10)$$



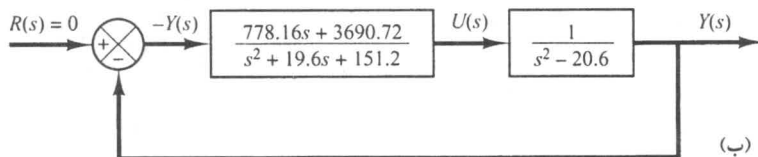
شکل ۱۰-۱۴

(الف) نمودار بلوکی سیستم

دارای فیدبک حالت مشاهده

شده. (ب) نمودار بلوکی

سیستم به صورت تابع تبدیل.



(ب)

**MATLAB Program 10-8**

% Obtaining transfer function of observer controller --- full-order observer

A = [0 1;20.6 0];

B = [0;1];

C = [1 0];

K = [29.6 3.6];

Ke = [16;84.6];

AA = A-Ke\*C-B\*K;

BB = Ke;

CC = K;

DD = 0;

[num,den] = ss2tf(AA,BB,CC,DD)

num =

1.0e+003\*

0 0.7782 3.6907

den =

1.0000 19.6000 151.2000



گام اول طراحی: نمایش فضای حالت دستگاه را به دست می آوریم. چون تابع تبدیل دستگاه به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

معادله دیفرانسیل متناظر با آن عبارت است از

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 24y = 10\dot{u} + 20u$$

با توجه به بخش ۵-۲ متغیرهای حالت  $x_1$ ،  $x_2$ ، و  $x_3$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

همچنین  $\dot{x}_3$  عبارت است از

$$\dot{x}_3 = -a_2 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_1 + \beta_2 u$$

$$= -24x_2 - 10x_3 + \beta_2 u$$

که در آن  $\beta_0 = 0$ ،  $\beta_1 = 0$ ،  $\beta_2 = 10$  و  $\beta_3 = -80$ .

برای محاسبه مقادیر  $\beta$  از معادله (۳۵-۲) استفاده شده است. پس معادله حالت و معادله خروجی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

گام دوم طراحی: به عنوان اولین سعی محل مطلوب قطبهای حلقه بسته را به صورت زیر برمی گزینیم

$$s = -5, \quad s = -1 - j2, \quad s = -1 + j2$$

و قطبهای مطلوب مشاهدهگر را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$s = -10, \quad s = -10$$

گام سوم طراحی: برای محاسبه ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  و ماتریس بهره مشاهدهگر  $K_e$  از MATLAB استفاده می کنیم. برنامه ۱۰-۱۱ ماتریس های  $K$  و  $K_e$  را به دست می دهد.

## MATLAB Program 10-9

```

A = [0 1; 20.6 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
K = [29.6 3.6];
Ke = [16; 84.6];
sys = ss([A-B*K B*K; zeros(2,2) A-Ke*C],eye(4),eye(4),eye(4));
t = 0:0.01:4;
z = initial(sys,[1;0;0.5;0],t);
x1 = [1 0 0 0]*z';
x2 = [0 1 0 0]*z';
e1 = [0 0 1 0]*z';
e2 = [0 0 0 1]*z';

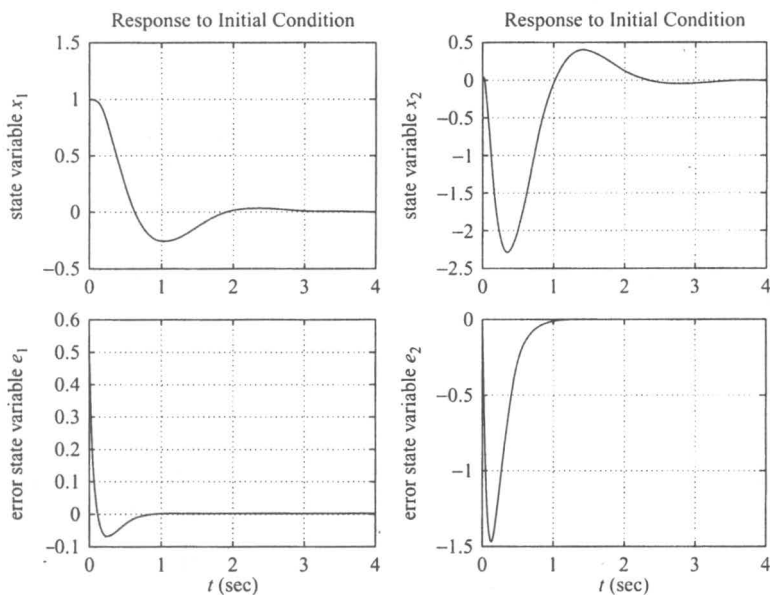
subplot(2,2,1); plot(t,x1),grid
title('Response to Initial Condition')
ylabel('state variable x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2),grid
title('Response to Initial Condition')
ylabel('state variable x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e1),grid
xlabel('t (sec)'), ylabel('error state variable e1')

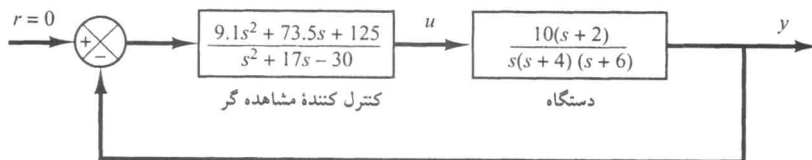
subplot(2,2,4); plot(t,e2),grid
xlabel('t (sec)'), ylabel('error state variable e2')

```



شکل ۱۰-۱۵

منحنی‌های پاسخ به  
شرایط اولیه.



شکل ۱۰-۲۰ نمودار بلوکی سیستم ۱.

**MATLAB Program 10-12**

```
% Determination of transfer function of observer controller
```

```
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -24 -10];
```

```
B = [0; 10; -80];
```

```
Aaa = 0; Aab = [1 0]; Aba = [0; 0]; Abb = [0 1; -24 -10];
```

```
Ba = 0; Bb = [10; -80];
```

```
Ka = 1.25; Kb = [1.25 0.19375];
```

```
Ke = [10; -24];
```

```
Ahat = Abb - Ke*Aab;
```

```
Bhat = Ahat*Ke + Aba - Ke*Aaa;
```

```
Fhat = Bb - Ke*Ba;
```

```
Atilde = Ahat - Fhat*Kb;
```

```
Btilde = Bhat - Fhat*(Ka + Kb*Ke);
```

```
Ctilde = -Kb;
```

```
Dtilde = -(Ka + Kb*Ke);
```

```
[num,den] = ss2tf(Atilde, Btilde, -Ctilde, -Dtilde)
```

```
num =
```

```
9.1000 73.5000 125.0000
```

```
den =
```

```
1.0000 17.0000 -30.0000
```

کنترل کننده مشاهده گر یک قطب در نیم صفحه راست دارد ( $s = 1/6119$ ). وجود یک قطب حلقه باز در نیم صفحه راست در کنترل کننده مشاهده گر به معنی ناپایدار بودن سیستم حلقه باز است، گرچه سیستم حلقه بسته پایدار است. پایداری سیستم حلقه بسته را می توان با توجه به معادله مشخصه زیر نشان داد

$$|sI - A + BK| \cdot |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| = s^5 + 27s^4 + 255s^3 + 1025s^2 + 2000s + 2500 \\ = (s+1+j2)(s+1-j2)(s+5)(s+10)(s+10) = 0$$

(معادله مشخصه توسط برنامه ۱۰-۱۳ MATLAB تعیین شده است.)

عیب استفاده از کنترل کننده ناپایدار این است که اگر بهره dc سیستم کوچک شود، سیستم ناپایدار می شود. چنین سیستم کنترلی نه مطلوب و نه قابل قبول است. پس برای دستیابی به سیستمی قابل قبول باید محل مطلوب قطبهای حلقه بسته و / یا قطبهای مشاهده گر را تغییر دهیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \quad (۸۱-۱۰)$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (۸۲-۱۰)$$

که در آن  $A_{aa}$  اسکالر

$$A_{ab} = \text{ماتریس } 1 \times (n-1)$$

$$A_{ba} = \text{ماتریس } (n-1) \times 1$$

$$A_{bb} = \text{ماتریس } (n-1) \times (n-1)$$

$$B_a = \text{اسکالر}$$

$$B_b = \text{ماتریس } 1 \times (n-1)$$

با توجه به معادله (۸۱-۱۰) معادله بخش اندازه‌گیری شده حالت عبارت است از

$$\dot{x}_a = A_{aa} x_a + A_{ab} x_b + B_a u$$

یا

$$\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u = A_{ab} x_b \quad (۸۳-۱۰)$$

جملات سمت چپ معادله (۸۳-۱۰) قابل اندازه‌گیری‌اند. معادله (۸۳-۱۰) به عنوان معادله خروجی عمل می‌کند. در طراحی مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه سمت چپ معادله (۸۳-۱۰) را مقدار معلوم فرض می‌کنیم. پس معادله (۸۳-۱۰) کمیات قابل اندازه‌گیری را به کمیات غیرقابل اندازه‌گیری حالت ربط می‌دهد.

با توجه به معادله (۸۱-۱۰)، معادله بخش اندازه‌گیری نشده حالت به صورت زیر است

$$\dot{x}_b = A_{ba} x_a + A_{bb} x_b + B_b u \quad (۸۴-۱۰)$$

با توجه به این که جملات  $A_{ba} x_a$  و  $B_b u$  کمیات معلوم‌اند، معادله (۸۴-۱۰) رفتار دینامیکی بخش اندازه‌گیری نشده حالت را توصیف می‌کند.

در زیر روشی برای طراحی مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه ارائه می‌کنیم. با استفاده از روش طراحی به کار رفته برای طراحی مشاهده‌گر کامل - مرتبه، کار طراحی مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه را می‌توان ساده کرد.

معادله حالت مشاهده‌گر کامل - مرتبه را با مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه مقایسه می‌کنیم. معادله حالت مشاهده‌گر کامل - مرتبه عبارت است از

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

و معادله حالت مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه عبارت است از

$$\dot{x}_b = A_{bb} x_b + A_{ba} x_a + B_b u$$

معادله خروجی مشاهده‌گر کامل - مرتبه به صورت زیر است

$$y = Cx$$

**MATLAB Program 10-14**

% Determination of transfer function of observer controller.

A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -24 -10];

B = [0; 10; -80];

Aaa = 0; Aab = [1 0]; Aba = [0; 0]; Abb = [0 1; -24 -10];

Ba = 0; Bb = [10; -80];

Ka = 1.25; Kb = [1.25 0.19375];

Ke = [-1; 6.25];

Ahat = Abb - Ke\*Aab;

Bhat = Ahat\*Ke + Aba - Ke\*Aaa;

Fhat = Bb - Ke\*Ba;

Atilde = Ahat - Fhat\*Kb;

Btilde = Bhat - Fhat\*(Ka + Kb\*Ke);

Ctilde = -Kb;

Dtilde = -(Ka + Kb\*Ke);

[num,den] = ss2tf(Atilde,Btilde,-Ctilde,-Dtilde)

num =

1.2109 11.2125 25.3125

den =

1.0000 6.0000 2.1406

معادله خطا برای مشاهدهگر می‌نیم - مرتبه عبارت است از

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab}) e \quad (10-111)$$

با ترکیب معادلات (10-110) و (111-110) به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_b \\ 0 & A_{bb} - K_e A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

که شرایط اولیه آن به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برنامه ۱۵-۱۰ پاسخ سیستم به شرایط اولیه را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ در شکل ۱۰-۲۱ نشان داده شده است؛ این پاسخ قابل قبول به نظر می‌آید.

اکنون به بررسی مشخصات پاسخ فرکانسی می‌پردازیم. نمودار بوده حلقه باز سیستم در شکل ۱۰-۲۲ نشان داده شده است. حاشیه فاز حدود  $40^\circ$  و حاشیه بهره  $+\infty$  است. نمودار بوده سیستم حلقه بسته در شکل

پس معادله (۱۰-۸۷) به صورت زیر درمی آید

$$\dot{\tilde{\eta}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \tilde{\eta} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}] y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a) u \quad (۱۰-۸۹)$$

تعریف می کنیم

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{aa}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e \mathbf{B}_a$$

پس معادله (۱۰-۸۹) به صورت زیر درمی آید

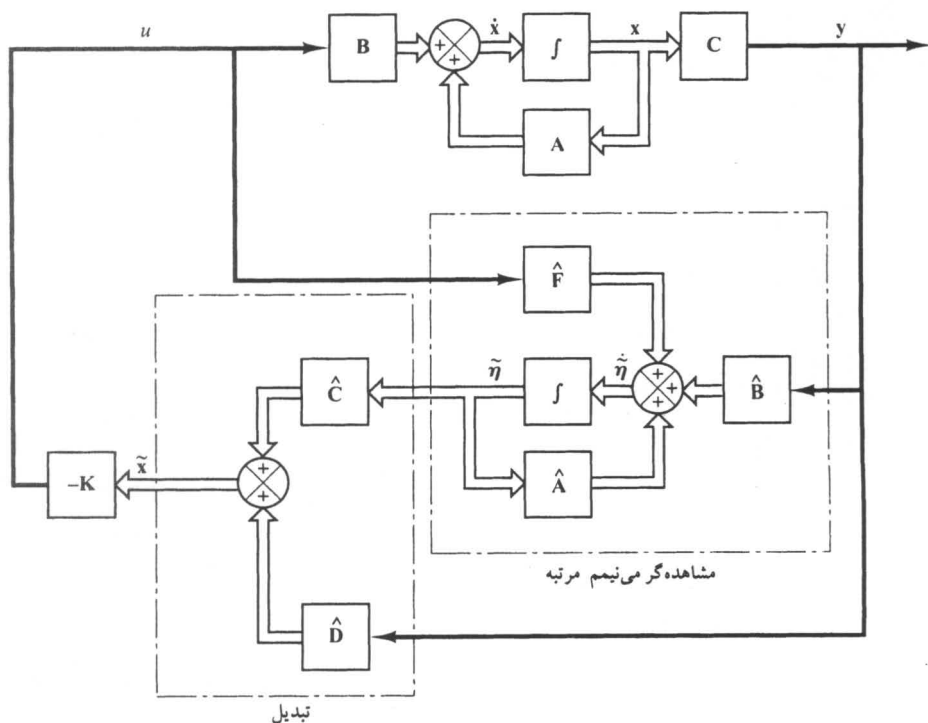
$$\dot{\tilde{\eta}} = \hat{\mathbf{A}} \tilde{\eta} + \hat{\mathbf{B}} y + \hat{\mathbf{F}} u \quad (۱۰-۹۰)$$

معادلات (۱۰-۹۰) و (۱۰-۸۸) مشاهده گر می نیمم مرتبه را تعریف می کند

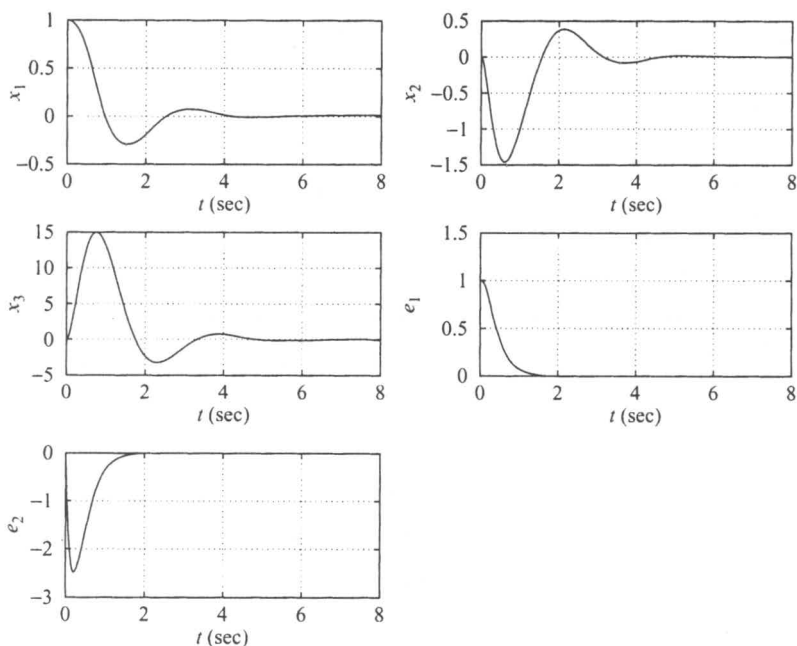
چون

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_a}{s} \\ \frac{x_b}{s} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{x_a}{s} \\ \frac{x_b}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{s} \\ \frac{\tilde{x}_b}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{K}_e \end{bmatrix} y$$

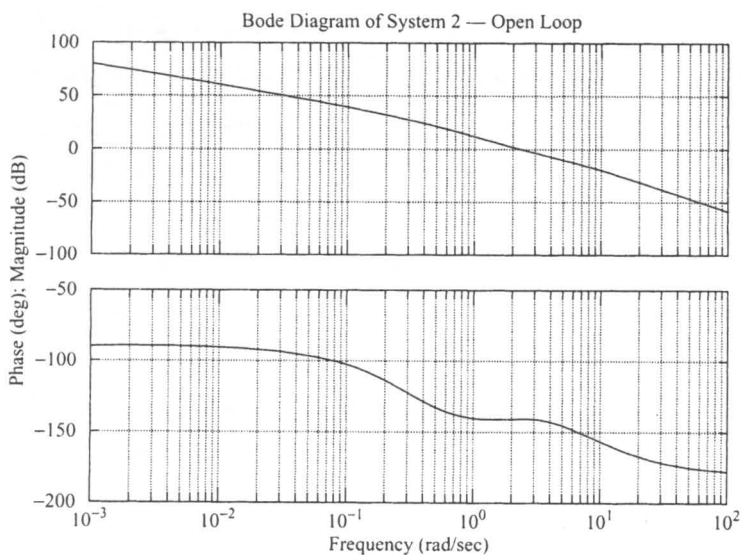


شکل ۱۰-۱۷ سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده که در آن مشاهده گر می نیمم - مرتبه است.



شکل ۱۰-۲۱

پاسخ سیستم به شرایط اولیه  $x_1(0)=1$ ،  $x_2(0)=0$ ،  $x_3(0)=0$ ،  $e_1(0)=1$ ،  $e_2(0)=0$ .



شکل ۱۰-۲۲

نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز سیستم ۲.

در محلهای دلخواه قرار می‌دهیم] و سپس روشی را که در مورد مشاهده‌گر کامل - مرتبه به کار می‌بریم، با اصلاحات لازم به کار می‌بریم. برای مثال اگر بخواهیم برای تعیین ماتریس  $K_e$  معادله (۱۰-۶۱) را به کار ببریم، باید ابتدا آن را به صورت زیر اصلاح کنیم

$$K_e = \hat{Q} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{W} \hat{N}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۹۶)$$

که در آن  $K_e$  یک ماتریس  $(n-1) \times 1$  است و

$$\hat{N} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{A}_{ab}^* & \mathbf{A}_{bb}^* \mathbf{A}_{ab}^* & \dots & (\mathbf{A}_{bb}^*)^{n-2} & \mathbf{A}_{ab}^* \end{array} \right] = (n-1) \times (n-1) \text{ ماتریس}$$

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-3} & \dots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (n-1) \times (n-1) \text{ ماتریس}$$

$\hat{a}_{n-2}, \dots, \hat{a}_2, \hat{a}_1$  ضرایب معادله مشخصه معادله حالت هستند

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \dots + \hat{a}_{n-2} s + \hat{a}_{n-1} = 0$$

همچنین اگر بخواهیم از فرمول اکرم، معادله (۱۰-۶۵)، استفاده کنیم باید آن را به شکل زیر درآوریم

$$K_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{n-2} \\ \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۹۷)$$

که در آن

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \dots + \hat{\alpha}_{n-2} \mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1} \mathbf{I}$$

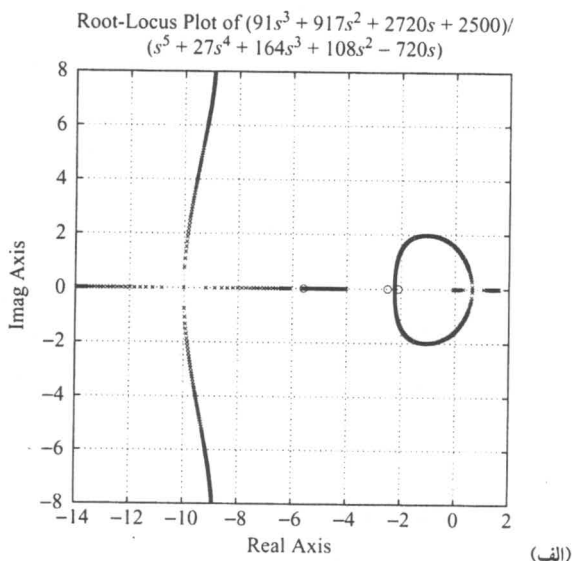
سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده با مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه. نشان دادیم که در سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده با مشاهده‌گر کامل مرتبه، قطبهای حلقه بسته مجموعه قطبهای طراحی جایدهی قطب و قطبهای مشاهده‌گر است. بنابراین طراحی جایدهی قطب و طراحی مشاهده‌گر کامل - مرتبه مستقل از هم هستند.

برای سیستم کنترل فیدبک حالت مشاهده شده، با مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه نیز همان نتیجه معتبر است.

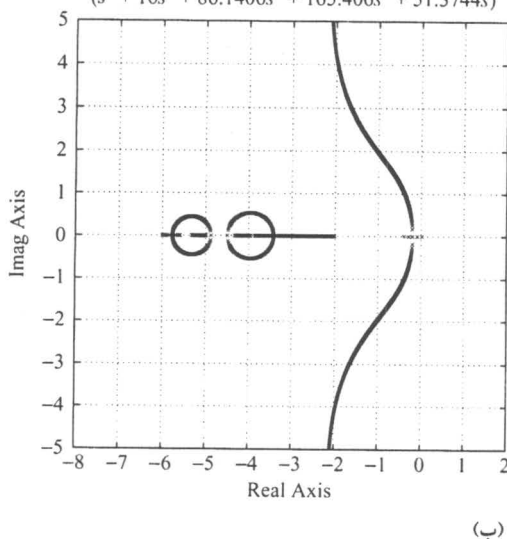
می‌توان نشان داد که معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| \quad |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}| = 0 \quad (۱۰-۹۸)$$





Root-Locus Plot of  $(12.109s^3 + 136.343s^2 + 477.375s + 506.25)/(s^5 + 16s^4 + 86.1406s^3 + 165.406s^2 + 51.3744s)$



شکل ۱۰-۲۴

(الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم با مشاهدهگری با قطبهای واقع در  $s = -10$  و  $s = -10$ . (ب) مکان هندسی ریشه‌های سیستم با مشاهدهگری با قطبهای واقع در  $s = -4/5$  و  $s = -4/5$ .

## ۷-۱۰ طراحی سیستمهای کنترل با مشاهدهگر

در بخش ۱۰-۶ طراحی سیستمهای تنظیم‌کننده با مشاهدهگر را بررسی کردیم. (این سیستمها ورودی مرجع یا فرمان ندارند) در این بخش طراحی سیستمهای کنترل با مشاهدهگر را هنگامی که سیستم ورودی مرجع یا ورودی فرمان دارد، در نظر می‌گیریم. خروجی سیستم کنترل باید ورودی را، که متغیر با زمان است، دنبال کند.

پس ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را می توان به صورت زیر یافت

$$K = [90 \quad 29 \quad 4]$$

(برنامه MATLAB ۱۰-۱۰ را برای دیدن چگونگی انجام این کار با MATLAB ببینید.)

حال فرض کنید خروجی  $y$  را می توان دقیقاً اندازه گرفت. پس لازم نیست متغیر حالت  $x_1$  را (که با  $y$  برابر است) تخمین زد. یک مشاهده گر می نیمم - مرتبه طرح کنید. (مشاهده گر می نیمم - مرتبه دارای مرتبه دو است.) می خواهیم مقادیر ویژه مشاهده گر می نیمم - مرتبه به صورت زیر باشد

$$s = -10, \quad s = -10$$

با توجه به معادله (۹۵-۱۰) معادله مشخصه مشاهده گر می نیمم - مرتبه عبارت است از

$$\begin{aligned} |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \\ &= (s + 10)(s + 10) = s^2 + 20s + 100 = 0 \end{aligned}$$

برای یافتن  $K_e$  از فرمول اکرمین، معادله (۹۷-۱۰) استفاده می کنیم.

$$K_e = \phi(A_{bb}) \left[ \frac{A_{ab}}{A_{ab} A_{bb}} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (99-10)$$

که در آن

$$\phi(A_{bb}) = A_{bb}^T + \hat{\alpha}_1 A_{bb} + \hat{\alpha}_2 I = A_{bb}^T + 20 A_{bb} + 100 I$$

چون

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \bar{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$A_{aa} = 0, \quad A_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_a = 0, \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون معادله (۹۹-۱۰) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} K_e &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 89 & 14 \\ -154 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(برنامه ۱۰-۱۰ چگونگی محاسبه  $K_e$  به کمک MATLAB را نشان می دهد.)

به دست می‌آوریم

$$\ddot{y} + \dot{y} = u$$

متغیرهای حالت را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}$$

و به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

که در آن ۱

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

سپس قطبهای مطلوب حلقه بسته را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$s = -1 + j, \quad s = -1 - j, \quad s = -8$$

و قطبهای مشاهده‌گر را به صورت زیر می‌گیریم

$$s = -4, \quad s = -4$$

ماتریس بهره فیدبک حالت  $\mathbf{K}$  و ماتریس بهره مشاهده‌گر  $\mathbf{K}_e$  را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\mathbf{K} = [16 \ 17 \ 10]$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

برنامه ۱۰-۱۶ را ببینید.

#### MATLAB Program 10-16

```
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -1 0];
```

```
B = [0; 0; 1];
```

```
J = [-1+j -1-j -8];
```

```
K = acker(A,B,J)
```

```
K =
```

```
16 17 10
```

```
Aab = [1 0];
```

```
Abb = [0 1; -1 0];
```

```
L = [-4 -4];
```

```
Ke = acker(Abb',Aab',L)'
```

```
Ke =
```

```
8
```

```
15
```

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + K_e x_1$$

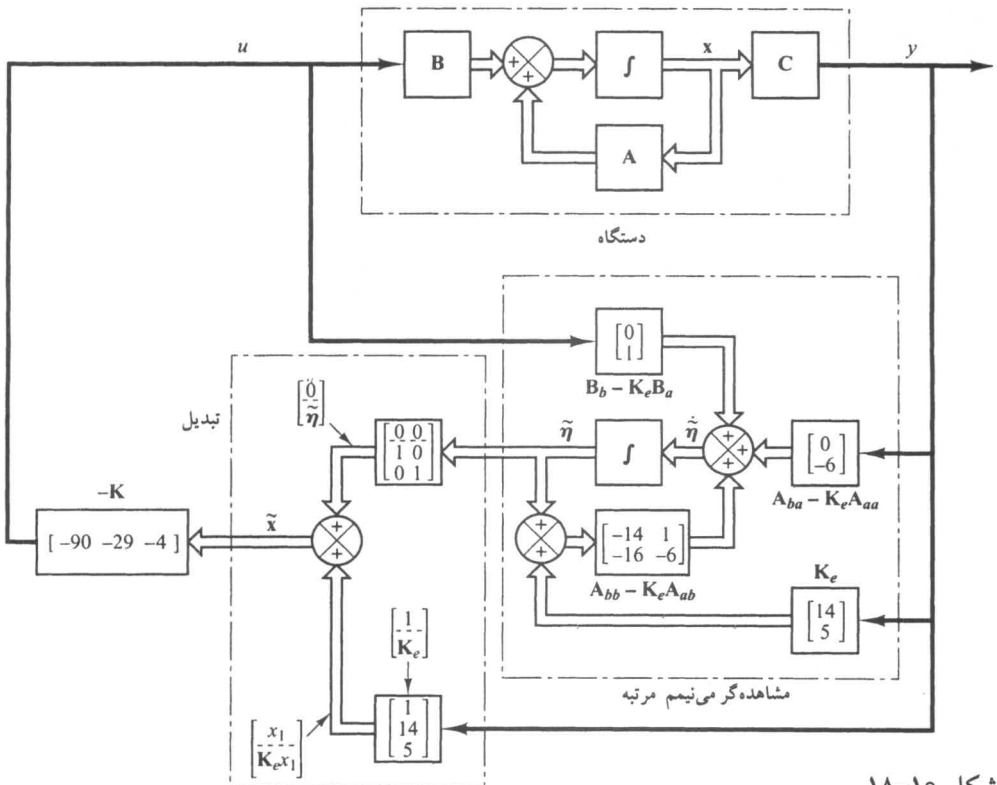
در صورت استفاده از فیدبک حالت مشاهده شده سیگنال کنترل  $u$  به صورت زیر است

$$u = -K\tilde{x} = -K \begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

که در آن  $K$  ماتریس بهره فیدبک حالت است. شکل ۱۰-۱۸ نمودار بلوکی آرایش سیستم دارای فیدبک حالت مشاهده شده را نشان می‌دهد، که در آن مشاهده‌گر از نوع می‌نیم - مرتبه است.

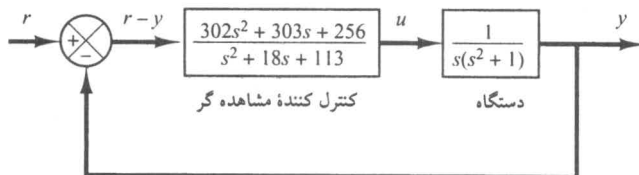
تابع تبدیل کنترل کننده مبتنی بر مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه، در معادلات مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه بیان شده در معادله (۱۰-۸۹) داریم

$$\dot{\tilde{\eta}} = (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{\eta} + [(A_{bb} - K_e A_{ab})K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}]y + (B_b - K_e B_a)u$$



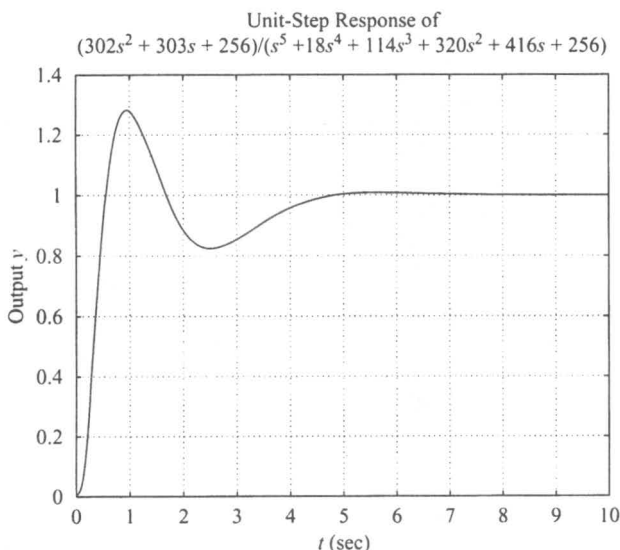
شکل ۱۰-۱۸

سیستم دارای فیدبک حالت مشاهده شده، که در آن مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه طرح شده در مثال ۱۰-۸ به کار رفته است.



شکل ۱۰-۲۹

سیستم کنترل با کنترل کننده مشاهده گر در مسیر پیشخورد.



شکل ۱۰-۳۰

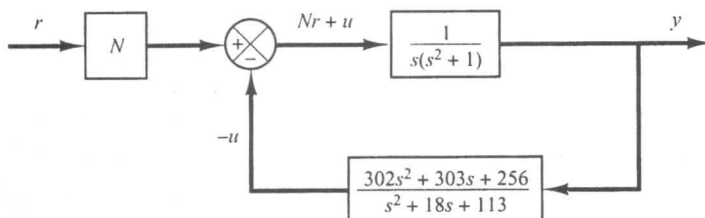
پاسخ پله واحد سیستم کنترل شکل ۱۰-۲۹.

آرایش ۲: شکل ۱۰-۳۱ آرایش دیگری برای سیستم کنترل را نشان می دهد. کنترل کننده مشاهده گر در مسیر فیدبک قرار دارد. ورودی  $r$  توسط بلوکی با بهره  $N$  به سیستم حلقه بسته اعمال شده است. با توجه به این نمودار بلوکی تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s^2 + 18s + 113)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 18s + 113) + 302s^2 + 303s + 256}$$

مقدار ثابت  $N$  را طوری تعیین می کنیم که با گراییدن  $t$  به بینهایت، خروجی  $y$  به ازای ورودی  $r$  پله واحد به مقدار یک میل کند. بنابراین باید داشته باشیم

$$N = \frac{256}{113} = 2.2655$$



شکل ۱۰-۳۱

سیستم کنترل با کنترل کننده مشاهده گر در مسیر فیدبک.

این تابع تبدیل را می‌توان با استفاده از گزاره MATLAB زیر به دست آورد

$$[num,den]=ss2tf(Atilde,Btilde,-Ctilde,-Dtilde) \quad (10-10)$$

## ۱۰-۶ طراحی سیستمهای تنظیم کننده دارای مشاهده گر

در این بخش مسئله طراحی سیستم تنظیم کننده با استفاده از رهیافت جابدهی قطب با مشاهده گر را در نظر می‌گیریم.

سیستم تنظیم کننده شکل ۱۰-۱۹ را در نظر بگیرید. (ورودی مرجع صفر است.) تابع تبدیل دستگاه عبارت است از

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

با استفاده از رهیافت جابدهی قطب کنترل کننده‌ای طرح کنید که به ازای شرایط اولیه زیر

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

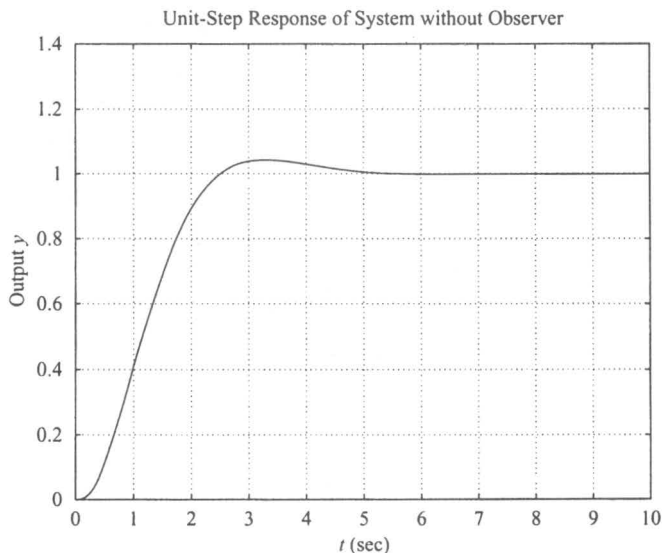
$\mathbf{x}$  بردار حالت دستگاه و  $\mathbf{e}$  بردار خطای مشاهده گر است. ماکزیمم فروجهش  $y(t)$  بین ۲۵٪ تا ۳۵٪ و زمان نشست حدود ۴ sec باشد. از مشاهده گر می‌نیم مرتبه استفاده کنید. (فرض کنید که تنها خروجی  $y$  قابل اندازه‌گیری است.)

از روند طراحی زیر استفاده می‌کنیم:

۱. مدل فضای حالت سیستم را به دست می‌آوریم.
۲. محل مطلوب قطبهای حلقه بسته را برای جابدهی قطب تعیین می‌کنیم. قطبهای مطلوب مشاهده گر را برمی‌گزینیم.
۳. ماتریس بهره فیدبک حالت  $\mathbf{K}$  و ماتریس بهره مشاهده گر  $\mathbf{K}_e$  را تعیین می‌کنیم.
۴. با استفاده از ماتریسهای بهره  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{K}_e$  به دست آمده در گام ۳ تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده گر را به دست می‌آوریم. اگر این کنترل کننده پایدار باشد، خروجی را امتحان می‌کنیم تا مطمئن شویم خواسته‌ها ارضاء می‌شود. اگر پاسخ قابل قبول نباشد، محل قطبهای حلقه بسته و / یا قطبهای مشاهده گر را تغییر می‌دهیم تا سرانجام به پاسخ قابل قبولی دست یابیم.

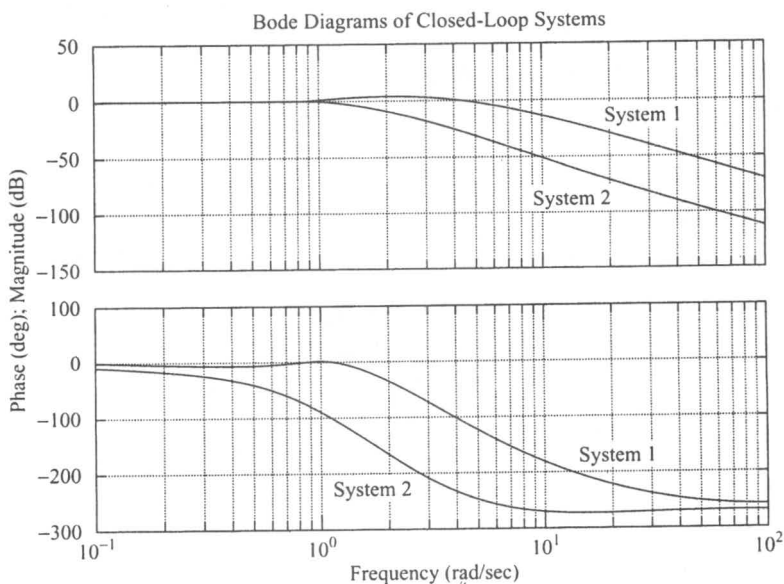


شکل ۱۰-۱۹  
سیستم تنظیم کننده.



شکل ۱۰-۳۳

پاسخ پله واحد سیستم کنترل  
طراحی شده با رهیافت جایدهی  
قطب بدون استفاده از مشاهده گر.  
(قطبهای حلقه بسته در  
 $s = -1 \pm j$  و  $s = -8$   
قرار دارند).



شکل ۱۰-۳۴ نمودارهای بوده حلقه بسته سیستم ۱ (شکل ۱۰-۲۹) و سیستم ۲ (شکل ۱۰-۳۱).

### خلاصه روش طراحی در فضای حالت

۱. روش طراحی در فضای حالت مبتنی بر ترکیب جایدهی قطب و مشاهده گر بسیار توانمند است. این یک روش حوزه زمان است. قطبهای حلقه بسته مطلوب را می توان در محل دلخواه قرار داد، به شرطی که دستگاه کاملاً کنترل پذیر باشد.

**MATLAB Program 10-11**

% Obtaining the state feedback gain matrix K

A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -24 -10];

B = [0; 10; -80];

C = [1 0 0];

J = [-1+j\*2 -1-j\*2 -5];

K = acker(A,B,J)

K =

1.2500 1.2500 0.19375

% Obtaining the observer gain matrix Ke

Aaa = 0; Aab = [1 0]; Aba = [0; 0]; Abb = [0 1; -24 -10]; Ba = 0; Bb = [10; -80];

L = [-10 -10];

Ke = acker(Abb',Aab',L)'

Ke =

10

-24

در این برنامه ماتریسهای J و L به ترتیب قطبهای حلقه بسته و قطبهای مطلوب مشاهدهگر را برای جابدهی قطب دربر دارند. ماتریسهای K و  $K_e$  به دست آمده عبارتاند از

$$K = [1.25 \quad 1.25 \quad 0.19375]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 10 \\ -24 \end{bmatrix}$$

گام چهارم طراحی: تابع تبدیل کنترل کننده مشاهدهگر را تعیین می‌کنیم. با توجه به معادله (۱۰-۱۰۸) تابع تبدیلی کنترل کننده مشاهدهگر را می‌توان به صورت زیر نوشت

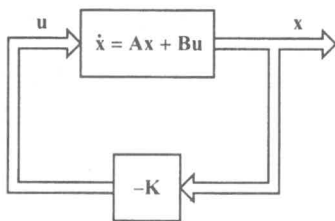
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = -[\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}]$$

می‌توانیم برای تعیین تابع تبدیل کنترل کننده مشاهدهگر از MATLAB استفاده کنیم. برنامه ۱۰-۱۲ تابع تبدیل زیر را به دست می‌دهد.

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{9.1s^2 + 73.5s + 125}{s^2 + 17s - 30} \\ &= \frac{9.1(s + 5.6425)(s + 2.4344)}{(s + 18.6119)(s - 1.6119)} \end{aligned}$$

سیستم دارای این کنترل کننده مشاهدهگر را سیستم ۱ بنامید. شکل ۱۰-۲۰ نمودار بلوکی سیستم ۱ را نشان می‌دهد.





شکل ۱۰-۳۵

سیستم تنظیم کننده بهینه.

ماتریس  $K$  بردار کنترل بهینه زیر را به دست می دهد

$$u(t) = -Kx(t) \quad (10-113)$$

به نحوی که شاخص عملکرد زیر می نیمم شود

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt \quad (10-114)$$

$Q$  یک ماتریس مثبت معین (یا مثبت نیم معین) هرمیتی یا یک ماتریس حقیقی متقارن، و  $R$  مثبت معین است. توجه کنید که جمله دوم سمت راست معادله (۱۰-۱۱۴) مصرف انرژی توسط سیگنالهای کنترل را نشان می دهد. ماتریسهای  $Q$  و  $R$  اهمیت نسبی خطا و مصرف انرژی را تعیین می کنند. در این مسئله فرض می کنیم که بردار کنترل  $u(t)$  مقید نیست.

همانطور که بعداً خواهیم دید قاعده کنترل خطی بیان شده در معادله (۱۰-۱۱۳) قاعده کنترل بهینه است. پس اگر درایه های مجهول ماتریس  $K$  طوری تعیین شوند که شاخص عملکرد می نیمم شود،  $u(t) = -Kx(t)$  به ازای هر حالت اولیه  $x(0)$  بهینه است. شکل ۱۰-۳۵ نمودار بلوکی این آرایش بهینه را نشان می دهد. حال بیاید مسئله بهینه سازی را حل کنیم. با گذاشتن معادله (۱۰-۱۱۳) در معادله (۱۰-۱۱۲) به دست می آوریم

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

در محاسبات زیر فرض می کنیم که ماتریس  $A - BK$  پایدار است، یا مقادیر ویژه  $A - BK$  بخشهای حقیقی منفی دارند.

گذاشتن (۱۰-۱۱۳) در (۱۰-۱۱۴) به دست می دهد

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^* Q x + x^* K^* R K x) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^* (Q + K^* R K) x dt \end{aligned}$$

قرار می دهیم

$$x^* (Q + K^* R K) x = -\frac{d}{dt} (x^* P x)$$

که در آن  $P$  یک ماتریس مثبت معین هرمیتی یا یک ماتریس حقیقی متقارن است. در این صورت به دست می آوریم

**MATLAB Program 10-13**

% Obtaining the characteristic equation

```
[num1,den1] = ss2tf(A-B*K,eye(3),eye(3),eye(3),1);
[num2,den2] = ss2tf(Abb-Ke*Aab,eye(2),eye(2),eye(2),1);
charact_eq = conv(den1,den2)

charact_eq =

1.0e+003*
0.0010 0.0270 0.2550 1.0250 2.0000 2.5000
```

دومین سعی: بیایید قطبهای مطلوب حلقه بسته برای جایدی قطب را مانند قبل بگیریم، ولی قطبهای مشاهده‌گر را به صورت زیر اصلاح کنیم:

$$s = -4/5, \quad s = -4/5$$

بنابراین

$$L = [-4/5 \quad -4/5]$$

با استفاده از MATLAB مقدار جدید  $K_e$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$K_e = \begin{bmatrix} -1 \\ 6/25 \end{bmatrix}$$

سپس باید تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده‌گر را بیابیم. برنامه ۱۰-۱۴ این تابع تبدیل را به صورت زیر به دست می‌دهد

$$G_c(s) = \frac{1/2109s^2 + 11/2125s + 25/3125}{s^2 + 6s + 2/1406} = \frac{1/2109(s+5/3582)(s+3/9012)}{(s+5/619)(s-5/381)}$$

توجه کنید که این کنترل کننده پایدار است. سیستم دارای این کنترل کننده مشاهده‌گر را سیستم ۲ بنامید. در ادامه پاسخ سیستم ۲ به شرایط اولیه زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با گذاشتن  $u = -K\tilde{\mathbf{x}}$  در معادله فضای حالت دستگاه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK} \begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b - \mathbf{e} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} - \mathbf{BK} \left\{ \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-11)$$

$$TK = (T^*)^{-1} B^* P$$

بنابراین

$$K = T^{-1} (T^*)^{-1} B^* P = R^{-1} B^* P \quad (۱۱۷-۱۰)$$

معادله (۱۱۷-۱۰) ماتریس بهینه  $K$  را به دست می‌دهد. بنابراین قاعده کنترل بهینه اعمال شده به مسئله کنترل بهینه مرتبه دوم، هنگامی که شاخص عملکرد مطابق (۱۱۴-۱۰) است، خطی و به صورت زیر است

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^* P x(t)$$

ماتریس  $P$  معادله (۱۱۷-۱۰) باید معادله (۱۱۵-۱۰) یا معادله ساده شده زیر را ارضا کند

$$A^* P + PA - PBR^{-1} B^* P + Q = 0 \quad (۱۱۸-۱۰)$$

معادله (۱۱۸-۱۰) معادله ریکاتی ماتریس ساده شده نامیده می‌شود. بنابراین گامهای طراحی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. معادله (۱۱۸-۱۰)، معادله ریکاتی ماتریس ساده شده، را حل کنید و ماتریس  $P$  را بیابید. اگر ماتریس

$P$  مثبت معینی وجود داشته باشد، سیستم پایدار است. یا ماتریس  $A - BK$  پایدار است (بعضی

سیستمها ممکن است ماتریس  $P$  مثبت معین نداشته باشند).

۲. این ماتریس  $P$  را در معادله (۱۱۷-۱۰) بگذارید. ماتریس  $K$  حاصل ماتریس بهینه است.

در مثال ۹-۱۰ یک مسئله طراحی را براساس این روند حل می‌کنیم. توجه کنید که اگر ماتریس  $A - BK$  پایدار باشد، این روش حتماً جواب درست را به دست می‌دهد.

در پایان توجه کنید که اگر شاخص عملکرد برحسب بردار خروجی داده شده باشد نه برحسب بردار حالت، یعنی

$$J = \int_0^{\infty} (y^* Q y + u^* R u) dt$$

می‌توان شاخص را با استفاده از معادله خروجی زیر

$$y = Cx$$

به صورت زیر درآورد

$$J = \int_0^{\infty} (x^* C^* Q C x + u^* R u) dt \quad (۱۱۹-۱۰)$$

اکنون می‌توان گامهای طراحی بیان شده در این بخش را برای محاسبه ماتریس بهینه  $K$  به کار برد.

سیستم نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید که سیگنال کنترل

مثال ۹-۱۰

عبارت است از

$$u(t) = -Kx(t)$$

**MATLAB Program 10-15**

```
% Response to initial condition.
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -24 -10];
B = [0; 10; -80];
K = [1.25 1.25 0.19375];
Kb = [1.25 0.19375];
Ke = [-1; 6.25];
Aab = [1 0]; Abb = [0 1; -24 -10];
AA = [A-B*K B*Kb; zeros(2,3) Abb-Ke*Aab];
sys = ss(AA, eye(5), eye(5), eye(5));
t = 0:0.01:8;
x = initial(sys, [1; 0; 0; 1; 0], t);
x1 = [1 0 0 0 0]*x';
x2 = [0 1 0 0 0]*x';
x3 = [0 0 1 0 0]*x';
e1 = [0 0 0 1 0]*x';
e2 = [0 0 0 0 1]*x';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('x1')
subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('x2')
subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('x3')
subplot(3,2,4); plot(t,e1); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('e1')
subplot(3,2,5); plot(t,e2); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('e2')
```

۱۰-۲۳ نشان داده شده است. پهنای باند سیستم تقریباً  $3/8 \text{ rad/sec}$  است.

سرانجام باید منحنی‌های مکان هندسی ریشه‌های سیستم اول با  $L = [-10 \quad -10]$  و سیستم دوم با  $L = [-4/5 \quad -4/5]$  را مقایسه کنیم. مکان هندسی ریشه‌های سیستم اول مطابق شکل ۱۰-۲۴ (الف) است و نشان می‌دهد که سیستم به ازای بهره  $dc$  کم ناپایدار و به ازای بهره  $dc$  زیاد پایدار است. مکان هندسی ریشه‌های سیستم دوم در شکل ۱۰-۲۴ (ب) دیده می‌شود و نشان می‌دهد که سیستم به ازای هر بهره مثبتی پایدار است.

**توضیح**

۱. توجه کنید که در طراحی سیستمهای تنظیم کننده اگر قطبهای غالب کنترل کننده را خیلی دور از محور  $j\omega$  برگزینید، درایه‌های ماتریس فیدبک بهره حالت  $K$  خیلی بزرگ می‌شود. مقادیر بزرگ بهره باعث می‌شود خروجی عملگر بزرگ شود و ممکن است حالت اشباع بروز کند. در این صورت سیستم کاری را که برای آن طراحی شده انجام نمی‌دهد.

$$1 - p_{12}^2 = 0$$

$$p_{11} - p_{12} p_{22} = 0$$

$$\mu + 2 p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

حل همزمان این سه معادله، به نحوی که ماتریس  $P$  مثبت معین باشد، به دست می‌دهد

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله (۱۱۷-۱۰) ماتریس بهره فیدبک بهینه  $K$  به صورت زیر تعیین می‌شود

$$K = R^{-1} B^* P$$

$$= [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

بنابراین سیگنال کنترل بهینه عبارت است از

$$u = -Kx = -x_1 - \sqrt{\mu+2} x_2 \quad (۱۲۰-۱۰)$$

توجه کنید که قاعده کنترل داده شده در معادله (۱۲۰-۱۰) به ازای شاخص عملکرد داده شده برای هر حالت

اولیه‌ای نتیجه بهینه به دنبال دارد. شکل ۱۰-۳۷ نمودار بلوکی این سیستم را نشان می‌دهد.

چون معادله مشخصه به صورت زیر است

$$|sI - A + BK| = s^2 + \sqrt{\mu+2} s + 1 = 0$$

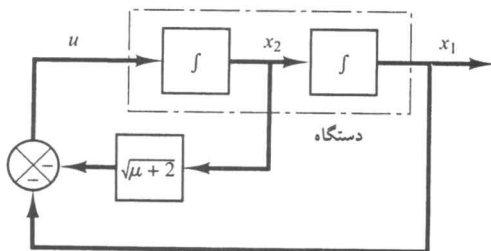
به ازای  $\mu = 1$  قطبهای حلقه بسته عبارت‌اند از

$$s = -0.866 + j0.5, \quad s = -0.866 - j0.5$$

اینها به ازای  $\mu = 1$  قطبهای حلقه بسته مطلوب هستند.

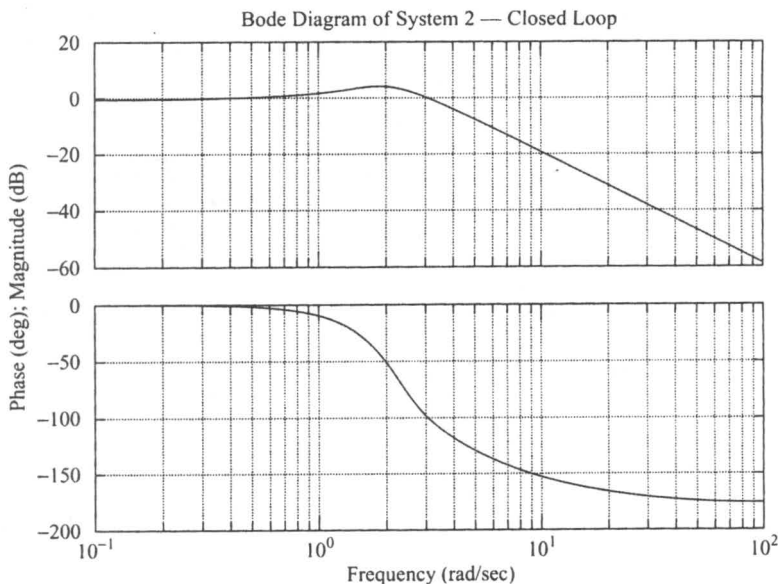
حل مسائل تنظیم کننده بهینه مرتبه دوم با MATLAB دستور MATLAB زیر

$$\text{lqr}(A, B, Q, R)$$



شکل ۱۰-۳۷

کنترل بهینه دستگاه شکل ۱۰-۳۶



شکل ۱۰-۲۳

نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته سیستم ۲.

۲. همچنین اگر قطبهای مشاهده‌گر را خیلی دور از محور  $j\omega$  برگزینید، کنترل‌کننده مشاهده‌گر ناپایدار می‌شود، گرچه سیستم حلقه بسته پایدار است. کنترل‌کننده مشاهده‌گر ناپایدار قابل قبول نیست.
۳. اگر کنترل‌کننده مشاهده‌گر ناپایدار باشد. قطبهای مشاهده‌گر را در نیم‌صفحه چپ به سمت راست ببرید تا کنترل‌کننده پایدار شود. همچنین ممکن است لازم شود که قطبهای حلقه بسته نیز اصلاح شوند.
۴. اگر قطبهای مشاهده‌گر خیلی دور از محور  $j\omega$  انتخاب شود، پهنای باند مشاهده‌گر زیاد شده، مشکلات ناشی از نویز پیش می‌آید. اگر مشکل نویز جدی باشد، قطبهای مشاهده‌گر نباید خیلی دور از محور  $j\omega$  برگزیده شود. قاعده کلی این است که پهنای باند باید به حد کافی پایین باشد تا نویز حسگرها مشکلی به وجود نیاورد.
۵. پهنای باند سیستم دارای مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه بزرگتر از سیستم دارای مشاهده‌گر کامل مرتبه است، به شرطی که در هر دو مشاهده‌گر قطبهای مکرر در یک محل قرار داشته باشند. اگر نویز حسگر مشکلی جدی به حساب می‌آید، استفاده از مشاهده‌گر کامل مرتبه توصیه می‌شود.

بنابراین معادله مشخصه عبارت است از

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= \begin{vmatrix} s+1+k_1 & -1+k_2 \\ 0 & s-2 \end{vmatrix} \\ &= (s+1+k_1)(s-2) = 0 \end{aligned}$$

قطبهای حلقه بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$s = -1 - k_1, \quad s = 2$$

چون قطب  $s = 2$  در نیم صفحه راست قرار دارد، سیستم مستقل از مقداری که برای  $K$  انتخاب می شود، ناپایدار است. بنابراین روش کنترل بهینه مرتبه دوم در مورد این سیستم قابل اعمال نیست.

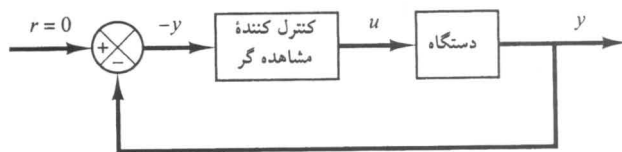
فرض کنید ماتریسهای  $Q$  و  $R$  شاخص عملکرد مرتبه دوم به صورت زیر داده شده اند

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

برنامه ۱۰-۱۸ را برای حل مسئله می نویسیم. جوابی که MATLAB می دهد عبارت است از

#### MATLAB Program 10-18

```
% ----- Design of quadratic optimal regulator system -----
A = [-1 1;0 2];
B = [1;0];
Q = [1 0;0 1];
R = [1];
K = lqr(A,B,Q,R)
Warning: Matrix is singular to working precision.
K =
    NaN    NaN
% ***** If we enter the command [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R), then *****
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
Warning: Matrix is singular to working precision.
K =
    NaN    NaN
P =
    -Inf    -Inf
    -Inf    -Inf
E =
    -2.0000
    -1.4142
```



شکل ۱۰-۲۵ سیستم تنظیم کننده.

سیستم باید در دنبال کردن ورودی پاسخی مطلوب داشته باشد (باید زمان صعود، فراجش، زمان نشست و غیره مقادیری معقول داشته باشند).

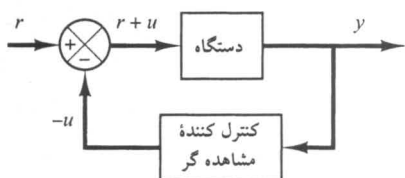
در این بخش سیستمهای کنترلی را در نظر می‌گیریم که با استفاده از رهیافت جایدهی قطب با مشاهده‌گر طراحی شده‌اند. مشخصاً این که سیستمهای کنترل دارای کنترل‌کننده‌های مشاهده‌گر را در نظر می‌گیریم. در بخش ۱۰-۶ سیستمهای تنظیم کننده را در نظر گرفتیم که نمودار بلوکی شکل ۱۰-۲۵ را داشتند. این سیستمها ورودی مرجع ندارند، یا  $r=0$ . اگر سیستم ورودی مرجع داشته باشد، می‌توان چند آرایش بلوکی متفاوت در نظر گرفت که هر کدام کنترل‌کننده مشاهده‌گر متفاوتی لازم دارند. شکلهای ۱۰-۲۶ (الف) و (ب) دو آرایش ممکن را نشان می‌دهند.

**آرایش ۱:** سیستم شکل ۱۰-۲۷ را در نظر بگیرید. در این سیستم ورودی مرجع در نقطه جمع به سیستم افزوده شده است. می‌خواهیم کنترل‌کننده مشاهده‌گر را طوری طراحی کنیم که پاسخ پله واحد فراجشی کمتر از ۳٪ و زمان نشستی حدود ۵ sec داشته باشد.

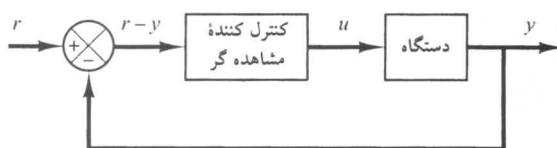
در آنچه خواهد آمد ابتدا یک سیستم تنظیم کننده طراحی می‌کنیم. سپس با استفاده از کنترل‌کننده مشاهده‌گر طراحی شده، یک ورودی مرجع  $r$  به نقطه جمع جمع‌کننده ورودی می‌افزاییم.

پیش از طراحی کنترل‌کننده مشاهده‌گر نمایش فضای حالت دستگاه را می‌یابیم. چون

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$



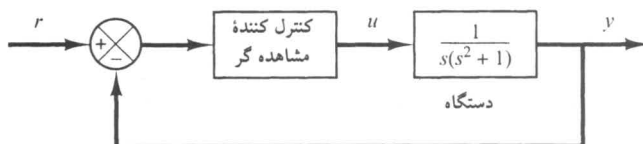
(ب)



(الف)

شکل ۱۰-۲۶

(الف) سیستم کنترل با کنترل‌کننده مشاهده‌گر در مسیر پیش‌خور. (ب) سیستم کنترل با کنترل‌کننده مشاهده‌گر در مسیر فیدبک.



شکل ۱۰-۲۷

سیستم کنترل با کنترل‌کننده مشاهده‌گر در مسیر پیش‌خور.



**MATLAB Program 10-19**

% ----- Design of quadratic optimal regulator system -----

$$A = [0 \ 1; 0 \ -1];$$

$$B = [0; 1];$$

$$Q = [1 \ 0; 0 \ 1];$$

$$R = [1];$$

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

$$K =$$

$$1.0000 \quad 1.0000$$

مثال ۱۰-۱۲

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

شاخص عملکرد  $J$  به صورت زیر داده شده است

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru) dt$$

که در آن

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

ماتریس مثبت معین  $\mathbf{P}$  جواب معادله ریکاتی، ماتریس بهره فیدبک بهینه  $\mathbf{K}$ ، و مقادیر ویژه ماتریس  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  را بیابید.

برنامه ۱۰-۲۰ جواب مسئله را به دست می‌دهد.

اکنون بیاید پاسخ سیستم تنظیم کننده را به شرایط اولیه زیر بیابیم

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادلات حالت سیستم به ازای فیدبک حالت  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

**MATLAB Program 10-17**

```
% Determination of transfer function of observer controller
```

```
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -1 0];
B = [0; 0; 1];
Aaa = 0; Aab = [1 0]; Aba = [0; 0]; Abb = [0 1; -1 0];
Ba = 0; Bb = [0; 1];
Ka = 16; Kb = [17 10];
Ke = [8; 15];
Ahat = Abb - Ke*Aab;
Bhat = Ahat*Ke + Aba - Ke*Aaa;
Fhat = Bb - Ke*Ba;
Atilde = Ahat - Fhat*Kb;
Btilde = Bhat - Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde = -Kb;
Dtilde = -(Ka + Kb*Ke);
[num,den] = ss2tf(Atilde,Btilde,-Ctilde,-Dtilde)

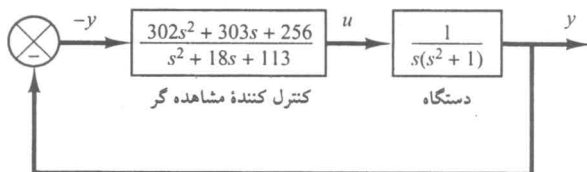
num =
    302.0000 303.0000 256.0000
den =
    1 18 113
```

تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده گر توسط برنامه ۱۰-۱۷ به دست آمده است. نتیجه عبارت است از

$$G_c(s) = \frac{302s^2 + 303s + 256}{s^2 + 18s + 113}$$

$$= \frac{302(s + 0.5017 + j0.772)(s + 0.5017 - j0.772)}{(s + 9 + j5.6569)(s + 9 - j5.6569)}$$

شکل ۱۰-۲۸ نمودار بلوکی سیستم تنظیم کننده ای را که هم اکنون طراحی کردیم نشان می دهد. شکل ۱۰-۲۹ نمودار بلوکی یک آرایش ممکن برای سیستم کنترل مبتنی بر سیستم تنظیم کننده شکل ۱۰-۲۸ را نشان می دهد. شکل ۱۰-۳۰ منحنی پاسخ پله این سیستم کنترل را نشان می دهد. ماکزیمم فراجهش حدود ۲۸٪ و زمان نشست حدود ۴/۵ sec است. بنابراین سیستم طراحی شده خواسته ها را برآورده می کند.



شکل ۱۰-۲۸

سیستم تنظیم کننده با  
کنترل کننده مشاهده گر.

**MATLAB Program 10-21**

% Response to initial condition.

A = [0 1 0; 0 0 1; -35 -27 -9];

B = [0; 0; 1];

K = [0.0143 0.1107 0.0676];

sys = ss(A-B\*K, eye(3), eye(3), eye(3));

t = 0:0.01:8;

x = initial(sys, [1; 0; 0], t);

x1 = [1 0 0]\*x';

x2 = [0 1 0]\*x';

x3 = [0 0 1]\*x';

subplot(2,2,1); plot(t,x1); grid

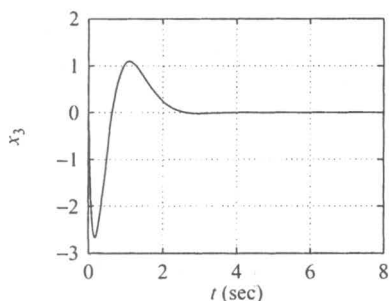
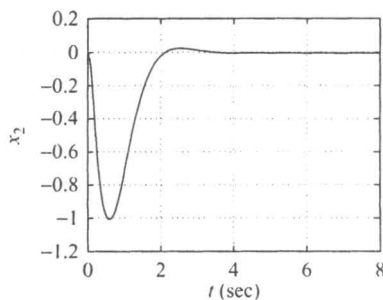
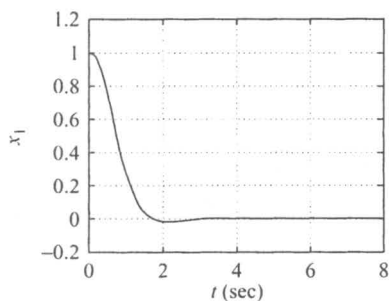
xlabel('t (sec)'); ylabel('x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2); grid

xlabel('t (sec)'); ylabel('x2')

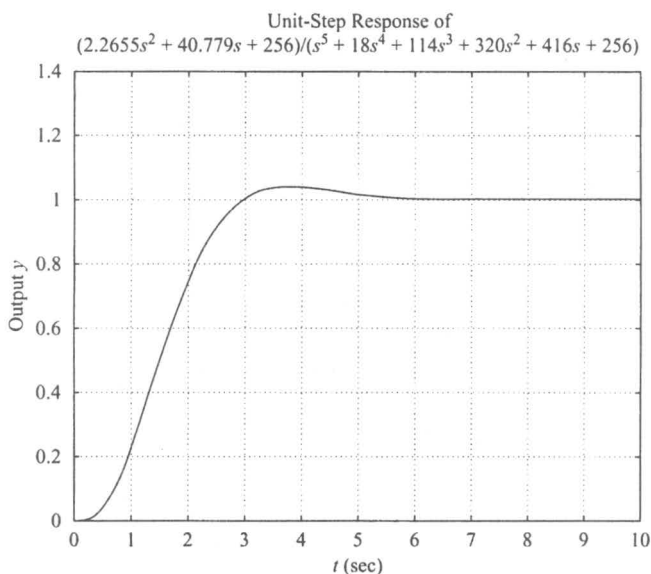
subplot(2,2,3); plot(t,x3); grid

xlabel('t (sec)'); ylabel('x3')



شکل ۱۰-۳۸

منحنیهای پاسخ به شرایط اولیه.



شکل ۱۰-۳۲

پاسخ پله واحد سیستم کنترل شکل ۱۰-۳۱. (قطبهای حلقه بسته برای جایدی قطب در  $s = -1 \pm j$  و  $s = -8$ ، و قطبهای مشاهده گر در  $s = -4$  و  $s = -4$  انتخاب شده‌اند.

شکل ۱۰-۳۲ پاسخ پله واحد سیستم را نشان می‌دهد. توجه کنید که ماکزیمم فراجهش بسیار کوچک، حدود ۴٪، است. زمان نشست حدود ۵ sec است.

**توضیح.** دو آرایش ممکن برای سیستم کنترل حلقه بسته با استفاده از کنترل کننده مشاهده گر در نظر گرفتیم. همانطور که قبلاً گفتیم آرایشهای دیگری نیز ممکن است.

آرایش اول که در آن کنترل کننده مشاهده گر در مسیر پیشخورد قرار می‌گیرد، معمولاً فراجهش نسبتاً بزرگی به دست می‌دهد. آرایش دوم که در آن کنترل کننده مشاهده گر در مسیر فیدبک قرار می‌گیرد، فراجهش کوچکتري دارد. این منحنی پاسخ شبیه پاسخ سیستمی است که با رهیافت جایدی قطب، بدون استفاده از کنترل کننده مشاهده گر طراحی شد. منحنی پاسخ پله واحد شکل ۱۰-۳۳ را، که به سیستم طراحی شده با جایدی قطب بدون استفاده از مشاهده گر مربوط می‌شود، ببینید. در اینجا قطبهای حلقه بسته مطلوب در محلهای زیر قرار دارند.

$$s = -1 + j, \quad s = -1 - j, \quad s = -8$$

توجه کنید که در این دو سیستم زمان صعود و زمان نشست عمدتاً توسط قطبهای حلقه بسته انتخاب شده برای جایدی قطب تعیین می‌شوند (شکلهای ۱۰-۳۲ و ۱۰-۳۳ را ببینید).

نمودارهای بوده حلقه بسته سیستم ۱ (سیستم شکل ۱۰-۲۹) و سیستم ۲ (سیستم شکل ۱۰-۳۱) در شکل ۱۰-۳۴ نشان داده شده است. با توجه به این شکل می‌بینیم که پهنای باند سیستم ۱ و سیستم ۲ به ترتیب ۵ rad/sec و ۱/۳ rad/sec است.

**MATLAB Program 10-22**

% ----- Design of quadratic optimal control system -----

A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];

B = [0; 0; 1];

Q = [100 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

R = [0.01];

K = lqr(A,B,Q,R)

K =

100.0000 53.1200 11.6711

برای یافتن پاسخ پله واحد دستور زیر را به کار می‌بریم:

 $[y,x,t]=step(AA,BB,CC,DD)$ 

که در آن

$$AA = A - BK \quad , \quad BB = Bk_1 \quad , \quad CC = C \quad , \quad DD = D$$

برنامه ۲۳-۱۰ پاسخ پله سیستم طراحی شده را به دست می‌دهد. شکل ۱۰-۴۰ منحنی‌های پاسخ  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  را برحسب زمان نشان می‌دهد.

**توضیحات نهایی**

۱. مسئله تنظیم کننده بهینه این است که به ازای هر حالت اولیه  $x(t_0)$  یک بردار کنترل مجاز  $u(t)$  به دست آید که سیستم را به ناحیه مطلوبی از فضای حالت ببرد، و این انتقال با می‌نیم شدن شاخص عملکرد همراه باشد. برای وجود بردار کنترل بهینه  $u(t)$  باید سیستم کاملاً کنترل پذیر حالت باشد.
۲. سیستمی که شاخص عملکرد انتخاب شده را می‌نیم کند (یا در بعضی موارد ماکزیمم) طبق تعریف سیستم بهینه است. گرچه در بسیاری از کاربردهای عملی بهینه بودن کنترل کننده مهم نیست، ولی این که طراحی صورت گرفته بر اساس شاخص عملکرد مرتبه دوم یک سیستم کنترل پایدار به دست می‌دهد بسیار مهم است.
۳. مشخصه قاعده کنترل بهینه مبتنی بر شاخص عملکرد مرتبه دوم این است که تابعی خطی از متغیرهای حالت است، و به طور ضمنی می‌گوید که باید تمام متغیرهای حالت فیدبک شود. اگر تمام متغیرهای حالت برای فیدبک کردن در دسترس نباشند، باید یک مشاهده‌گر حالت به کار بریم تا متغیرهای غیرقابل اندازه‌گیری را تخمین بزنند و مقادیر برآورد شده را به عنوان سیگنال کنترل بهینه به کار بریم.

۲. اگر نتوان تمام متغیرهای حالت را اندازه گرفت، باید یک مشاهده‌گر برای تخمین متغیرهای حالت غیرقابل اندازه‌گیری به کار برد.
۳. در طراحی سیستم با استفاده از رهیافت جایدهی قطب باید چند مجموعه قطب حلقه بسته مختلف در نظر گرفته شده، مشخصات پاسخ آنها مقایسه و یکی از آنها برگزیده شود.
۴. پهنای باند کنترل‌کننده‌های مشاهده‌گر معمولاً بزرگ است، زیرا قطبهای مشاهده‌گر را دور از محور موهومی برمی‌گزینیم. بزرگ بودن پهنای باند باعث می‌شود نویز فرکانس بالا عبور کند و می‌تواند مشکل نویز به وجود آورد.
۵. افزودن مشاهده‌گر به سیستم معمولاً حاشیه‌های پایداری را کم می‌کند. در بعضی حالتها کنترل‌کننده مشاهده‌گر می‌تواند صرفه‌هایی در نیم صفحه راست داشته باشد، یعنی کنترل‌کننده پایدار، ولی غیرمی‌نیم فاز باشد. در موارد دیگر کنترل‌کننده می‌تواند در نیم صفحه راست قطب داشته باشد، یعنی کنترل‌کننده ناپایدار باشد. در این صورت سیستم طراحی شده ممکن است پایداری مشروط داشته باشد.
۶. اگر سیستم با رهیافت مشاهده‌گر به روش جایدهی قطب طراحی می‌شود، بهتر است حاشیه‌های پایداری (حاشیه فاز و حاشیه بهره) با استفاده از پاسخ فرکانسی بررسی شود. اگر حاشیه‌های پایداری سیستم طراحی شده خوب نباشد، ممکن است سیستم به خاطر عدم قطعیهایی که مدلسازی به همراه دارد، ناپایدار شود.
۷. توجه کنید که روشهای طراحی کلاسیک (روشهای مکان هندسی ریشه‌ها و پاسخ فرکانسی) برای سیستمهای مرتبه  $n$ ، جبرانسازهای کم مرتبه (مرتبه اول یا دوم) به دست می‌دهد. چون کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مشاهده‌گر مرتبه  $n$  هستند (یا مرتبه  $(n-m)$  برای مشاهده‌گر می‌نیم مرتبه) برای یک سیستم مرتبه  $n$  یک کنترل‌کننده مرتبه  $2n$  [یا  $2n-m$ ] به دست می‌آید. چون جبرانسازهای مرتبه پایین ارزاتر از جبرانسازهای مرتبه بالا هستند، طراح باید اول روشهای طراحی کلاسیک را بیازماید و اگر نتوانست جبرانساز مناسبی طراحی کند روش طراحی با جایدهی قطب مبتنی بر مشاهده‌گر بیان شده در این فصل را به کار گیرد.

## ۱۰-۸ سیستمهای تنظیم‌کننده بهینه مرتبه دوم

یک مزیت روش کنترل بهینه مرتبه دوم بر جایدهی قطب این است که راهی منسجم برای محاسبه ماتریس بهره فیدبک حالت به دست می‌دهد.

**مسائل تنظیم‌کننده بهینه مرتبه دوم.** اکنون مسئله تنظیم‌کننده بهینه مرتبه دوم را در نظر می‌گیریم، که با داشتن سیستم توصیف شده با معادله زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

قطبهای حلقه بسته سیستم طراحی شده با رهیافت تنظیم کننده بهینه مرتبه دوم را می توان از رابطه زیر به دست آورد

$$|sI - A + BK| = 0$$

چون این قطبهای حلقه بسته قطبهای حلقه بسته مطلوب در رهیافت جایدهی قطب هستند، توابع تبدیل کنترل کننده های مشاهده گر را می توان از معادله (۷۴-۱۰) (در صورت کامل مرتبه بودن مشاهده گر) یا از معادله (۱۰۸-۱۰) (در صورت می نیم - مرتبه بودن مشاهده گر) به دست آورد.

۴. وقتی سیستم کنترل بهینه در حوزه زمان طراحی می شود، بهتر است مشخصات پاسخ فرکانسی برای بررسی اثرات نویز بررسی شود. مشخصات پاسخ فرکانسی سیستم باید به نحوی باشد که فرکانسهای بالا، گستره ای که انتظار داریم نویز و اثرات تشدید اجزاء در آن قرار داشته باشد، تضعیف شود. (برای جبران اثرات نویز باید یا آرایش بهینه را تغییر دهیم و غیربهینگی را تا حدی بپذیریم، یا شاخص عملکرد را اصلاح کنیم).
۵. اگر حد بالای انتگرال شاخص عملکرد  $J$  معادله (۱۱۴-۱۰) محدود باشد، می توان نشان داد که بردار کنترل بهینه همچنان تابعی خطی از متغیرهای حالت است، ولی ضرایبی متغیر با زمان دارد. (بنابراین تعیین بردار کنترل بهینه مستلزم استفاده از ماتریسهای متغیر با زمان است).

## ۹-۱۰ سیستمهای کنترل مقاوم

فرض کنید یک وسیله (مثلاً سیستمی با یک بازوی انعطاف پذیر) داریم و می خواهیم یک سیستم کنترل بسازیم. اولین گام طراحی سیستم کنترل یافتن مدل ریاضی وسیله بر اساس قوانین فیزیکی است. در اکثر موارد مدل غیرخطی است و ممکن است پارامترهای توزیع شده داشته باشد. تحلیل چنین مدلی می تواند مشکل باشد. تقریب زدن این مدل با یک سیستم خطی دارای ضرائب ثابت، به نحوی که رفتارش به خوبی توصیف شود، امر مطلوبی شمرده می شود. توجه کنید که حتی اگر مدل به کار رفته برای طراحی مدل ساده ای باشد، لازم است ویژگی های ذاتی وسیله را بتواند توصیف کند. با فرض این که بتوان مدلی به دست آورد که تقریب خوبی از رفتار وسیله به دست دهد، باید آن مدل ساده باشد تا بتوان جبران سازی با کمترین مرتبه ممکن طراحی کرد. به همین خاطر مدل وسیله احتمالاً در فرایند مدلسازی خطاهای پیدا کرده است. می دانید که در رهیافت طراحی سیستم کنترل با استفاده از پاسخ فرکانسی برای منظور کردن خطاهای احتمالی از حاشیه فاز و حاشیه بهره استفاده می کنیم. ولی در رهیافت فضای حالت، که بر معادلات دیفرانسیل توصیف کننده رفتار دینامیکی وسیله مبتنی است، چنین حاشیه هایی در فرایند طراحی منظور نمی شود.

چون وسیله واقعی با مدل به کار رفته در طراحی تفاوت دارد، این سوال پیش می آید که آیا کنترل کننده طراحی شده بر اساس مدل با دستگاه واقعی نیز درست کار می کند یا نه. از حدود سالهای ۱۹۸۰ به این طرف نظریه کنترل مقاوم برای اطمینان از عملکرد درست سیستم پی ریزی شد.

$$\dot{x}^*(Q+K^*RK)x = -\dot{x}^*Px - x^*P\dot{x} = -x^*[(A-BK)^*P + P(A-BK)]x$$

مقایسه دو طرف این معادله و توجه به این که این معادله باید به ازای هر  $x$  دلخواهی درست باشد، لازم می‌دارد که

$$(A-BK)^*P + P(A-BK) = -(Q+K^*RK) \quad (10-115)$$

می‌توان ثابت کرد که اگر  $A-BK$  ماتریس پایداری باشد، یک ماتریس مثبت معین  $P$  وجود دارد که معادله (10-115) را برآورده کند. (مسئله الف-10-15 را ببینید).

بنابراین باید درایه‌های  $P$  را از معادله (10-115) به دست آوریم و تعیین کنیم که آیا مثبت معین هست یا نه. (توجه کنید که ممکن است بیش از یک ماتریس  $P$  این معادله را ارضا کند. اگر سیستم پایدار باشد، همیشه یک ماتریس مثبت معین  $P$  برای ارضای معادله وجود دارد. بنابراین اگر این معادله را حل کنیم و یک ماتریس مثبت معین  $P$  به دست آوریم، سیستم پایدار است. دیگر ماتریسهای  $P$  ارضا کننده این معادله مثبت معین نیستند و باید کنار گذاشته شوند.)

شاخص عملکرد  $J$  را می‌توان به صورت زیر حساب کرد

$$J = \int_0^{\infty} \dot{x}^*(Q+K^*RK)x dt = -\dot{x}^*Px \Big|_0^{\infty} = -x^*(\infty)Px(\infty) + x^*(0)Px(0)$$

چون فرض کرده‌ایم که بخش حقیقی تمام مقادیر ویژه  $A-BK$  منفی است، داریم  $x(\infty) \rightarrow 0$ . پس به دست می‌آوریم

$$J = x^*(0)Px(0) \quad (10-116)$$

بنابراین شاخص عملکرد  $J$  را می‌توان برحسب شرایط اولیه  $x(0)$  و  $P$  به دست آورد.

برای یافتن جواب این مسئله کنترل بهینه مرتبه دوم باید به این صورت عمل کنیم: چون فرض کرده‌ایم که  $R$  یک ماتریس هرمیتی مثبت معین یا یک ماتریس حقیقی متقارن است، می‌توانیم بنویسیم

$$R = T^*T$$

که در آن  $T$  یک ماتریس ناتکین است. پس معادله (10-115) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(A^* - K^*B^*)P + P(A-BK) + Q + K^*T^*TK = 0$$

و آن را به صورت زیر بازنویسی کرد

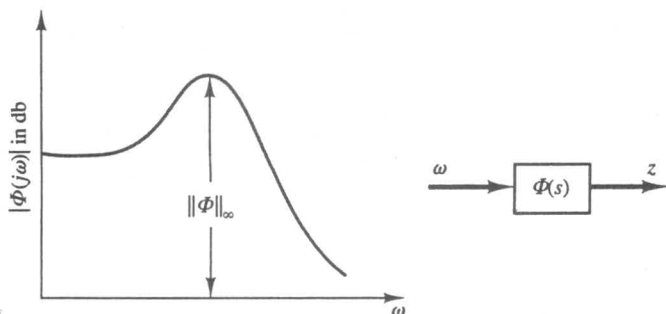
$$A^*P + PA + [TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P] - PBR^{-1}B^*P + Q = 0$$

می‌نیم کردن  $J$  نسبت به  $K$  مستلزم می‌نیم شدن عبارت زیر نسبت به  $K$  است

$$x^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]x$$

(مسئله الف 10-16 را ببینید). چون عبارت اخیر نامنفی است، می‌نیم آن صفر است و هنگامی حاصل می‌شود که





شکل ۱۰-۴۱

نمودار بودی و نرم  $H_\infty$  ،  $\|\Phi\|_\infty$  .

$$\|\Phi\|_\infty = \bar{\sigma}[\Phi(j\omega)]$$

منظور از  $\bar{\sigma}[\Phi(j\omega)]$  ماکزیمم مقدار تکین  $[\Phi(j\omega)]$  است [یعنی  $\bar{\sigma}$  به معنی  $\sigma_{\max}$  به کار می‌رود]. مقدار تکین تابع تبدیل  $\Phi$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sigma_i(\Phi) = \sqrt{\lambda_i(\Phi * \Phi)}$$

که در آن  $\lambda_i(\Phi * \Phi)$  ،  $i$  امین مقدار ویژه بزرگ  $\Phi * \Phi$  است که همیشه مقداری حقیقی و نامنفی است . هر چه  $\|\Phi\|_\infty$  کوچکتر باشد ، اثر ورودی  $w$  بر خروجی  $z$  کوچکتر می‌شود. معمولاً به جای ماکزیمم مقدار تکین  $\|\Phi\|_\infty$  از نامساوی زیر استفاده می‌شود

$$\|\Phi\|_\infty < \gamma$$

و کران اندازه  $\Phi(s)$  توسط  $\gamma$  تعیین می‌شود. برای کوچکتر کردن  $\|\Phi\|_\infty$  باید  $\gamma$  را کوچکتر کنیم و بخواهیم که  $\|\Phi\|_\infty < \gamma$  .

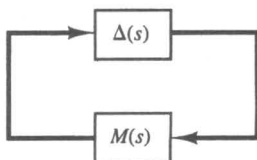
**قضیه بهره کوچک** . سیستم حلقه بسته شکل ۱۰-۴۲ را در نظر بگیرید. در این شکل  $\Delta(s)$  و  $M(s)$  توابع تبدیل پایدار و مناسبی هستند.

قضیه بهره کوچک می‌گوید که اگر

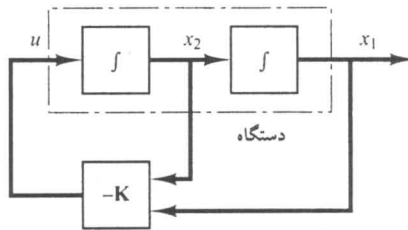
$$\|\Delta(s)M(s)\|_\infty < 1$$

آنگاه این سیستم حلقه بسته پایدار است . یعنی اگر نرم  $H_\infty$  تابع  $\Delta(s)M(s)$  کوچکتر از ۱ باشد ، این سیستم حلقه بسته پایدار است . این قضیه تعمیمی از معیار پایداری نایکویست است .

توجه به این نکته مهم است که قضیه بهره کوچک شرط کافی پایداری را بیان می‌کند. یعنی سیستم حتی در صورت برقرار نبودن این قضیه نیز ممکن است پایدار باشد . ولی اگر این قضیه برقرار باشد ، سیستم حتماً پایدار است .



شکل ۱۰-۴۲ سیستم حلقه بسته .



شکل ۱۰-۳۶

سیستم کنترل.

ماتریس بهره فیدبک بهینه  $K$  را برای می نیم کردن شاخص عملکرد زیر تعیین کنید:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^2) dt$$

که در آن

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu \geq 0)$$

طبق شکل ۱۰-۳۶ می توانیم معادله حالت دستگاه را به صورت زیر بیابیم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون کاربرد معادله ریکاتی ساده شده در طراحی سیستم کنترل بهینه را نشان می دهیم. معادله

(۱۰-۱۱۸) را حل می کنیم، ولی اول آن را به صورت زیر درمی آوریم

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

با توجه به این که ماتریس  $\mathbf{A}$  حقیقی و ماتریس  $\mathbf{Q}$  حقیقی متقارن است، می بینیم که ماتریس  $\mathbf{P}$  یک ماتریس حقیقی متقارن است. بنابراین می توان معادله اخیر را به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این معادله را می توان به صورت زیر ساده کرد

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و سه معادله زیر را از آن به دست آورد

در حالت کلی مدل کردن دقیق  $\Delta_m$  ناممکن است. بنابراین تابع تبدیل اسکالر  $W_m(j\omega)$  را به کار می‌بریم که برای آن

$$\overline{\sigma}\{\Delta_m(j\omega)\} < |W_m(j\omega)|$$

$\overline{\sigma}\{\Delta_m(j\omega)\}$  بزرگترین مقدار تکین  $\Delta_m(j\omega)$  است.

به جای نامساوی (۱۰-۱۲۲) نامساوی زیر را در نظر بگیرید

$$\|W_m T\|_{\infty} < 1 \quad (10-123)$$

اگر نامساوی (۱۰-۱۲۳) درست باشد، نامساوی (۱۰-۱۲۲) نیز برقرار است. اگر نرم  $H_{\infty}$  تابع  $W_m T$  را کوچکتر از ۱ بگیریم، کنترل‌کننده  $K$  پایدار کننده سیستم به دست می‌آید.

فرض کنید خط را در نقطه  $A$  شکل ۱۰-۴۳ (الف) می‌بریم. در این صورت شکل ۱۰-۴۳ (د) به دست می‌آید. با گذاشتن  $W_m I$  به جای  $\Delta_m$ ، شکل ۱۰-۴۳ (ه) به دست می‌آید که می‌توان آن را به صورت شکل ۱۰-۴۳ (و) رسم کرد. شکل ۱۰-۴۳ (و) نمودار تعمیم‌یافته دستگاه نامیده می‌شود.

با توجه به معادله (۱۰-۱۲۱)،  $T$  عبارت است از

$$T = \frac{KG}{1+KG} \quad (10-124)$$

نامساوی (۱۰-۱۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left\| \frac{W_m K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad (10-125)$$

واضح است که برای یک مدل  $G(s)$  پایدار،  $K(s)=0$  نامساوی (۱۰-۱۲۵) را برآورده می‌کند. ولی  $K(s)=0$  تابع تبدیل مطلوبی برای کنترل‌کننده نیست. برای یافتن یک  $K(s)$  قابل قبول باید شرط دیگری اضافه کنیم، مثلاً این که سیستم حاصل عملکرد مقاومی داشته باشد، طوری که خروجی سیستم ورودی را با کمترین خطا دنبال کند. در زیر شرط عملکرد مقاوم را به دست می‌آوریم.

**عملکرد مقاوم.** سیستم شکل ۱۰-۴۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم خروجی  $y(t)$  ورودی

$r(t)$  را تا حد ممکن دنبال کند؛ یعنی می‌خواهیم داشته باشیم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0$$

چون تابع تبدیل  $Y(s)/R(s)$  به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG}{1+KG}$$

داریم

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+KG}$$

مسئله تنظیم کننده بهینه مرتبه دوم پیوسته در زمان و معادله ریکاتی متناظر را حل می کند. این دستور ماتریس بهره فیدبک بهینه  $K$  را به دست می دهد، به نحوی که قاعده کنترلی زیر

$$u = -Kx$$

شاخص عملکرد

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt$$

را تحت معادله قید زیر می نیمم کند

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

دستور زیر

$$[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

ماتریس بهره  $K$ ، بردار مقادیر ویژه  $E$ ، و ماتریس  $P$ ، یعنی جواب یکتای مثبت معین معادله ماتریسی ریکاتی زیر را به دست می دهد

$$PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P + Q = 0$$

اگر ماتریس  $A - BK$  یک ماتریس پایدار باشد، جواب مثبت معین  $P$  حتماً وجود دارد. بردار ویژه  $E$  قطبهای حلقه بسته  $A - BK$  را به دست می دهد.

توجه به این نکته مهم است که برای بعضی سیستمها ماتریس  $A - BK$  به ازای تمام ماتریسهای  $K$  یک ماتریس پایدار نیست. در چنین مواردی برای معادله ماتریسی ریکاتی جواب مثبت معین وجود ندارد. در این صورت دستورهای بیان شده در بالا جوابی به دست نمی دهند (برنامه ۱۰-۱۸ را ببینید).

#### مثال ۱۰-۱۰

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

نشان دهید که نمی توان این سیستم را با استفاده از طرح کنترل فیدبک حالت زیر، به ازای هیچ مقدار  $K$ ، پایدار کرد

$$u = -Kx$$

توجه کنید که این سیستم کنترل پذیر حالت نیست.

تعریف می کنیم

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-k_1 & 1-k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

تعریف می‌کنیم

$$\frac{1}{1+KG} = S$$

که در آن  $S$  معمولاً تابع حساسیت خوانده می‌شود و  $T$  تعریف شده با معادله (۱۰-۱۲۴) تابع حساسیت مکمل نام دارد. در این مسئله عملکرد مقاوم می‌خواهیم نرم  $H_\infty$  تابع  $S$  کمتر از تابع تبدیل مطلوب  $W_s^{-1}$  باشد، یا  $\|S\|_\infty < W_s^{-1}$  که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\|W_s S\|_\infty < 1 \quad (10-126)$$

ترکیب نامساوی‌های (۱۰-۱۲۳) و (۱۰-۱۲۶) به دست می‌دهد

$$\left\| \frac{W_m T}{W_s S} \right\|_\infty < 1$$

که در آن  $T+S=1$  یا

$$\left\| \frac{W_m(s) \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}}{W_s(s) \frac{1}{1+K(s)G(s)}} \right\|_\infty < 1 \quad (10-127)$$

مسئله ما یافتن  $K(s)$  است که نامساوی (۱۰-۱۲۷) را برآورده کند. توجه کنید که بسته به انتخاب  $W_m(s)$  و  $W_s(s)$  ممکن است  $K(s)$  های بسیاری نامساوی (۱۰-۱۲۷) را برآورده کند، یا نتوان  $K(s)$  را به صورتی یافت که این نامساوی برآورده شود. مسئله کنترل مقاوم به کاربرنده نامساوی (۱۰-۱۲۷) مسئله حساسیت آمیخته نامیده می‌شود.

شکل ۱۰-۴۵ (الف) یک نمودار دستگاه تعمیم یافته است که در آن دو شرط (پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم) مشخص شده است. گونه ساده شده این نمودار در شکل ۱۰-۴۵ (ب) نشان داده شده است.

**یافتن تابع تبدیل  $z(s)/w(s)$  از روی نمودار دستگاه تعمیم یافته.** نمودار دستگاه تعمیم یافته شکل ۱۰-۴۶ را در نظر بگیرید.

در این نمودار  $w(s)$  اغتشاش و  $u(s)$  متغیر عمل‌پذیر است.  $z(s)$  متغیر کنترل شده و  $y(s)$  متغیر مشاهده شده است.

این سیستم کنترل، متشکل از دستگاه تعمیم یافته  $P(s)$  و کنترل کننده  $K(s)$  را در نظر بگیرید. معادلات ارتباط دهنده خروجی‌های  $z(s)$  و  $y(s)$  به ورودی‌های  $w(s)$  و  $u(s)$  دستگاه تعمیم یافته  $P(s)$  عبارت‌اند از

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

رابطه بین  $u(s)$  و  $y(s)$  به صورت زیر بیان می‌شود

$$u(s) = K(s)y(s)$$

$$K=[NaN \ NaN]$$

NaN مخفف Not a Number است و در برنامه MATLAB، یعنی جواب عددی وجود ندارد. هر گاه مسئله کنترل بهینه مرتبه دوم جواب ندارد، MATLAB یک ماتریس  $K$  مشتمل بر NaN به دست می‌دهد.

مثال ۱۰-۱۱

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

شاخص عملکرد به صورت زیر داده شده است

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}' Q x + u' R u) dt$$

که در آن

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]$$

فرض کنید که از سیگنال  $u$  زیر استفاده شده است

$$u = -Kx$$

ماتریس بهره فیدبک حالت بهینه  $K$  را بیابید.

ماتریس بهره فیدبک بهینه  $K$  را می‌توان با حل معادله ریکاتی زیر به دست آورد، که  $P$  باید یک ماتریس

مثبت معین باشد

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

نتیجه عبارت است از

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با گذاشتن ماتریس  $P$  در معادله زیر می‌توان ماتریس  $K$  بهینه را به دست آورد

$$K = R^{-1}B'P \\ = [1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]$$

بنابراین سیگنال کنترل بهینه عبارت است از

$$u = -Kx = -x_1 - x_2$$

برنامه ۱۰-۱۹ نیز همین جواب را برای مسئله به دست می‌دهد.

بنابراین

$$[I - P_{12}K(s)]y(s) = P_{11}w(s)$$

$$y(s) = [I - P_{12}K(s)]^{-1} P_{11}w(s) \quad \text{یا}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \dot{z}(s) &= P_{11}w(s) + P_{12}K(s)[I - P_{12}K(s)]^{-1} P_{11}w(s) \\ &= \{P_{11} + P_{12}K(s)[I - P_{12}K(s)]^{-1} P_{11}\}w(s) \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\Phi(s) = P_{11} + P_{12}K(s)[I - P_{12}K(s)]^{-1} P_{11} \quad (10-128)$$

ماتریس  $P$  دستگاه تعمیم یافته سیستم کنترل مثال ۱۰-۱۴ را به دست آورید.

مثال ۱۰-۱۵

نامساوی (۱۰-۱۲۵) را برای سیستم کنترلی که پایداری مقاوم دارد به دست آوردیم. نامساوی (۱۰-۱۲۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\left\| \frac{W_m KG}{1 + KG} \right\|_{\infty} < 1 \quad (10-129)$$

با تعریف

$$\Phi_1 = \frac{W_m KG}{1 + KG} \quad (10-130)$$

نامساوی (۱۰-۱۲۹) را می‌توان به شکل زیر آورد

$$\|\Phi_1\|_{\infty} < 1$$

با نوشتن معادله (۱۰-۱۲۸) به شکل زیر

$$\Phi = P_{11} + P_{12}K(I - P_{12}K)^{-1} P_{11}$$

اگر ماتریس دستگاه تعمیم یافته  $P$  را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_m G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (10-131)$$

به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Phi &= P_{11} + P_{12}K(I - P_{12}K)^{-1} P_{11} \\ &= W_m KG(I + KG)^{-1} \end{aligned}$$

که دقیقاً همان  $\Phi_1$  تعریف شده در معادله (۱۰-۱۳۰) است.

**MATLAB Program 10-20**

```
% ----- Design of quadratic optimal regulator system -----
```

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -35 -27 -9];
```

```
B = [0; 0; 1];
```

```
Q = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
```

```
R = [1];
```

```
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

```
K =
```

```
0.0143 0.1107 0.0676
```

```
P =
```

```
4.2625 2.4957 0.0143
```

```
2.4957 2.8150 0.1107
```

```
0.0143 0.1107 0.0676
```

```
E =
```

```
-5.0958
```

```
-1.9859 + 1.7110i
```

```
-1.9859 - 1.7110i
```

سیستم را می‌توان به صورت زیر برای MATLAB تعریف کرد

```
sys=ss(A-B*K,eye(3),eye(3),eye(3))
```

برنامه ۱۰-۲۱ پاسخ سیستم به شرایط اولیه را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ در شکل ۱۰-۳۸ نشان داده شده است.

سیستم شکل ۱۰-۳۹ را در نظر بگیرید. دستگاه با معادلات فضای حالت زیر توصیف شده است

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad D = [0]$$

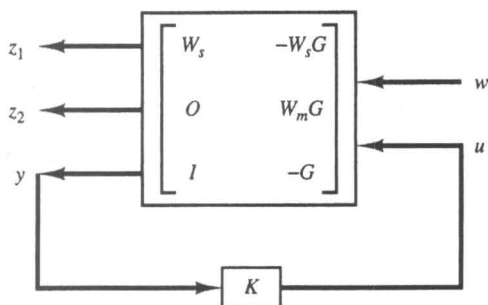
سیگنال کنترل  $u$  به صورت زیر است

$$u = k_1(r - x_1) - (k_2x_2 + k_3x_3) = k_1r - (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$

برای تعیین قاعده کنترل بهینه فرض کنید که ورودی صفر است، یا  $r = 0$ .

مثال ۱۰-۱۳





شکل ۱۰-۴۷

دستگاه تعمیم یافته مورد بحث در مثال ۱۰-۱۵.

تعیین کرد. نمودار دستگاه تعمیم یافته سیستم مثال ۱۰-۱۴ را می توان به صورت نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۷ رسم کرد.

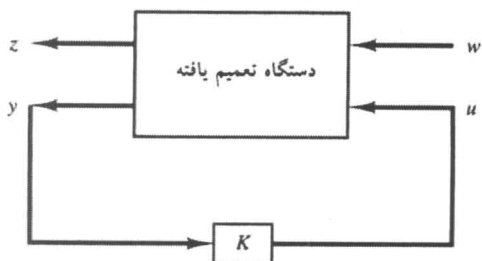
**مسائل کنترلی H بینهایت.** برای طراحی کنترل کننده  $K$  سیستم کنترل، به نحوی که مشخصات پایداری و عملکرد برآورده شود، از مفهوم دستگاه تعمیم یافته استفاده می شود.

همانطور که قبلاً گفته شد دستگاه تعمیم یافته یک مدل خطی متشکل از مدل دستگاه و توابع وزندهی متناظر با مشخصات عملکرد مطلوب است. با توجه به دستگاه تعمیم یافته شکل ۱۰-۴۸، مسئله کنترلی  $H$  بینهایت عبارت است از طراحی یک کنترل کننده  $K$  که نرم  $H_\infty$  تابع تبدیل از اغتشاش  $w$  به متغیر کنترل شده  $z$  را از یک مقدار مشخص کمتر کند.

علت استفاده از دستگاه تعمیم یافته، به جای نمودارهای بلوکی سیستم کنترل، این است که تعدادی سیستم کنترل دارای عدم قطعیت با استفاده از دستگاه های تعمیم یافته طراحی شده است، و بنابراین روند طراحی برای چنین دستگاه هایی وجود دارد.

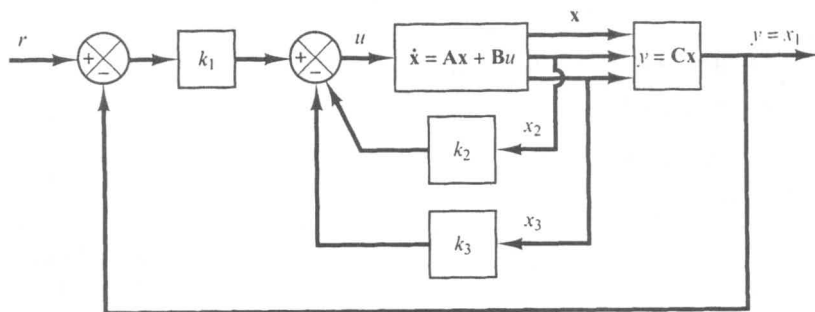
توجه کنید که هر تابع وزندهی، مثل  $W(s)$ ، پارامتر مهمی است که بر کنترل کننده حاصل  $K(s)$  تاثیر دارد. در واقع خوبی سیستم طرح شده به انتخاب تابع یا توابع وزندهی به کار رفته در فرایند طراحی بستگی دارد.

کنترل کننده حاصل از حل مسئله کنترلی  $H$  بینهایت معمولاً کنترل کننده  $H$  بینهایت خوانده می شود.



شکل ۱۰-۴۸

نمودار دستگاه تعمیم یافته.



شکل ۱۰-۳۹

سیستم کنترل.

ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  زیر را تعیین می‌کنیم

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

به نحوی که شاخص عملکرد زیر می‌نیم شود

$$J = \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dt$$

که در آن

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

برای این که پاسخ سریعی به دست آید  $q_{11}$  باید در مقایسه با  $q_{22}$ ،  $q_{33}$  و  $R$  به حد کافی بزرگ باشد. در این مسئله انتخاب می‌کنیم

$$q_{11} = 100, \quad q_{22} = q_{33} = 1, \quad R = 0.01$$

برای حل این مسئله از MATLAB استفاده می‌کنیم و دستور زیر را می‌دهیم

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

برنامه ۱۰-۲۲ جواب این مسئله را به دست می‌دهد

اکنون مشخصات پاسخ پله سیستم طراحی شده را به ازای ماتریس  $K$  به دست آمده تعیین می‌کنیم. معادله حالت سیستم طراحی شده عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ &= A x + B (-K x + k_1 r) \\ &= (A - B K) x + B k_1 r \end{aligned}$$

و معادله خروجی به صورت زیر است

$$y = C x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$AP = P\hat{A}$$

یا

$$\begin{aligned} & [Af_1 | Af_2 | \dots | Af_q | Av_{q+1} | Av_{q+2} | \dots | Av_n] \\ & = [f_1 | f_2 | \dots | f_q | v_{q+1} | v_{q+2} | \dots | v_n] \hat{A} \end{aligned} \quad (137-10)$$

همچنین

$$B = P\hat{B} \quad (138-10)$$

چون  $q$  بردار ستونی مستقل خطی  $f_1, f_2, \dots, f_q$  داریم، می‌توانیم قضیهٔ کیلی - هامیلتون را به کار برده، بردارهای  $Af_1, Af_2, \dots, Af_q$  را به صورت زیر برحسب این  $q$  بردار بیان کنیم

$$\begin{aligned} Af_1 &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{q1}f_q \\ Af_2 &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{q2}f_q \\ &\vdots \\ Af_q &= a_{1q}f_1 + a_{2q}f_2 + \dots + a_{qq}f_q \end{aligned}$$

بنابراین می‌توانیم معادلهٔ (۱۳۷-۱۰) را به صورت زیر بیان کنیم

$$\begin{aligned} & [Af_1 | Af_2 | \dots | Af_q | Av_{q+1} | Av_{q+2} | \dots | Av_n] \\ & = [f_1 | f_2 | \dots | f_q | v_{q+1} | v_{q+2} | \dots | v_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} & a_{1q+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2q} & a_{2q+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & a_{qq+1} & \dots & a_{qn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{q+1q+1} & \dots & a_{q+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nq+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} \end{bmatrix} &= A_{11} \\ \begin{bmatrix} a_{1q+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2q+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nq+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} &= A_{12} \end{aligned}$$

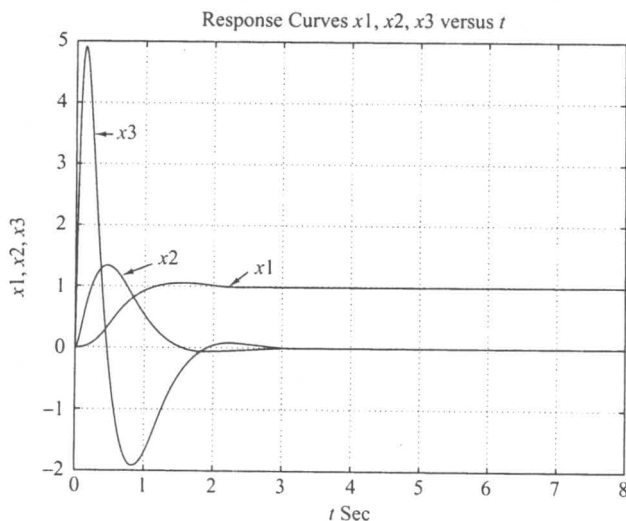
**MATLAB Program 10-23**

```
% ----- Unit-step response of designed system -----
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
B = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];
D = [0];
K = [100.0000 53.1200 11.6711];
k1 = K(1); k2 = K(2); k3 = K(3);

% ***** Define the state matrix, control matrix, output matrix,
% and direct transmission matrix of the designed systems as AA,
% BB, CC, and DD *****

AA = A - B*K;
BB = B*k1;
CC = C;
DD = D;
t = 0:0.01:8;
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD,1,t);

plot(t,x)
grid
title('Response Curves x1, x2, x3, versus t')
xlabel('t Sec')
ylabel('x1,x2,x3')
text(2.6,1.35,'x1')
text(1.2,1.5,'x2')
text(0.6,3.5,'x3')
```



شکل ۱۰-۴۰

منحنيهای  $x_3$ ،  $x_2$ ،  $x_1$ بر حسب  $t$ .

که در آن

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \end{bmatrix}$$

الف ۱۰-۲ سیستم کاملاً کنترل پذیر حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

ماتریس کنترل پذیری  $M$  زیر را تعریف کنید:

$$M = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

نشان دهید

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

که در آن  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ضرایب چندجمله‌ای مشخصه هستند:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

حل: حالت  $n=3$  را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که

$$AM = M \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (140-10)$$

طرف چپ معادله (۱۴۰-۱۰) عبارت است از

$$AM = A[B \mid AB \mid A^2B] = [AB \mid A^2B \mid A^3B]$$

طرف راست معادله (۱۴۰-۱۰) عبارت است از

$$\begin{aligned} [B \mid AB \mid A^2B] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} &= [AB \mid A^2B \mid -a_3B - a_2AB - a_1A^2B] \end{aligned} \quad (141-10)$$

قضیه کیلی - هامیلتون می‌گوید که ماتریس  $A$  معادله مشخصه خودش را ارضاء می‌کند، یعنی به ازای  $n=3$ 

$$A^3 + a_1A^2 + a_2A + a_3I = 0 \quad (142-10)$$

فرض نظریه کنترل مقاوم این است که مدلهای به کار رفته برای طراحی سیستم کنترل خطا دارد. در این بخش می‌خواهیم این نظریه را معرفی کنیم. اساس کار این است که بین دستگاه واقعی و مدل ریاضی آن خطایی قائل شویم و این خطا را در فرایند طراحی سیستم کنترل وارد کنیم.

سیستم طراحی شده بر اساس نظریه کنترل مقاوم ویژگی‌های زیر را دارد:

(۱) **پایداری مقاوم**. سیستم طراحی شده با وجود انحراف پایدار می‌ماند.

(۲) **عملکرد مقاوم**. سیستم طراحی شده به رغم وجود انحراف مشخصات پاسخ مطلوب را دارد.

این نظریه هم ملاحظات تحلیل پاسخ فرکانسی و هم ملاحظات پاسخ زمانی را در بردارد. به خاطر پیچیدگی‌های ریاضی نظریه کنترل مقاوم، بحث تفصیلی این نظریه فراتر از حد کتابی در سطح کارشناسی است. در این بخش تنها مطالب مقدماتی نظریه کنترل مقاوم معرفی می‌شود.

**عناصر غیرقطعی در رفتار دینامیکی وسیله**. اصطلاح **عدم قطعیت** به وجود اختلاف یا خطا بین مدل دستگاه و دستگاه واقعی اطلاق می‌شود.

عناصر غیرقطعی حاضر در سیستمهای واقعی را می‌توان به دو دسته **ساختاری** و **غیرساختاری** تقسیم کرد. تغییر هر پارامتری از رفتار دینامیکی دستگاه، مثل تغییر قطبها و صفرهای تابع تبدیل از عدم قطعیت‌های ساختاری به حساب می‌آید. بستگی فرکانسی، مثل وجوه فرکانس بالای ندیده گرفته شده در مدل دینامیکی دستگاه عدم قطعیت غیرساختاری محسوب می‌شود. مثلاً در مدل کردن یک دستگاه دارای بازوی انعطاف‌پذیر، مدل ممکن است تعداد محدودی وجه نوسانی داشته باشد. وجوه نوسانی منظور نشده در مدل دستگاه از عدم قطعیت‌های غیرساختاری هستند. یک نمونه دیگر از عدم قطعیت در خطی کردن دستگاه غیرخطی بروز می‌کند. اگر دستگاه واقعی غیرخطی و مدل آن خطی باشد، تفاوت آنها به صورت یک عدم قطعیت غیرساختاری عمل می‌کند.

در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که عدم قطعیت غیرساختاری است. همچنین فرض می‌کنیم که دستگاه تنها یک عدم قطعیت دارد. (بعضی دستگاه‌ها ممکن است چندین عدم قطعیت داشته باشند).

در نظریه کنترل مقاوم، عدم قطعیت غیرساختاری به صورت  $\Delta(s)$  تعریف می‌شود. چون توصیف دقیق  $\Delta(s)$  معلوم نیست، تخمینی از  $\Delta(s)$  را در نظر می‌گیریم و آن را در طراحی کنترل کننده پایدارساز سیستم به کار می‌بریم. پایداری سیستم دارای عدم قطعیت غیرساختاری را می‌توان با استفاده از قضیه بهره کوچک بررسی کرد؛ این قضیه را بعد از تعریف نرم  $H_\infty$  بیان می‌کنیم.

**نرم  $H_\infty$** . نرم  $H_\infty$  یک سیستم تک ورودی - تک خروجی پایدار بزرگترین ضریب بهره پاسخ حالت ماندگار به تحریک سینوسی است.

به ازای  $\Phi(s)$  اسکالر،  $\|\Phi\|_\infty$  ماکزیمم مقدار  $|\Phi(j\omega)|$  است. این را نرم  $H_\infty$  می‌نامند. شکل ۱۰-۴۱ را ببینید.

در نظریه کنترل مقاوم اندازه تابع تبدیل را با نرم  $H_\infty$  اندازه می‌گیریم. فرض کنید تابع تبدیل  $\Phi(s)$  مناسب و پایدار است. [منظور از مناسب بودن تابع تبدیل  $\Phi(s)$  این است که  $\Phi(\infty)$  کراندار و معین است. تابع تبدیل دارای  $\Phi(\infty) = 0$  اکیداً مناسب نامیده می‌شود.] نرم  $H_\infty$  برای  $\Phi(s)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

حل: حالت  $n=3$  را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= (MW)^{-1}A(MW) \\ &= W^{-1}(M^{-1}AM)W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (143-10) \end{aligned}$$

با توجه به مسئله الف-۱۰-۲ داریم

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \\ W^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} W &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین باید نشان دهیم که

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} W = W \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (144-10)$$

طرف چپ معادله (۱۴۴-۱۰) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

طرف راست معادله (۱۴۴-۱۰) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

واضح است که معادله (۱۴۴-۱۰) درست است. بنابراین نشان داده‌ایم که

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

اکنون نشان می‌دهیم که

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (145-10)$$

سیستم دارای عدم قطعیت غیرساختاری . در بعضی موارد خطای عدم قطعیت غیرساختاری ممکن است به صورت ضربی باشد ، یعنی

$$\tilde{G} = G(1 + \Delta_m)$$

که در آن  $\tilde{G}$  رفتار درست دستگاه و  $G$  مدل دستگاه است . در موارد دیگر خطای عدم قطعیت غیرساختاری ممکن است به صورت جمعی باشد ، یعنی

$$\tilde{G} = G + \Delta_a$$

در هر دو صورت فرض می‌کنیم که  $\Delta_m$  یا  $\Delta_a$  کراندار هستند ، به نحوی که

$$\|\Delta_m\| < \gamma_m \quad , \quad \|\Delta_a\| < \gamma_a$$

که در آنها  $\gamma_m$  و  $\gamma_a$  ثابت‌های مثبت هستند.

مثال ۱۰-۱۴

یک سیستم کنترل با عدم قطعیت غیرساختاری ضربی در نظر بگیرید. پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم سیستم را در نظر می‌گیریم . (سیستم دارای عدم قطعیت غیرساختاری جمعی در مسئله الف ۱۰-۱۸ مورد بررسی قرار گرفته است .)

پایداری مقاوم . تعریف می‌کنیم

$$\tilde{G} = \text{دینامیک واقعی دستگاه}$$

$$G = \text{مدل دینامیکی دستگاه}$$

$$\Delta_m = \text{عدم قطعیت غیرساختاری ضربی}$$

فرض می‌کنیم  $\Delta_m$  پایدار است و کران بالای معلومی دارد. همچنین فرض می‌کنیم  $\tilde{G}$  و  $G$  به صورت زیر به هم مرتبط می‌شوند

$$\tilde{G} = G(1 + \Delta_m)$$

سیستم نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۳ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل بین نقاط  $A$  و  $B$  را بررسی می‌کنیم . توجه کنید که شکل ۱۰-۴۳ (الف) را می‌توان به صورت شکل ۱۰-۴۳ (ب) رسم کرد. تابع تبدیل بین نقاط  $A$  و  $B$  عبارت است از

$$\frac{KG}{1+KG} = (1+KG)^{-1} KG$$

تعریف می‌کنیم

$$(1+KG)^{-1} KG = T \quad (10-121)$$

با استفاده از معادله (۱۰-۱۲۱) می‌توانیم شکل ۱۰-۴۳ (ب) را به صورت شکل ۱۰-۴۳ (ج) در آوریم . اعمال قضیه بهره کوچک به سیستم متشکل از  $\Delta_m$  و  $T$  شکل ۱۰-۴۳ (ج) شرط پایداری زیر را به دست می‌دهد

$$\|\Delta_m T\|_{\infty} < 1 \quad (10-122)$$



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

و

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{x} = T \hat{\mathbf{x}}$$

که معادله حالت را به صورت زیر درمی‌آورد

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = T^{-1} A T \hat{\mathbf{x}} + T^{-1} B u$$

چون

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

و

$$T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

که شکل متعارف کنترل‌پذیر است.

الف ۱۰-۵ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B u$$

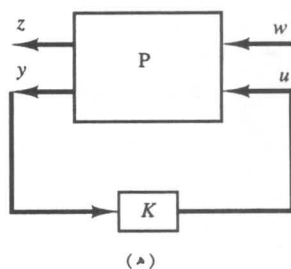
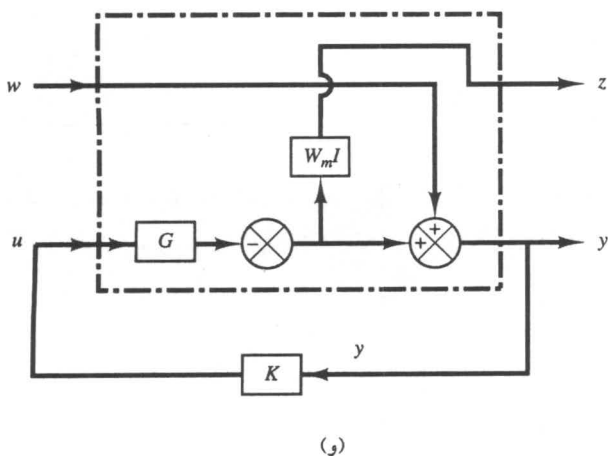
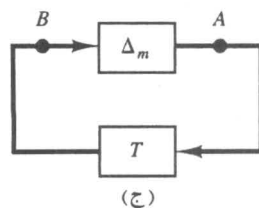
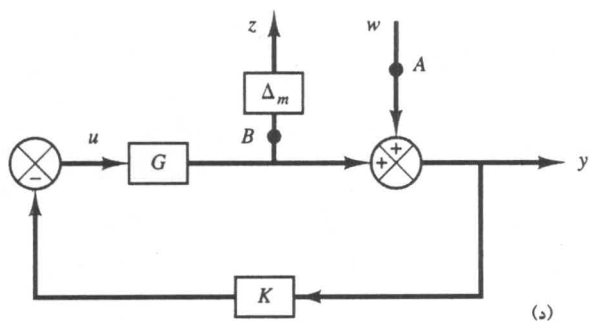
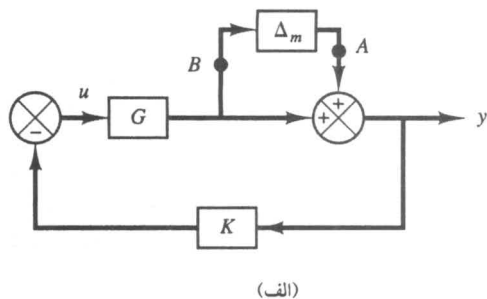
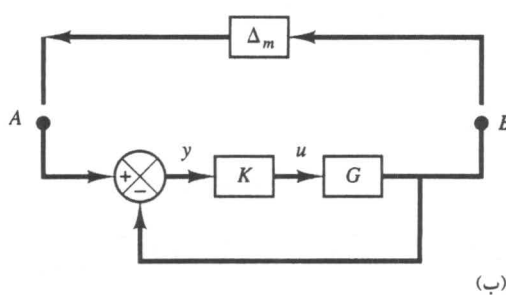
$$y = C \mathbf{x}$$

که در آن

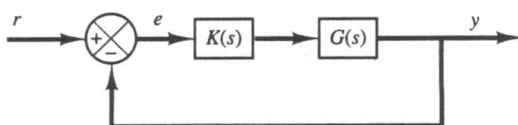
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$$



شکل ۱۰-۴۳ (الف) نمودار بلوکی سیستمی با عدم قطعیت غیرساختاری ضربی. (ب) تا (د) عملیات متوالی بر روی نمودار بلوکی شکل (الف). (ه) نمودار بلوکی یک دستگاه تعمیم یافته برای عدم قطعیت غیرساختاری ضربی؛ (و) نمودار بلوکی دستگاه تعمیم یافته.



شکل ۱۰-۴۴  
سیستم حلقه بسته.

الف ۱۰-۶ تابع تبدیل دستگاه یک سیستم تنظیم کننده عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

متغیرهای حالت زیر را تعریف می‌کنیم

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = \dot{x}_2$$

می‌خواهیم با استفاده از فیدبک کنترل حالت  $u = -Kx$  قطبهای حلقه بسته را در محلهای زیر قرار دهیم

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \quad s = -2 - j2\sqrt{3}, \quad s = -10$$

ماتریس بهره فیدبک  $K$  را با استفاده از MATLAB بیابید.

حل: معادلات فضای حالت سیستم به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که در جابدهی قطب ماتریسهای  $C$  و  $D$  بر ماتریس بهره فیدبک  $K$  اثری ندارند.

برنامه‌های ۱۰-۲۴ و ۱۰-۲۵ دو برنامه MATLAB برای یافتن ماتریس بهره فیدبک هستند.

الف ۱۰-۷ سیستم کاملاً مشاهده‌پذیری در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax$$

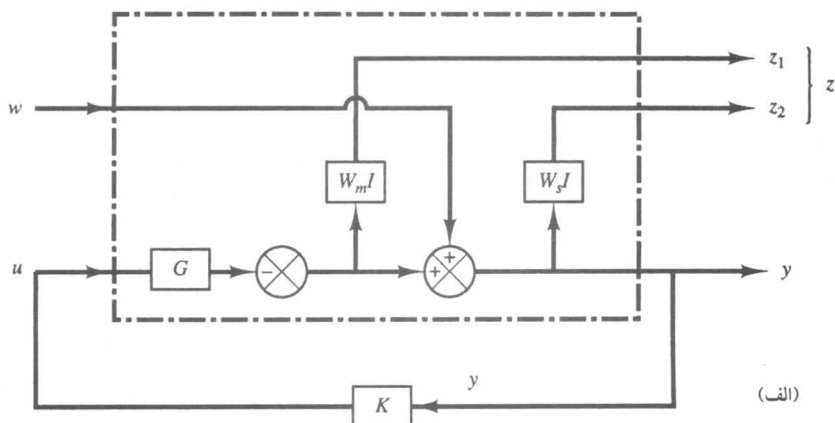
$$y = Cx$$

#### MATLAB Program 10-24

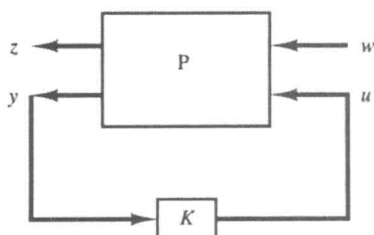
```
A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B = [0; 0; 10];
J = [-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3) -10];
K = acker(A,B,J)

K =

    15.4000    4.5000    0.8000
```



(الف)



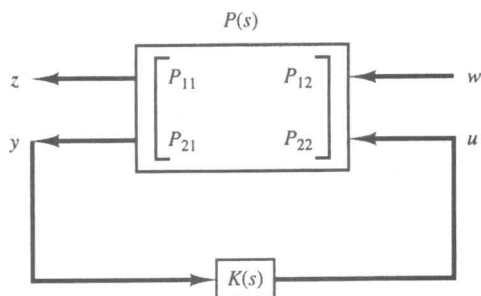
(ب)

### شکل ۱۰-۴۵

(الف) نمودار دستگاه تعمیم یافته ؛

(ب) گونه ساده شده نمودار

دستگاه تعمیم یافته شکل (الف).



### شکل ۱۰-۴۶

یک دستگاه تعمیم یافته .

تابع تبدیل ارتباط دهنده متغیر کنترل شده  $z(s)$  به اغتشاش  $w(s)$  را به صورت  $\Phi(s)$  تعریف می کنیم ؛ یعنی

$$z(s) = \Phi(s) w(s)$$

توجه کنید که  $\Phi(s)$  را می توان به صورت زیر تعیین کرد :

$$z(s) = P_{11} w(s) + P_{12} u(s)$$

$$y(s) = P_{21} w(s) + P_{22} u(s)$$

$$u(s) = K(s) y(s)$$

به دست می آوریم

$$y(s) = P_{21} w(s) + P_{22} K(s) y(s)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} N^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^T \end{bmatrix} \quad (150-10)$$

$$= \begin{bmatrix} CA \\ CA^T \\ -a_3 C - a_2 CA - a_1 CA^T \end{bmatrix}$$

قضیه کیلی - هامیلتون می گوید که ماتریس  $A$  معادله مشخصه خود را ارضاء می کند، یا

$$A^T + a_1 A^T + a_2 A + a_3 I = 0$$

بنابراین

$$-a_1 CA^T - a_2 CA - a_3 C = CA^T$$

پس سمت راست معادله (150-10) به سمت راست معادله (149-10) تبدیل می شود. در نتیجه

$$N^* A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} N^*$$

که همان معادله (148-10) است. این معادله اخیر را می توان به شکل زیر نوشت

$$N^* A (N^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

اثبات ارائه شده را می توان به سادگی به هر  $n$  مثبتی تعمیم داد.

الف ۱۰-۸ سیستم کاملاً مشاهده پذیر تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (151-10)$$

$$y = Cx + Du \quad (152-10)$$

تعریف می کنیم

$$N = [C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن  $a_n, \dots, a_2, a_1$  ضرایب چندجمله ای مشخصه هستند:

در مثال ۱۰-۱۴ دیدیم که اگر بخواهیم خروجی  $y$  ورودی  $r$  را تا حد ممکن دنبال کند، باید نرم  $H_\infty$  تابع  $\Phi_r(s)$  زیر

$$\Phi_r = \frac{W_s}{1 + KG} \quad (10-132)$$

کمتر از ۱ باشد. [نامساوی (۱۰-۱۲۶) را ببینید.]

توجه کنید که متغیر کنترل شده  $z$  به صورت زیر با اغتشاش  $w$  ارتباط دارد

$$z = \Phi(s) w$$

و با توجه به معادله (۱۰-۱۲۸)

$$\Phi(s) = P_{11} + P_{12} K(I - P_{22} K)^{-1} P_{21}$$

توجه کنید که اگر ماتریس  $P$  را به صورت زیر برگزینیم

$$P = \begin{bmatrix} W_s & -W_s G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (10-133)$$

به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Phi &= P_{11} + P_{12} K(I - P_{22} K)^{-1} P_{21} \\ &= W_s - W_s KG(1 + KG)^{-1} = W_s \left[ 1 - \frac{KG}{1 + KG} \right] \\ &= W_s \left[ \frac{1}{1 + KG} \right] \end{aligned}$$

که همان  $\Phi_r$  معادله (۱۰-۱۳۲) است.

اگر هم شرایط پایداری مقاوم و هم عملکرد مقاوم مورد نیاز باشد، سیستم کنترل باید شرط نامساوی (۱۰-۱۲۷) را برآورده کند که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left\| \begin{bmatrix} W_m \frac{KG}{1 + KG} \\ W_s \frac{KG}{1 + KG} \end{bmatrix} \right\| < 1 \quad (10-134)$$

برای ماتریس  $P$ ، با ترکیب معادلات (۱۰-۱۳۳) و (۱۰-۱۳۱) به دست می‌آوریم

$$P = \begin{bmatrix} W_s & -W_s G \\ 0 & W_m G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (10-135)$$

اگر  $P(s)$  را به صورت معادله (۱۰-۱۳۵) بسازیم، مسئله طراحی سیستم کنترلی که هم پایداری مقاوم و هم عملکرد مقاوم داشته باشد با استفاده از دستگاه تعمیم یافته توصیف شده با معادله (۱۰-۱۳۵) قابل فرمولبندی است. همانطور که قبلاً گفته شد چنین مسئله‌ای مسئله حساسیت آمیخته نامیده می‌شود. با استفاده از دستگاه تعمیم یافته توصیف شده با معادله (۱۰-۱۳۵) می‌توان کنترل کننده  $K(s)$  ارضاء کننده نامساوی (۱۰-۱۳۴) را

یا

$$W \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} W \quad (154-10)$$

طرف چپ (154-10) عبارت است از

$$W \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

طرف راست (154-10) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین درستی (154-10) و در نتیجه درستی (153-10) اثبات می شود.

اکنون نشان می دهیم که

$$CQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$C(WN^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (WN^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^T \end{bmatrix} = C$$

بنابراین نشان داده ایم که

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C(WN^*)^{-1} = CQ$$

**حل مسائل کنترل مقاوم** . سه رهیافت برای حل مسائل کنترل مقاوم وجود دارد. اینها عبارتند از

۱. حل مسئله کنترل مقاوم با یافتن معادلات ریکاتی و حل آنها .
  ۲. حل مسئله کنترل مقاوم با استفاده از رهیافت ماتریس خطی نامساوی .
  ۳. حل مسئله کنترل مقاوم دارای عدم قطعیت ساختاری با استفاده از تحلیل  $\mu$  و سنتز  $\mu$  .
- حل مسائل کنترل مقاوم به هر یک از این سه روش پیشنهادی ریاضی فراوانی را می‌طلبد.

در این بخش تنها مقدمه‌ای از نظریه کنترل مقاوم را معرفی کردیم . حل یک مسئله کنترل مقاوم مستلزم دانش ریاضی فراتر از حد دوره کارشناسی است . به همین خاطر خواننده علاقمند را به گرفتن دروس کارشناسی ارشد کنترل و مطالعه تفصیلی مطالب مربوط به کنترل مقاوم دعوت می‌کنیم .

## مسائل نمونه و حلشان

**الف ۱-۱۰** سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

فرض کنید که این سیستم کاملاً کنترل‌پذیر حالت نیست. یعنی رتبه ماتریس کنترل‌پذیری زیر کمتر از  $n$  است

$$\text{rank}[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] = q < n \quad (۱۰-۱۳۶)$$

یعنی در ماتریس کنترل‌پذیری  $q$  بردار ستونی مستقل خطی وجود دارد. این بردارهای مستقل خطی ستونی را  $f_1, f_2, \dots, f_q$  می‌نامیم . همچنین  $n-q$  بردار دیگر  $v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_n$  انتخاب می‌کنیم ، به نحوی که رتبه ماتریس زیر  $n$  باشد

$$P = [f_1 \mid f_2 \mid \dots \mid f_q \mid v_{q+1} \mid v_{q+2} \mid \dots \mid v_n]$$

با انتخاب ماتریس  $P$  به عنوان ماتریس تبدیل تعریف می‌کنیم

$$P^{-1}AP = \hat{A} \quad , \quad P^{-1}B = \hat{B}$$

نشان دهید که  $\hat{A}$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\hat{A} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right]$$

که در آن  $A_{11}$  یک ماتریس  $q \times q$  ،  $A_{12}$  یک ماتریس  $q \times (n-q)$  ،  $A_{22}$  یک ماتریس  $(n-q) \times (n-q)$  و  $0$  یک ماتریس  $(n-q) \times q$  است. همچنین نشان دهید که ماتریس  $\hat{B}$  را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$\hat{B} = \left[ \begin{array}{c} B_{11} \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

که در آن  $B_{11}$  یک ماتریس  $q \times 1$  ، و  $0$  یک ماتریس  $(n-q) \times 1$  است.

**حل:** توجه کنید که



$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D \\
 &= \frac{\gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + b_0 \\
 &= \frac{b_0 s^3 + (\gamma_1 + a_1 b_0) s^2 + (\gamma_2 + a_2 b_0) s + \gamma_3 + a_3 b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \\
 &= \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}
 \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = b_1 - a_1 b_0, \quad \gamma_2 = b_2 - a_2 b_0, \quad \gamma_3 = b_3 - a_3 b_0.$$

بنابراین

پس نشان داده‌ایم که

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

اثبات ارائه شده را می‌توان به هر  $n$  مثبت صحیحی تعمیم داد.

الف ۹-۱۰ سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری  $N$  زیر ۲ است:

$$N = [C^* \mid A^* C^*] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم کاملاً مشاهده‌پذیر است. معادلات این سیستم را به صورت متعارف مشاهده‌پذیر درآورید.

حل: چون

$$|sI - A| = s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1 s + a_2$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1$$

داریم

تعریف می‌کنیم

$$Q = (WN^*)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{r1} = (n-q) \times q \text{ ماتریس صفر}$$

$$\begin{bmatrix} a_{q+1q+1} & \dots & a_{q+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nq+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{r2}$$

پس معادله (۱۰-۱۳۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{f}_1 & \mathbf{A}\mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{f}_q & \mathbf{A}\mathbf{v}_{q+1} & \mathbf{A}\mathbf{v}_{q+2} & \dots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_q & \mathbf{v}_{q+1} & \mathbf{v}_{q+2} & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

اکنون با توجه به (۱۰-۱۳۸) می‌توان نوشت

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_q & \mathbf{v}_{q+1} & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} \quad (10-139)$$

توجه کنید که براساس معادله (۱۰-۱۳۶) می‌توان  $\mathbf{B}$  را برحسب  $q$  بردار ستونی مستقل  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_q$  نوشت. بنابراین داریم

$$\mathbf{B} = b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + b_{q1}\mathbf{f}_q$$

پس می‌توانیم معادله (۱۰-۱۳۹) را به صورت زیر بنویسیم

$$b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + b_{q1}\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_q & \mathbf{v}_{q+1} & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

می‌توان از معادله (۱۰-۱۳) با در نظر گرفتن مسئله همزاد به دست آورد. یعنی ماتریس  $K_e$  را می‌توان با در نظر گرفتن مسئله جایدهی قطب سیستم همزاد، یافتن ماتریس بهره حالت  $K$  و محاسبه ترانزاد مزدوج آن  $K_e = K^*$  به دست آورد.

حل: برای سیستم داده شده سیستم همزاد عبارت است

$$\dot{z} = A^* z + C^* v \quad (10-16)$$

$$n = B^* z$$

از کنترل فیدبک حالت زیر استفاده می‌کنیم

$$v = -K z$$

و معادله (۱۰-۱۶) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\dot{z} = (A^* - C^* K) z$$

معادله (۱۰-۱۳) عبارت است از

$$K = [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \dots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (10-16)$$

که در آن

$$T = MW = [C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*] W$$

ماتریس مشاهده‌پذیری سیستم اصلی عبارت است از

$$[C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*] = N$$

بنابراین ماتریس  $T$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$T = NW$$

چون  $W = W^*$  داریم

$$T^* = W^* N^* = W N^*$$

و

$$(T^*)^{-1} = (W N^*)^{-1}$$

با گرفتن ترانزاد مزدوج دو طرف معادله (۱۰-۱۴) به دست می‌آوریم

$$K^* = (T^{-1})^* \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (T^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (W N^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

چون  $K_e = K^*$ ، این معادله آخری همان معادله (۱۰-۱۵) است. پس معادله (۱۰-۱۵۹) را با در نظر گرفتن مسئله همزاد به دست آوردیم.

با استفاده از معادله (۱۰-۱۴۲) ستون سوم طرف راست معادله (۱۰-۱۴۱) به صورت زیر درمی آید

$$-a_3 B - a_2 AB - a_1 A^2 B = (-a_3 I - a_2 A - a_1 A^2) B = A^3 B$$

پس معادله (۱۰-۱۴۱)، طرف راست معادله (۱۰-۱۴۰) به صورت زیر درمی آید

$$[B \mid AB \mid A^2 B] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [AB \mid A^2 B \mid A^3 B]$$

و بنابراین سمت چپ و سمت راست معادله (۱۰-۱۴۰) یکی هستند. به این ترتیب نشان داده ایم که معادله (۱۰-۱۴۰) درست است. بنابراین

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

اثبات بالا را به راحتی می توان به هر  $n$  صحیح و مثبتی تعمیم داد.

الف ۱۰-۳ سیستم کنترل پذیر حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

ماتریسهای زیر را تعریف کنید:

$$M = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

که در آن  $a_i$  ها ضرایب چندجمله ای مشخصه هستند

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

$$T = MW$$

همچنین تعریف کنید

نشان دهید که

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$|sI - A + BK| |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| = 0$$

که نتیجه خواسته شده است. چون قطبهای حلقه بسته این سیستم مجموع قطبهای مسئله جایدهی قطب و مشاهده گر می نیمم - مرتبه است، طراحی این دو بخش مستقل از هم می باشد.

الف ۱۰-۱۲ سیستم کاملاً کنترل پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

(۱۶۷-۱۰)

$$y = Cx$$

که در آن  $x =$  بردار حالت  $(n \times 1)$

$u =$  سیگنال کنترل (اسکالر)

$y =$  سیگنال خروجی (اسکالر)

$A =$  ماتریس ثابت  $n \times n$

$B =$  ماتریس ثابت  $n \times 1$

$C =$  ماتریس ثابت  $1 \times n$

فرض کنید که رتبه ماتریس  $(n+1) \times (n+1)$  زیر  $n+1$  است

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که سیستم تعریف شده به صورت زیر کاملاً کنترل پذیر است

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (۱۶۸-۱۰)$$

که در آن

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_e = u(t) - u(\infty)$$

حل: تعریف می کنیم

$$M = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

چون سیستم تعریف شده در معادله (۱۶۷-۱۰) کاملاً کنترل پذیر است، رتبه ماتریس  $M$  برابر  $n$  است. پس رتبه

ماتریس زیر  $n+1$  است

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AM & B \\ -CM & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۶۹-۱۰)$$

چون ماتریس زیر دارای رتبه  $n+1$  است

توجه کنید که معادله (۱۰-۱۴۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$B = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = MW = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به این که

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [B \mid AB \mid A^2B] \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [B \mid AB \mid A^2B] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

داریم

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اثبات بالا را به راحتی می توان به هر  $n$  صحیح و مثبتی تعمیم داد.

الف ۱۰-۴ معادله حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مرتبه ماتریس کنترل پذیری  $M$  زیر ۲ است

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم کاملاً کنترل پذیر است. این معادله حالت را به شکل متعارف کنترل پذیر تبدیل کنید.

حل: چون

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix} = (s-1)(s+3) + 4 \\ &= s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1s + a_0 \end{aligned}$$

داریم

$$a_1 = 2, \quad a_0 = 1$$

تعریف می کنیم

$$T = MW$$

که در آن

فرض کنید که

$$b = 0.6 \text{ N-s/m}, \quad k = 36 \text{ N/m}, \quad m_1 = 2 \text{ kg}, \quad m_2 = 1 \text{ kg}$$

حل: معادلات سیستم عبارت اند از

$$m_1 \ddot{y}_1 = k(y_2 - y_1) + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

با گذاشتن مقادیر عددی و ساده سازی به دست می آوریم

$$\ddot{y}_1 = -36 y_1 + 36 y_2 + 0.6 \dot{y}_1 + 0.6 \dot{y}_2 + u$$

$$\ddot{y}_2 = -18 y_1 - 18 y_2 + 0.3 \dot{y}_1 + 0.3 \dot{y}_2$$

متغیرهای حالت را به صورت زیر برمی گزینیم

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = \dot{y}_1$$

$$x_4 = \dot{y}_2$$

بنابراین معادله حالت به صورت زیر درمی آیند

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36 & 36 & 0.6 & 0.6 \\ 18 & -18 & 0.3 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

تعریف می کنیم

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -36 & 36 & 0.6 & 0.6 \\ 18 & -18 & 0.3 & -0.3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{aa} & A_{ab} \\ \hline A_{ba} & A_{bb} \end{array} \right], \quad B = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} B_a \\ \hline B_b \end{array} \right]$$

ماتریس بهره فیدبک و ماتریس بهره مشاهده گر را به استفاده از برنامه MATLAB ۱۰-۲۶ به دست می آوریم که به صورت زیر است

$$K = [130.4444 \quad -41.5556 \quad 23.1000 \quad 15.4185]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 14.4 & 0.6 \\ 0.3 & 15.7 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس  $A$ ، ۱- و ۲- است.

می‌خواهیم با استفاده از فیدبک حالتی به شکل  $u = -Kx$  مقادیر ویژه را در ۳- و ۵- قرار دهیم. بهره فیدبک حالت لازم  $K$  و سیگنال کنترل  $u$  را بیابید.

حل: سیستم داده شده کاملاً کنترل پذیر است، زیرا رتبه ماتریس کنترل پذیری زیر ۲ است

$$M = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان جایدهی قطب را صورت داد.

چون معادله مشخصه سیستم اصلی به صورت زیر است

$$s^2 + 3s + 2 = s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

داریم

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2$$

معادله مشخصه مورد نظر عبارت است از

$$(s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2 = 0$$

بنابراین

$$\alpha_1 = 8, \quad \alpha_2 = 15$$

اشاره به این نکته مهم است که معادله حالت اصلی به صورت متعارف کنترل پذیر نیست، زیرا ماتریس  $B$  به صورت زیر نیست

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس تبدیل  $T$  را تعیین می‌کنیم.

$$T = MW = [B \mid AB] \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

بنابراین

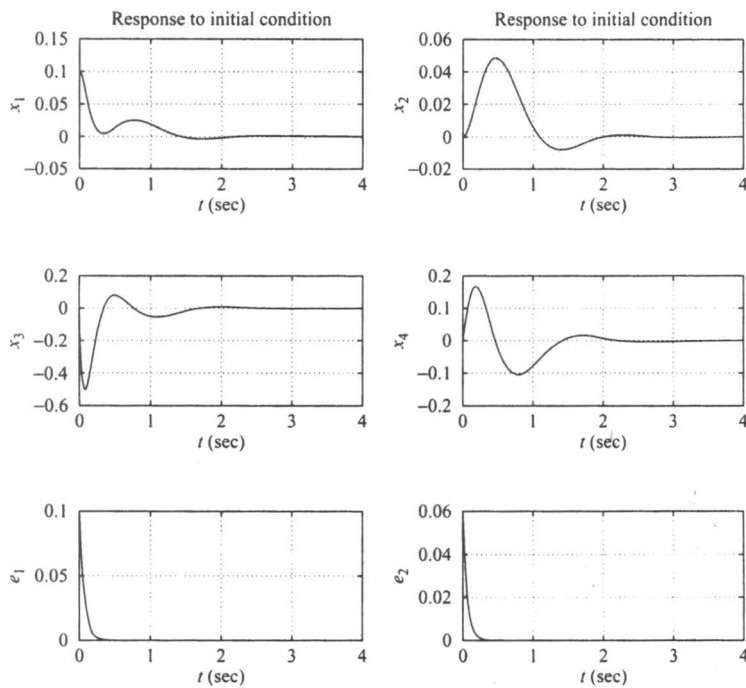
با توجه به معادله (۱۰-۱۳) ماتریس بهره فیدبک عبارت است از

$$\begin{aligned} K &= [\alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1} \\ &= [15 - 2 \mid 8 - 3] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [6.5 \quad 2.5] \end{aligned}$$

که سیگنال کنترل زیر را به دست می‌دهد

$$u = -Kx = -[6.5 \quad 2.5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$





شکل ۱۰-۵۰

پاسخ به شرایط اولیه.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BKF \\ 0 & A_{bb}-K_e A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

ماتریس حالت  $6 \times 6$  است. پاسخ سیستم به شرایط اولیه داده شده را می‌توان با استفاده از برنامه ۱۰-۲۷ به دست آورد. منحنی‌های پاسخ در شکل ۱۰-۵۰ نشان داده شده‌اند. این منحنی‌ها قابل قبول به نظر می‌آیند.

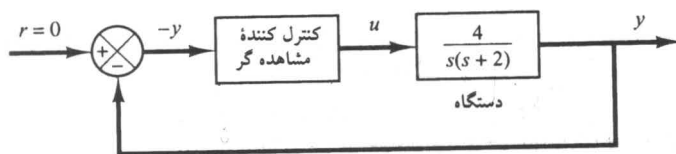
الف ۱۰-۱۴ سیستم شکل ۱۰-۵۱ را در نظر بگیرید. برای دستگاه یک مشاهده‌گر کامل مرتبه و یک مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه طراحی کنید. قطبهای حلقه بسته برای مسئله جایدهی قطب عبارت‌اند از

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \quad s = -2 - j2\sqrt{3}$$

قطبهای مطلوب مشاهده‌گر را نیز به صورت زیر فرض کنید:

$$s = -8, \quad s = -8$$

$$(ب) \text{ برای مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه } s = -8$$



شکل ۱۰-۵۱ سیستم تنظیم کننده.

## MATLAB Program 10-25

```

A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
B = [0; 0; 10];
J = [-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3) -10];
K = place(A,B,J)
place: ndigits= 15

K =

    15.4000    4.5000    0.8000

```

ماتریس مشاهده پذیری را به صورت زیر تعریف کنید

$$N = [C^* \mid A^*C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1}C^*]$$

نشان دهید که

$$N^* A (N^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (10-146)$$

که در آن  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ضرایب چندجمله‌ای مشخصه هستند:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

حل: حالت  $n=3$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین معادله (10-146) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$N^* A (N^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (10-147)$$

و (10-147) را نیز می‌توان به شکل زیر درآورد

$$N^* A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} N^* \quad (10-148)$$

نشان می‌دهیم که معادله (10-148) درست است. طرف چپ این معادله به صورت زیر است

$$N^* A = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (10-149)$$

طرف راست معادله (10-148) عبارت است از

**MATLAB Program 10-28**

% Obtaining matrices K and Ke.

A = [0 1; 0 -2];

B = [0; 4];

C = [1 0];

J = [-2+j\*2\*sqrt(3) -2-j\*2\*sqrt(3)];

L = [-8 -8];

K = acker(A,B,J)

K =

4.0000 0.5000

Ke = acker(A',C',L)'

Ke =

14

36

به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از برنامه ۱۰-۲۸ برای بخش جایدهی قطب بردار بهره فیدبک زیر را به دست می‌آوریم

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس بهره مشاهده‌گر کامل مرتبه را می‌یابیم. برنامه ۱۰-۲۸ این ماتریس را به صورت زیر به دست

می‌دهد

$$K_e = \begin{bmatrix} 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

اکنون پاسخ این سیستم به شرایط اولیه داده شده را می‌یابیم. با توجه به معادله (۱۰-۷۰) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

این معادله رفتار دینامیکی سیستم طراحی شده با رهیافت مشاهده‌گر کامل مرتبه را بیان می‌کند. منحنیهای پاسخ با استفاده از برنامه ۱۰-۲۹ به دست آمده‌اند و در شکل ۱۰-۵۲ دیده می‌شوند.

برای یافتن تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده‌گر از برنامه ۱۰-۳۰ MATLAB استفاده کرده‌ایم و نتیجه زیر را

یافته‌ایم

$$\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{74s + 256}{s^2 + 18s + 108} = \frac{74(s + 3/4595)}{(s + 9 + j5/1962)(s + 9 - j5/1962)}$$

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$Q = (WN^*)^{-1}$$

نشان دهید که

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$CQ = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

که در آن  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ضرایب چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل  $C(sI - A)^{-1}B + D$  نوشته شده به صورت زیر هستند

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

که در آن  $D = b_0$ .

حل: حالت  $n=3$  را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که

$$Q^{-1}AQ = (WN^*)A(WN^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (153-150)$$

با توجه به مسئله الف-۱۰-۷ داریم

$$(WN^*)A(WN^*)^{-1} = W[N^*A(N^*)^{-1}]W^{-1} = W \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} W^{-1}$$

بنابراین باید نشان دهیم که

$$W \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} W^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

**MATLAB Program 10-30**

% Determination of transfer function of observer controller ---- full-order observer

A = [0 1; 0 -2];

B = [0; 4];

C = [1 0];

K = [4 0.5];

Ke = [14; 36];

[num,den] = ss2tf(A-Ke\*C-B\*K, Ke,K,0)

num =

0 74.0000 256.0000

den =

1 18 108

**MATLAB Program 10-31**

% Obtaining Ke ---- minimum-order observer

Aab = [1];

Abb = [-2];

LL = [-8];

Ke = acker(Abb',Aab',LL)'

Ke =

6

اکنون ماتریس بهره مشاهده گر می‌نیم - مرتبه را می‌یابیم. از برنامه MATLAB ۱۰-۳۱ استفاده می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$K_e = 6$$

پاسخ سیستم دارای مشاهده گر می‌نیم - مرتبه به شرایط اولیه را می‌توان به صورت زیر یافت: با گذاشتن  $u = -K\bar{x}$  در معادلات دستگاه، یعنی معادله (۷۹-۱۰) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}K_b e$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}$$

معادله (۱۵۱-۱۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} u \quad (155-10)$$

و معادله (۱۵۲-۱۰) به صورت زیر

$$y = \mathbf{C} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}} + D u \quad (156-10)$$

با توجه به معادله (۱۵۳-۱۰) معادله (۱۵۵-۱۰) به ازای  $n=3$  به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} u$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}$$

تابع تبدیل  $G(s)$  سیستم تعریف شده با معادلات (۱۵۵-۱۰) و (۱۵۶-۱۰) عبارت است از

$$G(s) = \mathbf{C} \mathbf{Q} (s\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} + D$$

با توجه به این که

$$\mathbf{C} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

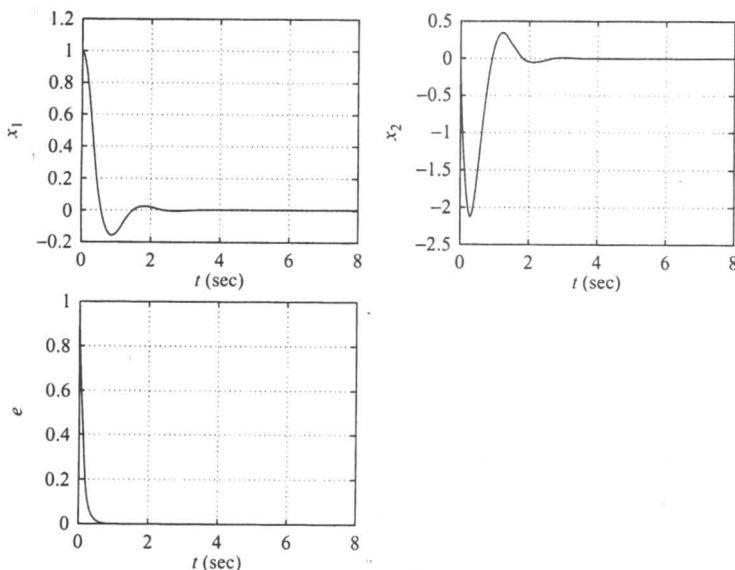
داریم

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & a_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s+a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D$$

توجه کنید که  $D = b_0$ . چون

$$\begin{bmatrix} s & 0 & a_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s+a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \begin{bmatrix} s^2 + a_1 s + a_2 & -a_3 & -a_3 s \\ s + a_1 & s^2 + a_1 s & -a_2 s - a_3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

داریم



شکل ۱۰-۵۳

پاسخ به شرایط اولیه.

**MATLAB Program 10-33**

% Determination of transfer function of observer controller ---- minimum-order observer

 $A = [0 \ 1; 0 \ -2];$  $B = [0; 4];$  $A_{aa} = 0; A_{ab} = 1; A_{ba} = 0; A_{bb} = -2;$  $B_a = 0; B_b = 4;$  $K_a = 4; K_b = 0.5;$  $K_e = 6;$  $A_{hat} = A_{bb} - K_e * A_{ab};$  $B_{hat} = A_{hat} * K_e + A_{ba} - K_e * A_{aa};$  $F_{hat} = B_b - K_e * B_a;$  $A_{tilde} = A_{hat} - F_{hat} * K_b;$  $B_{tilde} = B_{hat} - F_{hat} * (K_a + K_b * K_e);$  $C_{tilde} = -K_b;$  $D_{tilde} = -(K_a + K_b * K_e);$  $[num, den] = ss2tf(A_{tilde}, B_{tilde}, C_{tilde}, D_{tilde})$ 

num =

7 32

den =

1 10

نمودارهای بوده سیستم ۱ (سیستم حلقه بسته با مشاهده گر کامل مرتبه) و سیستم ۲ (سیستم حلقه بسته مشاهده گر می نیمم - مرتبه) در شکل ۱۰-۵۴ نشان داده شده است. پهنای باند سیستم ۲ بزرگتر از سیستم ۱ است. مشخصه حذف نویز فرکانس بالای سیستم ۱ بهتر از سیستم ۲ است.

که در آن

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

و

تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{x} = Q \hat{\mathbf{x}}$$

و معادلات حالت به صورت زیر درمی‌آید

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = Q^{-1} A Q \hat{\mathbf{x}} + Q^{-1} B u$$

یا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (157-10)$$

معادله خروجی به صورت زیر است

$$y = C Q \hat{\mathbf{x}}$$

یا

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (158-10)$$

معادلات (157-10) و (158-10) به شکل متعارف مشاهده پذیر هستند.

الف ۱۰-۱۰ برای سیستم تعریف شده به صورت زیر

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B u$$

$$y = C \mathbf{x}$$

یک مشاهده‌گر حالت طراحی کنید که مقادیر ویژه ماتریس بهره مشاهده‌گر آن  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  باشد.

نشان دهید که ماتریس مشاهده‌گر حالت به دست آمده از معادله (۱۰-۶۱) را، که به صورت زیر بازنویسی

شده

$$K_e = (W N^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (159-10)$$



$$-X(0) = -Q = A^* \left( \int_0^\infty X dt \right) + \left( \int_0^\infty X dt \right) A$$

تعریف می کنیم

$$P = \int_0^\infty X dt = \int_0^\infty e^{A^* t} Q e^{A t} dt$$

توجه کنید که درایه های  $e^{A t}$  جمع محدودی از جملاتی چون  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $t e^{\lambda_1 t}$ , ...,  $t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}$  است، که در آن  $\lambda_i$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  و  $m_i$  تکرار  $\lambda_i$  است. چون بخش حقیقی  $\lambda_i$  منفی است، انتگرال زیر وجود دارد

$$\int_0^\infty e^{A^* t} Q e^{A t} dt$$

توجه کنید که

$$P^* = \int_0^\infty e^{A^* t} Q e^{A t} dt = P$$

بنابراین  $P$  هرمیتی (و در صورت حقیقی بودن  $P$  متقارن) است. بنابراین نشان دادیم که برای هر ماتریس پایدار  $A$  و یک ماتریس مثبت معین هرمیتی  $Q$ ، یک ماتریس  $P$  وجود دارد به نحوی که  $A^* P + P A = -Q$ . اکنون باید ثابت کنیم که  $P$  مثبت معین است. شکل هرمیتی زیر را در نظر بگیرید

$$x^* P x = x^* \int_0^\infty e^{A^* t} Q e^{A t} dt x$$

$$= \int_0^\infty (e^{A^* t} x)^* Q (e^{A t} x) dt > 0, \quad x \neq 0 \quad \text{به ازای}$$

$$= 0, \quad x = 0 \quad \text{به ازای}$$

بنابراین  $P$  مثبت معین و اثبات کامل است.

الف ۱۰-۱۶ یک سیستم کنترل در زیر توصیف شده است

$$\dot{x} = A x + B u \quad (10-173)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{که در آن}$$

قاعده کنترل خطی زیر را در نظر بگیرید

$$u = -K x = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \quad (10-174)$$

ثابت های  $k_1$  و  $k_2$  را برای می نیمم کردن شاخص عملکرد زیر تعیین کنید

$$J = \int_0^\infty x^T x dt$$

تنها شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$x(0) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف ۱۰-۱۱ یک سیستم کنترل با فیدبک حالت مشاهده شده با مشاهده گر می نیمم - مرتبه توصیف شده با معادلات زیر در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (10-162)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \quad (10-163)$$

که در آن

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}$$

$x_a$  متغیر حالتی است که می توان مستقیماً اندازه گرفت و  $\tilde{x}_b$  متغیرهای حالت مشاهده شده را نشان می دهد. نشان دهید که قطبهای حلقه بسته سیستم از مجموع قطبهای حلقه بسته ناشی از جایدی قطب (مقادیر ویژه ماتریس  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  و قطبهای حلقه بسته ناشی از مشاهده گر می نیمم - مرتبه (مقادیر ویژه ماتریس  $(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})$  تشکیل می شود.

حل: معادله خطای مشاهده گر می نیمم - مرتبه را می توان به صورت داده شده در معادله (۱۰-۹۴) به دست آورد، که در زیر بازنویسی شده است

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \quad (10-164)$$

در این معادله

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b$$

از معادلات (۱۰-۱۶۲) و (۱۰-۱۶۳) به دست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b - \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (10-165)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K} \left\{ \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \right\} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

با ترکیب معادلات (۱۰-۱۶۴) و (۱۰-۱۶۵) و نوشتن

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_a \mid \mathbf{K}_b]$$

به دست می آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K}_b \\ 0 & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (10-166)$$

معادله (۱۰-۱۶۶) رفتار دینامیکی سیستم کنترل با فیدبک حالت مشاهده شده با مشاهده گر می نیمم - مرتبه را نشان می دهد. معادله مشخصه این سیستم عبارت است از

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K}_b \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab} \end{vmatrix} = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8k_2} \end{bmatrix}$$

پس شاخص عملکرد به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{x}^T(\circ) P \mathbf{x}(\circ) \\ &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = p_{11} c^2 \quad (177-10) \\ &= \left( \frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} \right) c^2 \end{aligned}$$

برای می نیمم کردن  $J$  از آن نسبت به  $k_2$  مشتق گرفته، نتیجه را برابر صفر قرار می دهیم

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \left( \frac{-5}{2k_2^2} + \frac{1}{8} \right) c^2 = 0$$

$$k_2 = \sqrt{20} \quad \text{بنابراین}$$

به ازای این مقدار  $k_2$ ،  $\partial^2 J / \partial k_2^2 > 0$ . پس می نیمم مقدار  $J$  با گذاشتن این  $k_2$  در معادله (177-10) به دست می آید

$$J_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2} c^2$$

قاعده کنترلی سیستم طراحی شده به صورت زیر است

$$u = -4x_1 - \sqrt{20} x_2$$

این سیستم از این لحاظ که شاخص عملکرد در شرایط اولیه داده شده می نیمم می شود، بهینه است.

الف ۱۷-۱۰ سیستم آونگ وارون مورد بحث در مثال ۱۰-۵ را در نظر بگیرید. سیستم در شکل ۱۰-۸ نشان داده شده است و در آن  $M = 2 \text{ kg}$ ،  $m = 0.1 \text{ kg}$  و  $l = 0.5 \text{ m}$ . شکل ۱۰-۹ نمودار بلوکی سیستم را نشان می دهد. معادلات سیستم عبارت است از

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u$$

$$y = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

$$u = -\mathbf{K} \mathbf{x} + k_1 \xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C} \mathbf{x}$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

طرف چپ معادله (۱۰-۱۶۹) دارای رتبه  $n+1$  است. بنابراین رتبه طرف راست معادله (۱۰-۱۶۹) نیز  $n+1$  است. چون

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} AM & B \\ -CM & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] & B \\ -C[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AB & A^2B & \dots & A^nB & B \\ -CB & -CA^2B & \dots & -CA^{n-1}B & 0 \end{bmatrix} \\ &= [\hat{A}\hat{B} \mid \hat{A}^2\hat{B} \mid \dots \mid \hat{A}^n\hat{B} \mid \hat{B}] \end{aligned}$$

ماتریس زیر دارای رتبه  $n+1$  است

$$[\hat{B} \mid \hat{A}\hat{B} \mid \hat{A}^2\hat{B} \mid \dots \mid \hat{A}^n\hat{B}]$$

پس سیستم معادله (۱۰-۱۶۸) کاملاً کنترل پذیر است.

الف ۱۰-۱۳ سیستم شکل ۱۰-۴۹ را در نظر بگیرید. با استفاده از رهیافت جایدهی قطب با مشاهده گر یک سیستم تنظیم کننده طراحی کنید به نحوی که سیستم با وجود اغتشاش موقعیت صفر داشته باشد ( $y_1=0$ ) و  $y_2=0$ ). قطبهای حلقه بسته برای جایدهی قطب را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \quad s = -2 - j2\sqrt{3}, \quad s = -10, \quad s = -10$$

قطبهای مشاهده گر می نیمم - مرتبه باید به صورت زیر باشد

$$s = -15, \quad s = -16$$

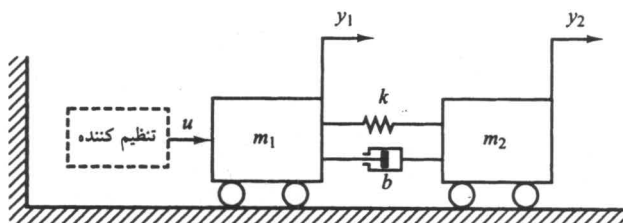
ابتدا ماتریس بهره فیدبک  $K$  و ماتریس بهره مشاهده گر  $K_e$  را تعیین کنید. سپس پاسخ سیستم به یک حالت اولیه دلخواه، مثلاً حالت داده شده در زیر را بیابید

$$y_1(0)=0.1, \quad y_2(0)=0, \quad \dot{y}_1(0)=0, \quad \dot{y}_2(0)=0$$

$$e_1(0)=0.1, \quad e_2(0)=0.05$$

که در آن  $e_1$  و  $e_2$  به صورت زیر تعریف می شوند

$$e_1 = y_1 - \bar{y}_1, \quad e_2 = y_2 - \bar{y}_2$$



شکل ۱۰-۴۹

سیستم مکانیکی.

**MATLAB Program 10-34**

% Design of quadratic optimal control system

A = [0 1 0 0; 20.601 0 0 0; 0 0 0 1; -0.4905 0 0 0];

B = [0; -1; 0; 0.5];

C = [0 0 1 0];

D = [0];

Ahat = [A zeros(4,1); -C 0];

Bhat = [B; 0];

Q = [100 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];

R = [0.01];

Khat = lqr(Ahat, Bhat, Q, R)

Khat =

-188.0799 -37.0738 -26.6767 -30.5824 10.0000

$$k_1 = -188.0799, \quad k_2 = -37.0738, \quad k_3 = -26.6767$$

$$k_4 = -30.5824, \quad k_5 = 10.0000$$

پاسخ پله واحد. پس از تعیین ماتریس بهره فیدبک و ثابت بهره انتگرال می‌توانیم پاسخ پله سیستم طراحی شده را بیابیم. معادله سیستم عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} r \quad (10-178)$$

[معادله (10-35) را ببینید.] چون

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 \xi$$

می‌توانیم معادله (10-178) را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}k_1 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} r \quad (10-179)$$

معادله خروجی به صورت زیر است

$$y = [\mathbf{C} \quad \mathbf{o}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + [\mathbf{o}] r$$

برنامه ۱۰-۳۵ پاسخ پله سیستم را براساس معادله (10-179) به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ در شکل ۱۰-۵۵ نشان داده شده است. این شکل منحنی‌های پاسخ  $x_1(t) = \theta$  بر حسب  $t$ ،  $x_2(t) = \dot{\theta}$  بر حسب  $t$ ،  $y = x_3(t)$  بر حسب  $t$ ،  $\dot{y} = x_4(t)$  بر حسب  $t$ ، و  $\xi = x_5(t)$  بر حسب  $t$ ، را نشان می‌دهد؛ ورودی

**MATLAB Program 10-26**

```

A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; -36 36 -0.6 0.6; 18 -18 0.3 -0.3];
B = [0; 0; 1; 0];
J = [-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3) -10 -10];
K = acker(A,B,J)
K =
    130.4444   -41.5556    23.1000    15.4185
Aab = [1 0; 0 1];
Abb = [-0.6 0.6; 0.3 -0.3];
L = [-15 -16];
Ke = place(Abb', Aab', L)
place: ndigits= 15
Ke =
    14.4000    0.6000
    0.3000    15.7000

```

پاسخ به شرایط اولیه: حال پاسخ سیستم طراحی شده به شرایط اولیه داده شده را می‌یابیم. چون

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix}$$

داریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (10-17)$$

توجه کنید که

$$\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{e} = \mathbf{F}\mathbf{e}$$

که در آن

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

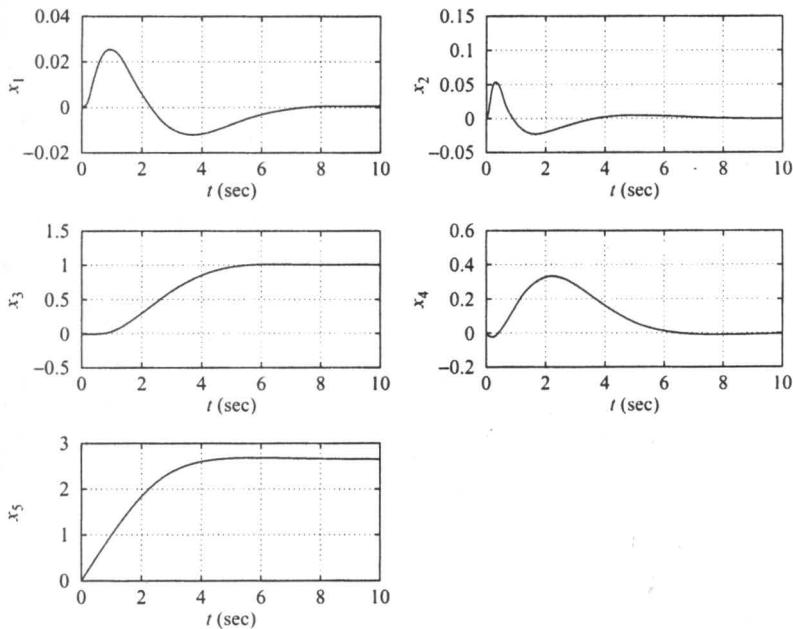
پس معادله (10-17) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}\mathbf{F}\mathbf{e} \quad (10-18)$$

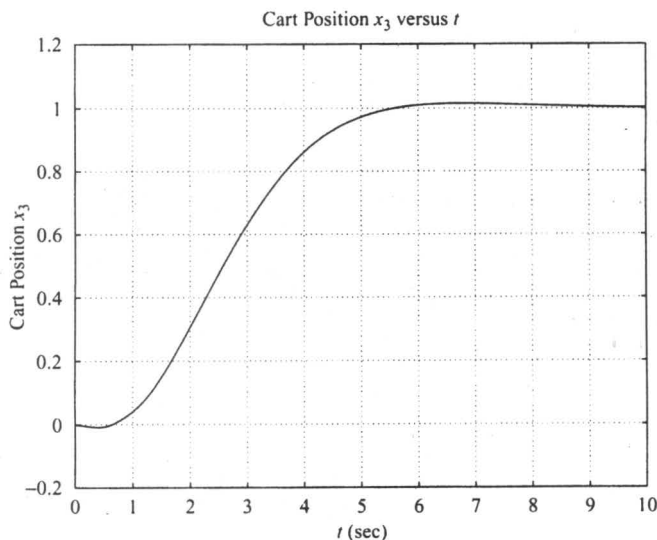
از معادله (10-9) به دست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \quad (10-19)$$

ترکیب معادلات (10-19) و (10-18) به دست می‌دهد



شکل ۱۰-۵۵  
منحنیهای پاسخ پله.



شکل ۱۰-۵۶  
موقعیت ارا به بر حسب زمان.

الف ۱۰-۱۸ پایداری یک سیستم دارای عدم قطعیت جمعی نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۷ (الف) را در نظر بگیرید. تعریف کنید

$\bar{G}$  = دینامیک واقعی دستگاه

$G$  = مدل دینامیکی دستگاه

$\Delta_a$  = عدم قطعیت غیر ساختاری جمعی

**MATLAB Program 10-27**

```
% Response to initial condition
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; -36 36 -0.6 0.6; 18 -18 0.3 -0.3];
B = [0; 0; 1; 0];
K = [130.4444 -41.5556 23.1000 15.4185];
Ke = [14.4 0.6; 0.3 15.7];
F = [0 0; 0 0; 1 0; 0 1];
Aab = [1 0; 0 1];
Abb = [-0.6 0.6; 0.3 -0.3];
AA = [A-B*K B*K*F; zeros(2,4) Abb-Ke*Aab];
sys = ss(AA, eye(6), eye(6), eye(6));
t = 0:0.01:4;
y = initial(sys, [0.1; 0; 0; 0; 0.1; 0.05], t);
x1 = [1 0 0 0 0 0]*y';
x2 = [0 1 0 0 0 0]*y';
x3 = [0 0 1 0 0 0]*y';
x4 = [0 0 0 1 0 0]*y';
e1 = [0 0 0 0 1 0]*y';
e2 = [0 0 0 0 0 1]*y';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid; title('Response to initial condition'),
xlabel('t (sec)'); ylabel('x1')
subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid; title('Response to initial condition'),
xlabel('t (sec)'); ylabel('x2')
subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid; xlabel('t (sec)'); ylabel('x3')
subplot(3,2,4); plot(t,x4); grid; xlabel('t (sec)'); ylabel('x4')
subplot(3,2,5); plot(t,e1); grid; xlabel('t (sec)'); ylabel('e1')
subplot(3,2,6); plot(t,e2); grid; xlabel('t (sec)'); ylabel('e2')
```

پاسخ به شرایط اولیه را برای دو سیستم مقایسه کنید. داریم

(الف) برای مشاهده گر کامل مرتبه

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad e_1(0) = 1, \quad e_2(0) = 0$$

(ب) برای مشاهده گر می نیم - مرتبه

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad e_1(0) = 1$$

پهنای باند دو سیستم را نیز مقایسه کنید.

حل: ابتدا نمایش فضای حالت سیستم را به دست می آوریم. با تعریف متغیرهای حالت به صورت زیر است

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$



حل . تابع تبدیل از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  شکل ۵۷-۱۰ (الف) را به دست می آوریم . ابتدا شکل ۵۷-۱۰ (الف) را به صورت شکل ۵۷-۱۰ (ب) رسم می کنیم . سپس تابع تبدیل نقطه  $A$  به نقطه  $B$  را به صورت زیر به دست می آوریم

$$\frac{K}{1+GK} = K(1+GK)^{-1}$$

تعریف می کنیم

$$K(1+GK)^{-1} = T_a$$

بنابراین شکل ۵۷-۱۰ (ب) را می توان به صورت شکل ۵۷-۱۰ (ج) رسم کرد. طبق قضیه بهره کوچک شرط پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته به صورت زیر است

$$\|\Delta_a T_a\|_{\infty} < 1 \quad (۱۸۰-۱۰)$$

چون مدل کردن دقیق  $\Delta_a$  ممکن نیست ، باید یک تابع تبدیل اسکالر  $W_a(j\omega)$  بیابیم ، به نحوی که

$$\bar{\sigma}\{\Delta_a(j\omega)\} < |W_a(j\omega)| \quad , \quad \text{برای تمام مقادیر } \omega$$

و این  $W_a(j\omega)$  را به جای  $\Delta_a$  به کار ببریم . در این صورت شرط پایداری مقاوم سیستم حلقه را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\|W_a T_a\|_{\infty} < 1 \quad (۱۸۱-۱۰)$$

در صورت برقراری نامساوی (۱۸۱-۱۰) نامساوی (۱۸۰-۱۰) نیز برقرار است . پس این شرط پایداری مقاوم سیستم طراحی شده را تضمین می کند. در شکل ۵۷-۱۰ (ه) به جای  $\Delta_a$  شکل ۵۷-۱۰ (د)  $W_a I$  گذاشته شده است .

به طور خلاصه ، اگر نرم  $H_{\infty}$  تابع تبدیل از  $w$  به  $z$  کمتر از یک باشد ، کنترل کننده  $K$  ارضاء کننده نامساوی (۱۸۱-۱۰) را می توان تعیین کرد.

شکل ۵۷-۱۰ (ه) را می توان به صورت شکل ۵۷-۱۰ (و) رسم کرد که نمودار دستگاه تعمیم یافته سیستم است .

توجه کنید که در این مسئله ماتریس  $\Phi$  رابطه بین متغیر کنترل شده  $z$  و اغتشاش  $w$  را به صورت زیر تعیین می کند

$$z = \Phi(s)w = (W_a T_a)w = [W_a K(I+GK)^{-1}]w$$

توجه کنید که  $u(s) = K(s)y(s)$  و با توجه به معادله (۱۲۸-۱۰) ،  $\Phi(s)$  به صورت زیر توسط درایه های ماتریس  $P$  تعیین می شود

$$\Phi(s) = P_1 + P_2 K(I - P_2 K)^{-1} P_1$$

برای این که این  $\Phi(s)$  با  $W_a K(I+GK)^{-1}$  برابر باشد ، انتخاب می کنیم  $P_1 = 0$  ،  $P_2 = W_a$  ،  $P_1 = I$  ، و

**MATLAB Program 10-29**

```
% Response to initial condition ---- full-order observer
```

```
A = [0 1; 0 -2];
```

```
B = [0; 4];
```

```
C = [1 0];
```

```
K = [4 0.5];
```

```
Ke = [14; 36];
```

```
AA = [A-B*K B*K; zeros(2,2) A-Ke*C];
```

```
sys = ss(AA, eye(4), eye(4), eye(4));
```

```
t = 0:0.01:8;
```

```
x = initial(sys, [1; 0; 1; 0], t);
```

```
x1 = [1 0 0 0]*x';
```

```
x2 = [0 1 0 0]*x';
```

```
e1 = [0 0 1 0]*x';
```

```
e2 = [0 0 0 1]*x';
```

```
subplot(2,2,1); plot(t,x1); grid
```

```
xlabel('t (sec)'); ylabel('x1')
```

```
subplot(2,2,2); plot(t,x2); grid
```

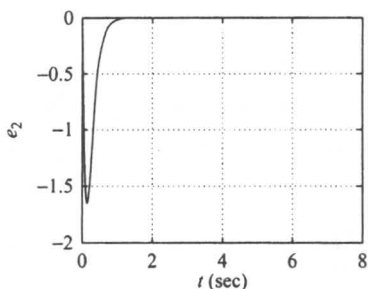
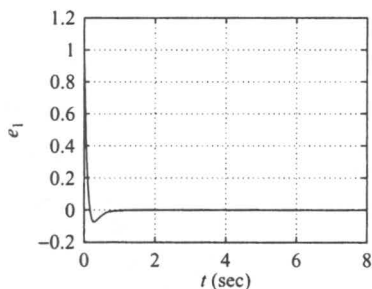
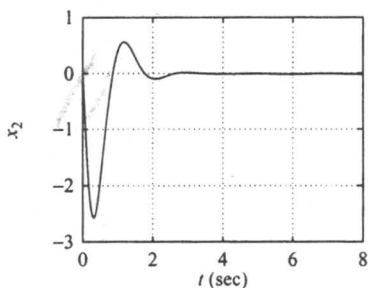
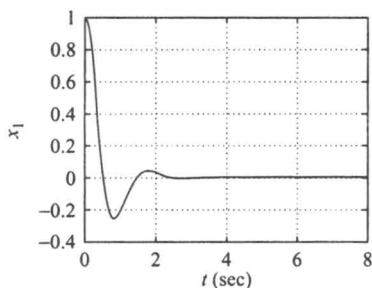
```
xlabel('t (sec)'); ylabel('x2')
```

```
subplot(2,2,3); plot(t,e1); grid
```

```
xlabel('t (sec)'); ylabel('e1')
```

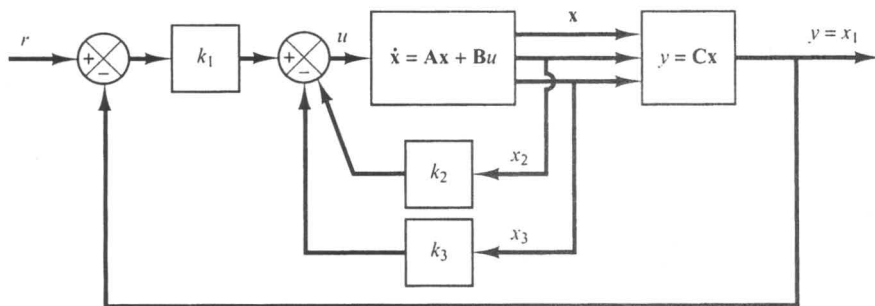
```
subplot(2,2,4); plot(t,e2); grid
```

```
xlabel('t (sec)'); ylabel('e2')
```

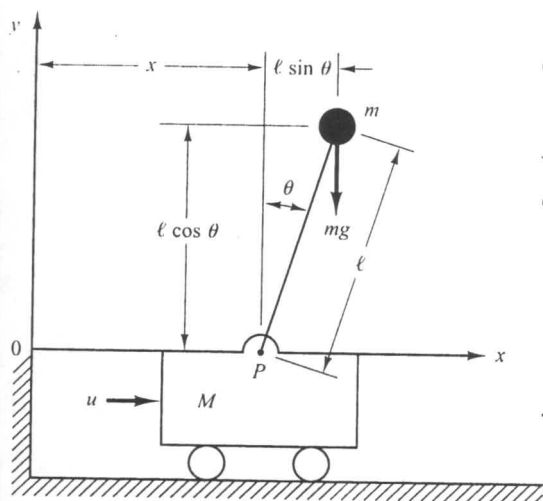


شکل ۱۰-۵۲

منحنی‌های پاسخ به شرایط اولیه.



شکل ۱۰-۵۸ سیستم سرووی نوع ۱.



شکل ۱۰-۵۹ سیستم آونگ وارون.

می‌خواهیم قطبهای حلقه بسته به صورت زیر باشند

$$s = -2.0, \quad s = -2.0$$

$$s = -4 + j4, \quad s = -4 - j4$$

ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  را تعیین کنید.

با استفاده از ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$  تعیین شده عملکرد سیستم را با شبیه‌سازی کامپیوتری تعیین کنید. یک برنامه MATLAB بنویسید که پاسخ سیستم به ازای شرایط اولیه دلخواهی را تعیین کند.

ب ۱۰-۷ مسئله ب-۱۰-۶ را با MATLAB حل کنید.

ب ۱۰-۸ سیستم سرووی نوع ۱ شکل ۱۰-۵۸ را در نظر بگیرید. ماتریسهای نشان داده شده در این شکل عبارت‌اند از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثابت‌های بهره  $k_1$ ،  $k_2$ ، و  $k_3$  را به نحوی تعیین کنید که قطبهای حلقه بسته در محل‌های زیر قرار گیرند  $s = -1.0$ ،  $s = -2 - j4$ ،  $s = -2 + j4$

پاسخ پله سیستم را یافته، منحنی خروجی  $y(t)$  بر حسب  $t$  را رسم کنید.

ب ۱۰-۹ سیستم آونگ وارون شکل ۱۰-۵۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که

$$l = 1 \text{ m}, \quad m = 0.5 \text{ kg}, \quad M = 2 \text{ kg}$$

متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف کنید

$$x_4 = \dot{x}, \quad x_3 = x, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_1 = \theta$$

متغیرهای خروجی عبارت‌اند از

$$y_2 = x = x_3, \quad y_1 = \theta = x_1$$

معادلات حالت این سیستم را بیاید.

معادله خطا عبارت است از

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab})e$$

بنابراین رفتار دینامیکی سیستم به صورت زیر توصیف می شود

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_b \\ 0 & A_{bb} - K_e A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

برنامه ۱۰-۳۲ MATLAB پاسخ به شرایط اولیه را براساس این معادله به دست می دهد. منحنی های حاصل در شکل ۱۰-۵۳ نشان داده شده است.

### MATLAB Program 10-32

% Response to initial condition ---- minimum-order observer

```
A = [0 1; 0 -2];
B = [0; 4];
K = [4 0.5];
Kb = 0.5;
Ke = 6;
Aab = 1; Abb = -2;
AA = [A-B*K B*Kb; zeros(1,2) Abb-Ke*Aab];
sys = ss(AA, eye(3), eye(3), eye(3));
t = 0:0.01:8;
x = initial(sys, [1; 0; 1], t);
x1 = [1 0 0]*x';
x2 = [0 1 0]*x';
e = [0 0 1]*x';

subplot(2,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e); grid
xlabel('t (sec)'); ylabel('e')
```

تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده گر می نیم - مرتبه با استفاده از برنامه ۱۰-۳۳ MATLAB به دست آمده و به صورت زیر است

$$\frac{\text{num}}{\text{de}} = \frac{Vs + 32}{s + 10} = \frac{V(s + 4.5714)}{s + 10}$$

کنترل کننده مشاهده گر به وضوح یک جبران ساز پیشفاز است.

ب ۱۰-۱۶ با استفاده از رهیافت جایدهی قطب و مشاهده‌گر سیستمهای کنترل شکلهای ۱۰-۶۱ (الف) و (ب) را طراحی کنید قطبهای حلقه بسته بخش جایدهی قطب به صورت زیر است

$$s = -2 + j2, \quad s = -2 - j2$$

و محل قطبهای مطلوب مشاهده‌گر باید به صورت زیر باشد

$$s = -8, \quad s = -8$$

تابع تبدیل کنترل‌کننده مشاهده‌گر را بیابید. پاسخ پله دو سیستم را مقایسه کنید. [برای سیستم (ب) مقدار ثابت  $N$  را طوری تعیین کنید که خروجی حالت ماندگار  $y(\infty)$  به ازای ورودی پله واحد برابر یک باشد.]

یک سیستم تنظیم کننده با رهیافت جایدهی قطب و مشاهده‌گر طراحی کنید. محل قطبهای حلقه بسته برای جایدهی قطب عبارت است از

$$s = -5, \quad s = -1 - j, \quad s = -1 + j$$

و محل قطبهای حلقه بسته مشاهده‌گر

$$s = -6, \quad s = -6, \quad s = -6$$

تابع تبدیل کنترل کننده مشاهده‌گر را نیز بیابید.

ب ۱۰-۱۵ با استفاده از رهیافت جایدهی قطب و مشاهده‌گر یک کنترل کننده مشاهده‌گر (یکی با مشاهده‌گر کامل مرتبه و یکی با مشاهده‌گر می‌نیم - مرتبه) برای سیستم شکل ۱۰-۶۰ طراحی کنید که قطبهای حلقه بسته بخش جایدهی قطب آن به صورت زیر باشد

$$s = -5, \quad s = -1 - j2, \quad s = -1 + j2$$

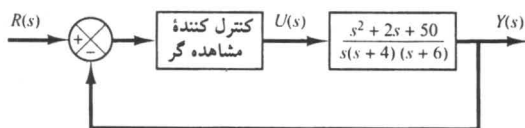
محل قطبهای مطلوب مشاهده‌گر به صورت زیر است برای مشاهده‌گر کامل مرتبه

$$s = -10, \quad s = -10, \quad s = -10$$

برای مشاهده‌گر می‌نیم مرتبه

$$s = -10, \quad s = -10$$

پاسخ پله و پهنای باند دو سیستم طراحی شده را بیابید و آنها را مقایسه کنید.



شکل ۱۰-۶۰

سیستم کنترل با کنترل کننده مشاهده‌گر در مسیر پیش‌خورد.

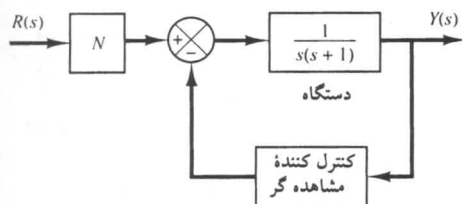
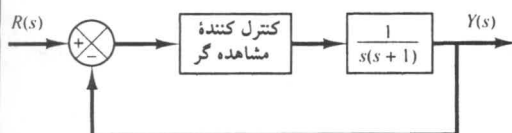
(الف)

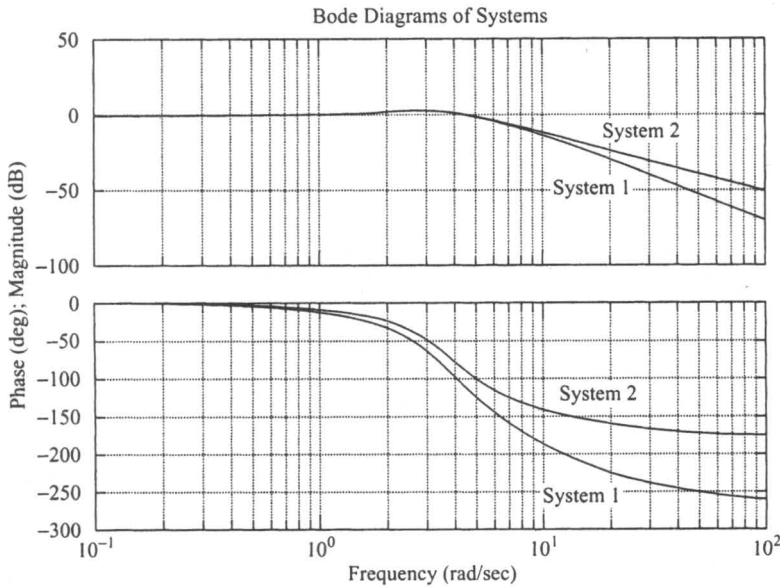
(ب)

شکل ۱۰-۶۱

سیستم کنترل با کنترل کننده مشاهده‌گر

(الف) در مسیر پیش‌خورد؛ (ب) در مسیر فیدبک.





شکل ۱۰-۵۴ نمودارهای بوده سیستم ۱ (سیستم حلقه بسته با مشاهده گر کامل مرتبه) و سیستم ۲ (سیستم حلقه بسته با مشاهده گر می نیمم - مرتبه).

الف ۱۰-۱۵ سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

که در آن  $\mathbf{x}$  بردار حالت است. فرض کنید که  $\mathbf{A}$  ماتریکس  $n \times n$  است. ثابت کنید که اگر حالت تعادل  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  سیستم پایدار مجانبی باشد (یعنی ماتریس  $\mathbf{A}$  پایدار باشد) یک ماتریس مثبت معین هرمیتی  $\mathbf{P}$  وجود دارد به نحوی که

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

که در آن  $\mathbf{Q}$  یک ماتریس مثبت معین هرمیتی است.

حل: جواب معادله دیفرانسیل ماتریسی زیر

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^* \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{Q}$$

عبارت است از

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}^* t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t}$$

با انتگرالگیری از دو طرف معادله دیفرانسیل ماتریسی از ۰ تا بینهایت به دست می آوریم

$$\mathbf{X}(\infty) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}^* \left( \int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) + \left( \int_0^\infty \mathbf{X} dt \right) \mathbf{A}$$

چون ماتریس  $\mathbf{A}$  پایدار است، داریم  $\mathbf{X}(\infty) = \mathbf{0}$ ، و بنابراین

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

سپس پاسخ سیستم به ازای شرط اولیه زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

منحنی‌های  $\theta$  بر حسب  $t$ ،  $\dot{\theta}$  بر حسب  $t$ ،  $x$  بر حسب  $t$ ، و  $\dot{x}$  بر حسب  $t$ ، را رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20/601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

طرح کنترل فیدبک حالت زیر را به کار می‌بریم

$$u = -Kx$$

با استفاده از MATLAB ماتریس بهره فیدبک حالت زیر را تعیین کنید

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

به نحوی که شاخص عملکرد زیر می‌نیم شود

$$J = \int_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt$$

که در آن

فرکانس طبیعی نامیرا باید ۲ rad/sec باشد.

حل: با گذاشتن معادله (۱۷۴-۱۰) در معادله (۱۷۳-۱۰) به دست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

یا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-k_1 x_1 - k_2 x_2] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (175-10)$$

بنابراین

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

حذف  $x_2$  از معادله (۱۷۵-۱۰) نتیجه می دهد

$$\ddot{x}_1 + k_2 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = 0$$

چون فرکانس طبیعی نامیرا ۲ rad/sec مشخص شده است، به دست می آوریم

$$k_1 = 4$$

بنابراین

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  به شرطی پایدار است که  $k_2 > 0$ . اکنون باید مقدار  $k_2$  را طوری تعیین کنیم که شاخص عملکرد

زیر می نیمم شود

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \, dt = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0)$$

ماتریس  $\mathbf{P}$  از معادله (۱۱۵-۱۰) به دست می آید که در زیر بازنویسی شده است

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^* \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K})$$

چون در این سیستم  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  و  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ، معادله اخیر به صورت زیر ساده می شود

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^* \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -\mathbf{I} \quad (176-10)$$

چون در این سیستم تنها با بردارها و ماتریسهای حقیقی سر و کار داریم  $\mathbf{P}$  یک ماتریس متقارن است. بنابراین

می توانیم معادله (۱۷۶-۱۰) را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

که حل آن ماتریس  $\mathbf{P}$  زیر را به دست می دهد