

کنترل کننده های PID و PID اصلاح شده

۱-۸ مقدمه

در فصل های پیش گاهی راجع به طرح های پایه ای کنترل PID صحبت کردیم. مثلاً کنترل کننده های PID الکترونیکی، هیدرولیکی، و نیوماتیکی را معرفی کردیم. همچنین سیستم های کنترلی طرح کردیم که در آنها از کنترل کننده های PID استفاده شده بود.

جالب توجه است که بیش از نیمی از کنترل کننده های صنعتی که امروزه به کار می روند، از طرح های کنترل PID یا PID اصلاح شده استفاده می کنند.

چون اغلب کنترل کننده های PID در محل تنظیم می شوند، قواعد تنظیم متفاوتی در نوشته ها پیشنهاد شده است. با استفاده از این قواعد می توان کنترل کننده ها را در محل با دقت و ظرافت تنظیم کرد. روش های تنظیم خودکار نیز ابداع شده اند، و بعضی کنترل کننده های PID قابلیت تنظیم خودکار را دارا هستند. شکل های اصلاح شده کنترل PID، مانند کنترل I-PD و کنترل PID چند درجه آزادی هم اکنون در صنعت به کار می روند. روش های عملی متعددی برای تغییر حالت بی وقفه (از دستی به خودکار) و برنامه ریزی بهره به بازار عرضه شده است.

مزیت کنترل کننده های PID در قابلیت اعمال عمومی آنها به اکثر سیستم های کنترل است. در عمل هر گاه مدل ریاضی سیستم معلوم نباشد، و به همین خاطر روش های تحلیلی طراحی را نتوان به کار برد، کنترل

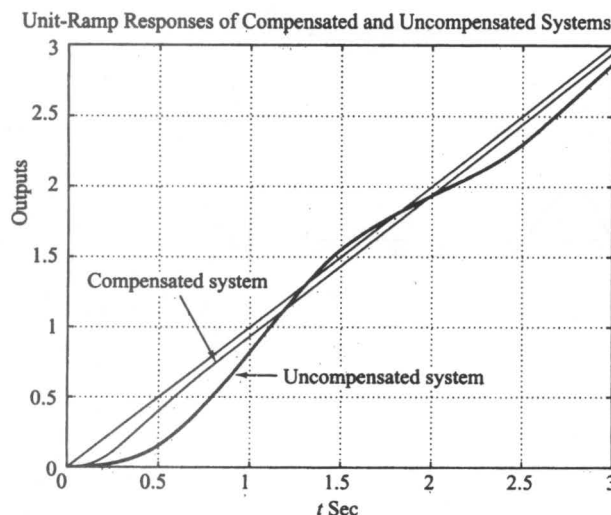
MATLAB Program 7-29

```

%*****Unit-ramp responses*****

num1 = [10];
den1 = [1 1 10 0];
num2 = [95.238 286.6759];
den2 = [1 15.3339 110.5719 286.6759 0];
t = 0:0.01:3;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'-','t,t','--');
grid;
title('Unit-Ramp Responses of Uncompensated System and Compensated System');
xlabel('t Sec');
ylabel('Outputs');
text(1.2,0.65,'Uncompensated System')
text(0.1,1.3,'Compensated System')

```



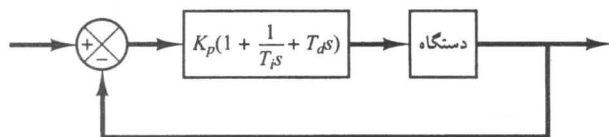
شکل ۷-۱۵۰

پاسخهای شیب سیستمهای
جبران شده و جبران نشده.

الف ۷-۲۵ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

یک جبران‌ساز طرح کنید به نحوی که ثابت خطای ایستای سرعت 10 sec^{-1} ، حاشیه فاز 50° ، و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر باشد.



شکل ۸-۱

کنترل PID یک دستگاه.

فرایند انتخاب پارامترهای کنترل کننده برای برآورده شدن مشخصات عملکرد، تنظیم کنترل کننده نامیده می شود. زیگلر و نیکولس قواعدی برای تنظیم کنترل کننده های PID (یعنی تعیین مقادیر K_p ، T_i و T_d) پیشنهاد کرده اند. این قواعد براساس پاسخ پله به دست آمده از آزمایش یا مقدار K_p که هنگام استفاده از کنترل تناسبی تنها به پایداری مرزی منجر می شود، استوار است. قواعد زیگلر - نیکولس، که به زودی به معرفی آنها می پردازیم، در مواقعی که مدل ریاضی دستگاه معلوم نیست بسیار به کار می آیند. (البته این قواعد را می توان برای طراحی سیستمهای دارای مدل ریاضی معلوم نیز به کار برد). این قواعد مجموعه ای از مقادیر برای K_p ، T_i و T_d به دست می دهند که عملکرد پایدار سیستم را به همراه دارد. البته سیستم حاصل ممکن است فراجش بزرگ و غیرقابل قبول داشته باشد. در این صورت باید با انجام یک رشته تنظیم دقیق به مشخصه مطلوب دست یافت. در واقع قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس حدس هوشمندانه ای برای پارامترها به دست می دهد که می تواند نقطه شروع خوبی برای تنظیم باشد. پس این قواعد را نباید مقدار نهایی پارامترها به حساب آورد.

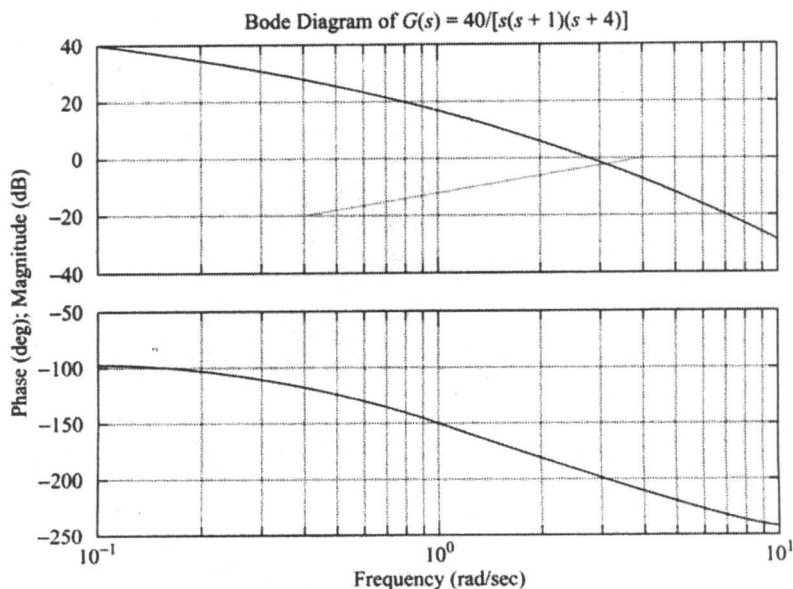
قواعد زیگلر - نیکولس برای تنظیم کنترل کننده های PID. زیگلر و نیکولس قواعدی برای تعیین بهره تناسبی K_p ، زمان انتگرال T_i ، و زمان مشتق T_d ، براساس مشخصات پاسخ گذرای دستگاه تحت کنترل پیشنهاد کرده اند. این تعیین پارامتر یا تنظیم کنترل کننده PID می تواند توسط مهندس کنترل در محل و با انجام آزمایش بر روی دستگاه انجام شود. (پس از پیشنهادات زیگلر و نیکولس قواعد تنظیم متعددی برای کنترل کننده های PID عنوان شده است. این قواعد را می توان در کتابها و مقاله ها و راهنمای سازنده کنترل کننده پیدا کرد). دو روش موسوم به قواعد زیگلر - نیکولس وجود دارد: روش اول، و روش دوم - هر دو روش را در اینجا به اختصار معرفی می کنیم.

روش اول. در روش اول پاسخ دستگاه به ورودی پله واحد را به طور تجربی، به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۸ می یابیم. اگر دستگاه نه انتگرالگیر داشته باشد، نه قطبهای مزدوج مختلط غالب، پاسخ پله به صورت یک منحنی S شکل، همانند منحنی شکل ۳-۸ است. (اگر پاسخ به صورت منحنی S شکل نباشد، این روش را نمی توان به کار برد). این منحنی پاسخ پله را می توان به طور تجربی یا با شبیه سازی دستگاه به دست آورد. منحنی S شکل را می توان با دو پارامتر مشخص کرد، زمان تأخیر L و ثابت زمانی T . زمان تأخیر و ثابت زمانی مطابق شکل ۳-۸ با رسم خط مماس در نقطه عطف منحنی S شکل و یافتن محل برخورد آن با محور



شکل ۲-۸

پاسخ پله واحد یک دستگاه.



شکل ۷-۱۵۱

نمودار بوده $G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+4)}$

با $\beta = 10^\circ$ $\phi_m = 54.9^\circ$ متناظر است. چون می‌خواهیم حاشیه فاز 50° باشد، β را برابر 10° می‌گیریم. (توجه کنید که به این ترتیب از تمام ماکزیمم زاویه، 54.9° استفاده نمی‌کنیم.) پس

$$\beta = 10^\circ$$

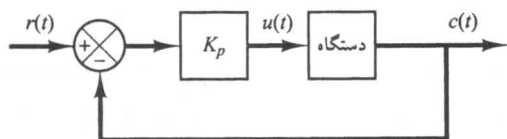
به این ترتیب فرکانس گوشه‌ای $\omega = 1/(\beta T_p) = 0.02$ (قطب بخش پسفاز جبران‌ساز) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\omega = 0.02$$

تابع تبدیل بخش پسفاز جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به صورت زیر درمی‌آید

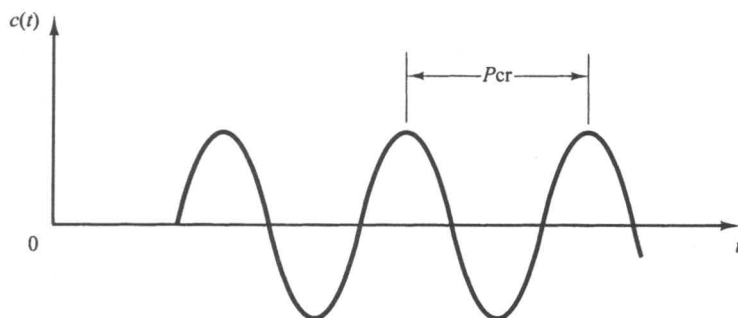
$$\frac{s+0.02}{s+0.02} = 10^\circ \left(\frac{5s+1}{50s+1} \right)$$

بخش پیشفاز را می‌توان به این صورت تعیین کرد: فرکانس عبور بهره جدید $\omega = 2$ rad/sec است؛ از شکل ۷-۱۵۱ مقدار $|G(j2)|$ را برابر ۶ dB به دست می‌آوریم. پس اگر جبران‌ساز در $\omega = 2$ rad/s تضعیفی برابر ۶ dB ایجاد کند، فرکانس عبور بهره در محل مورد نظر قرار می‌گیرد. به این منظور می‌توان خط راستی با شیب ۲۰ dB/dec از نقطه $(2 \text{ rad/sec}, -6 \text{ dB})$ عبور داد. (این خط در شکل ۷-۱۵۱ با دست رسم شده است.) محل برخورد این خط و خطوط ۰ dB و ۲۰ dB فرکانسهای گوشه‌ای را تعیین می‌کند. به این ترتیب فرکانسهای گوشه‌ای بخش پیشفاز در $\omega = 0.4$ rad/sec و $\omega = 4$ rad/sec به دست می‌آیند. پس تابع تبدیل بخش پیشفاز جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به صورت زیر درمی‌آید



شکل ۴-۸

سیستم حلقه بسته با کنترل کننده تناسبی.



شکل ۵-۸ نوسان نامیرا با زمان تناوب P_{cr} .

روش دوم. در روش دوم ابتدا قرار می‌دهیم $T_i = \infty$ و $T_d = 0$. در این صورت تنها عمل کنترلی تناسبی استفاده می‌شود (شکل ۴-۸ را ببینید). K_p را از صفر زیاد می‌کنیم تا به مقدار بحرانی K_{cr} برسد، جایی که خروجی برای اولین بار نوسان نامیرا پیدا می‌کند. (اگر به ازای هیچ مقدار K_p خروجی نوسان نامیرا نداشته باشد، این روش قابل اعمال نیست). پس مقدار بهره بحرانی K_{cr} و زمان تناوب متناظر با آن P_{cr} به طور تجربی تعیین می‌شود (شکل ۵-۸ را ببینید). زیگلر و نیکولس پیشنهاد کرده‌اند پارامترهای T_i ، T_d و K_p براساس فرمولهای جدول ۲-۸ تنظیم شوند.

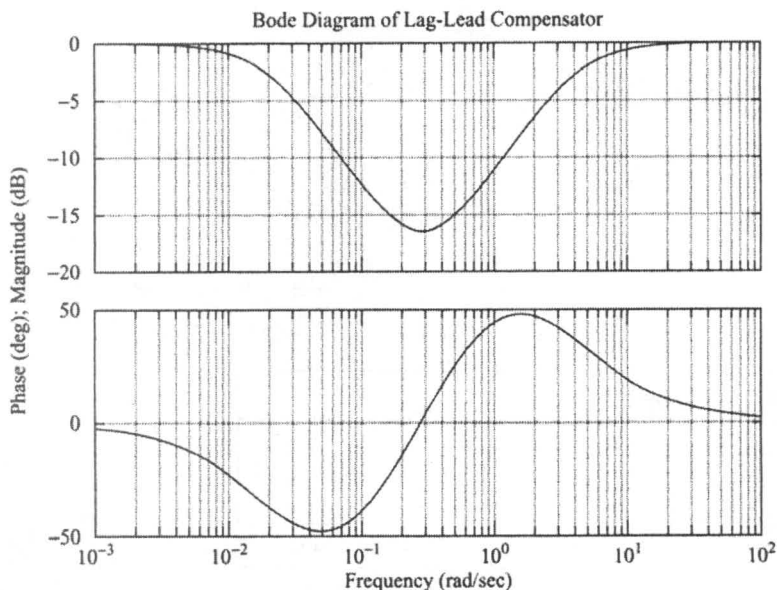
توجه کنید که کنترل کننده PID تنظیم شده به روش زیگلر - نیکولس دارای تابع تبدیل زیر است

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 0.6 K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0.5 P_{cr} s} + 0.125 P_{cr} s \right) \\ &= 0.075 P_{cr} K_{cr} \frac{(s + 4/P_{cr})^2}{s} \end{aligned}$$

پس این کنترل کننده PID یک قطب در مبدا و صفر دو گانه‌ای در $s = -4/P_{cr}$ دارد.

جدول ۲-۸ قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس براساس بهره بحرانی K_{cr} و زمان تناوب بحرانی P_{cr} (روش دوم).

نوع کنترل کننده	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_{cr}$	∞	۰
PI	$0.45 K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	۰
PID	$0.6 K_{cr}$	$0.5 P_{cr}$	$0.125 P_{cr}$



شکل ۷-۱۵۲

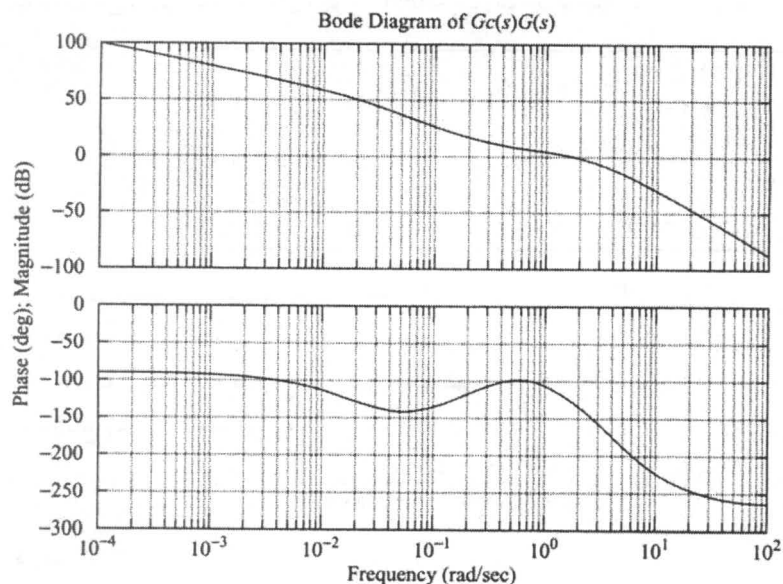
نمودار بوده جبران ساز

پس فاز - پیش فاز

طراحی شده.

MATLAB Program 7-32

```
num1 = [40 24 3.2];
den1 = [1 9.02 24.18 16.48 0.32 0];
bode(num1,den1)
title('Bode Diagram of Gc(s)G(s)')
```



شکل ۷-۱۵۳

نمودار بوده تابع تبدیل

حلقه باز $G_c(s)G(s)$

سیستم جبران شده.

پس آرایهٔ روث به صورت زیر است

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \frac{30 - K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

بررسی ضریب ستون اول نشان می‌دهد که نوسان نامیرا به ازای $K_p = 30$ رخ می‌دهد. پس بهرهٔ بحرانی برابر است با

$$K_{cr} = 30$$

با قرار دادن $K_p = K_{cr} = 30$ معادلهٔ مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

برای یافتن فرکانس نوسان نامیرا در معادلهٔ مشخصه قرار می‌دهیم $s = j\omega$ و به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

یا

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

که از آن فرکانس نوسان نامیرا به صورت $\omega^2 = 5$ یا $\omega = \sqrt{5}$ به دست می‌آید. پس زمان تناوب نوسان نامیرا عبارت است از

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

با توجه به جدول ۸-۲ مقادیر K_p ، T_i و T_d به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$K_p = 0.6 K_{cr} = 18$$

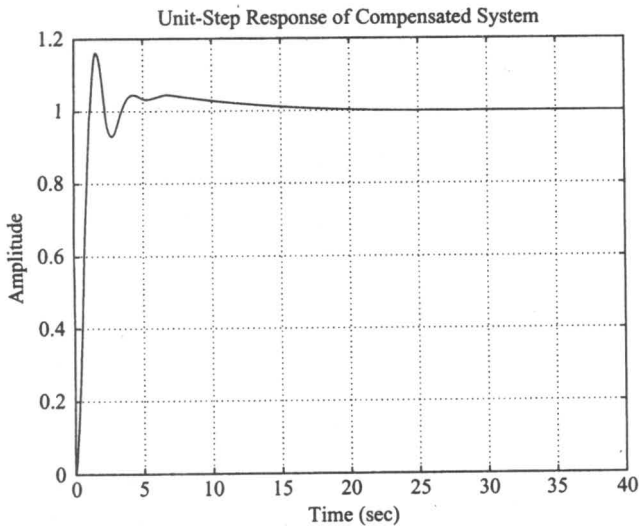
$$T_i = 0.5 P_{cr} = 1.405$$

$$T_d = 0.125 P_{cr} = 0.35124$$

پس تابع تبدیل کنترل کنندهٔ PID عبارت است از

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 18 \left(1 + \frac{1}{1.405 s} + 0.35124 s \right) \\ &= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s} \end{aligned}$$

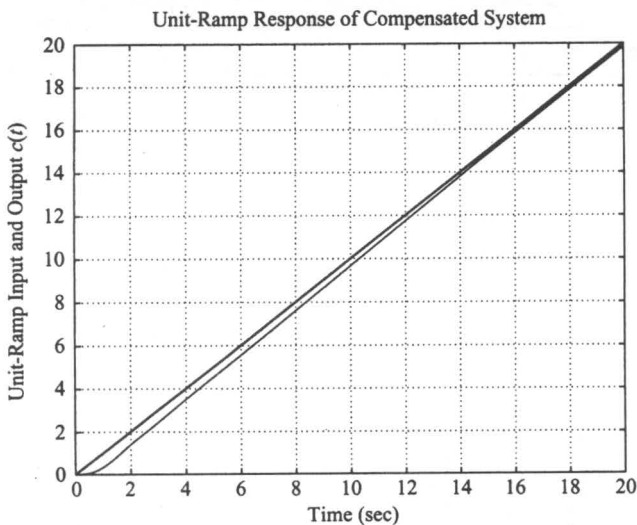
کنترل کنندهٔ PID یک قطب در مبدا و صفر مضاعفی در $s = -1.4235$ دارد. شکل ۸-۷ نمودار بلوکی سیستم کنترل و کنترل کنندهٔ PID طراحی شده را نشان می‌دهد.



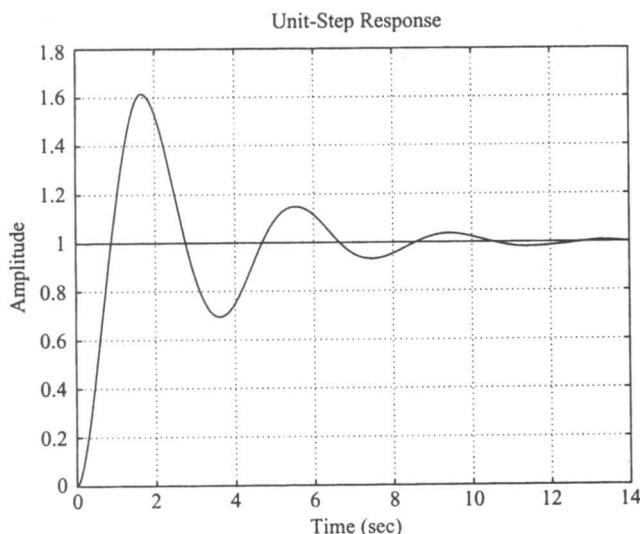
شکل ۷-۱۵۴
منحنی پاسخ پله سیستم جبران شده.

MATLAB Program 7-34

```
%*****Unit-ramp response*****
num = [40 24 3.2];
den = [1 9.02 24.18 56.48 24.32 3.2 0];
t = 0:0.05:20;
c = step(num,den,t);
plot(t,c,'-t,t,t','.')
grid
title('Unit-Ramp Response of Compensated System')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Unit-Ramp Input and Output c(t)')
```

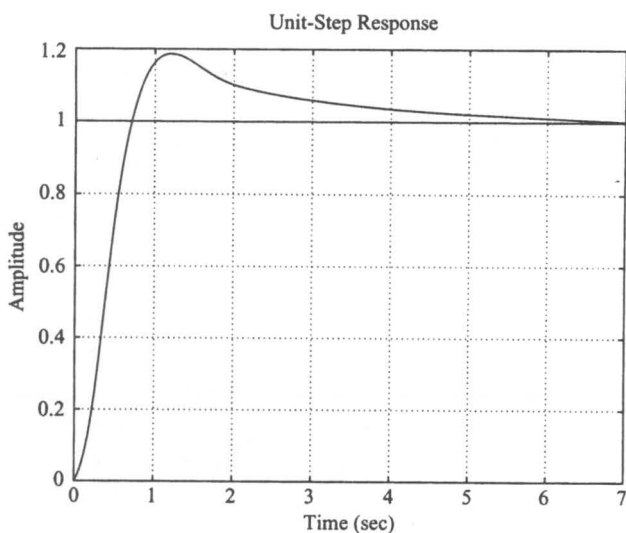


شکل ۷-۱۵۵
پاسخ شیب سیستم جبران شده.



شکل ۸-۸

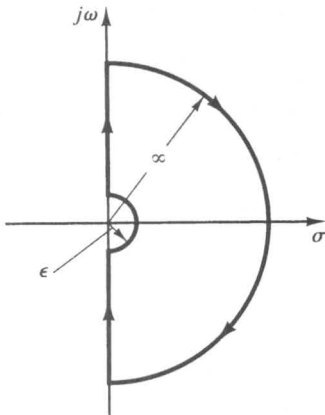
منحنی پاسخ پله سیستمی که
کنترل کننده PID آن با استفاده
از قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس
(روش دوم) طرح شده است.



شکل ۹-۸

منحنی‌های پاسخ پله سیستم
شکل ۸-۶ با کنترل کننده PID
دارای پارامترهای $K_p = 18$ ،
 $T_d = 0.7692$ و $T_i = 3.077$.

پیشنهاد می‌کنند. نکته مهم این است که قواعد زیگلر - نیکولس نقطه شروعی برای تنظیم دقیق فراهم کرده‌اند. توجه به این نکته آموزنده است که برای حالتی که صفر مضاعف در $1/4235$ - قرار دارد، افزایش K_p سرعت سیستم را زیاد می‌کند، ولی از لحاظ ماکزیمم فراجش اثر چندانی ندارد. دلیل این مطلب را می‌توان با تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها بیان کرد. شکل ۸-۱۱ نمودار مکان هندسی را برای سیستم طرح شده با استفاده از روش دوم قواعد تنظیم نشان می‌دهد. چون شاخه‌های غالب مکان هندسی ریشه‌ها در گستره بزرگی از مقادیر K در امتداد خط $\zeta = 0.3$ است، تغییر دادن K (از ۶ تا ۳۰) نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته را چندان تغییر نمی‌دهد. ولی تغییر محل صفر مضاعف اثر زیادی بر ماکزیمم فراجش دارد، زیرا نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته را به شدت تغییر می‌دهد. این مطلب را نیز می‌توان با تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها مستدل



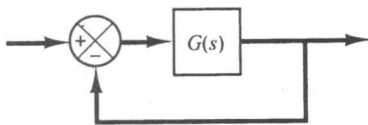
شکل ۷-۱۵۶ مسیر نایکویست.

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

فرض کنید که مسیر نایکویست شکل ۷-۱۵۶ را در نظر گرفته‌ایم. مکان هندسی $G(j\omega)$ را در صفحه $G(s)$ رسم کنید. با استفاده از معیار پایداری نایکویست پایداری سیستم را بررسی کنید.

ب ۷-۱۶ سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۵۷ را در نظر بگیرید. $G(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب ندارد.

اگر نمودار نایکویست به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۱۵۸ (الف) باشد، آیا سیستم پایدار است؟ اگر نمودار نایکویست به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۱۵۸ (ب) باشد، آیا سیستم پایدار است؟



شکل ۷-۱۵۷ سیستم حلقه بسته.

ب ۷-۱۷ شکل ۷-۱۵۹ نمودار نایکویست سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل مسیر پیشروی $G(s)$ را نشان می‌دهد.

ب ۷-۱۰ سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+10)}$$

نمودارهای قطبی مستقیم و وارون $G(s)H(s)$ را به ازای $K=1$ و $K=10$ رسم کنید. با اعمال معیار پایداری نایکویست پایداری سیستم را به ازای این مقادیر K بررسی کنید.

ب ۷-۱۱ سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{K e^{-Ts}}{s}$$

ماکزیمم K را که به ازای آن سیستم پایدار است بیابید.

ب ۷-۱۲ نمودار نایکویست $G(s)$ زیر را رسم کنید:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.8s + 1)}$$

ب ۷-۱۳ سیستم کنترل با فیدبک واحدی در نظر بگیرید که دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر باشد:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

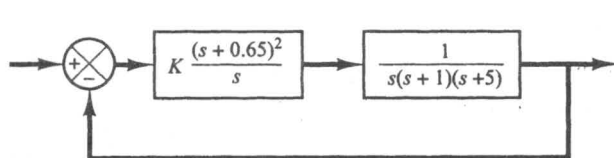
نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کرده، پایداری آن را بررسی کنید.

ب ۷-۱۴ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

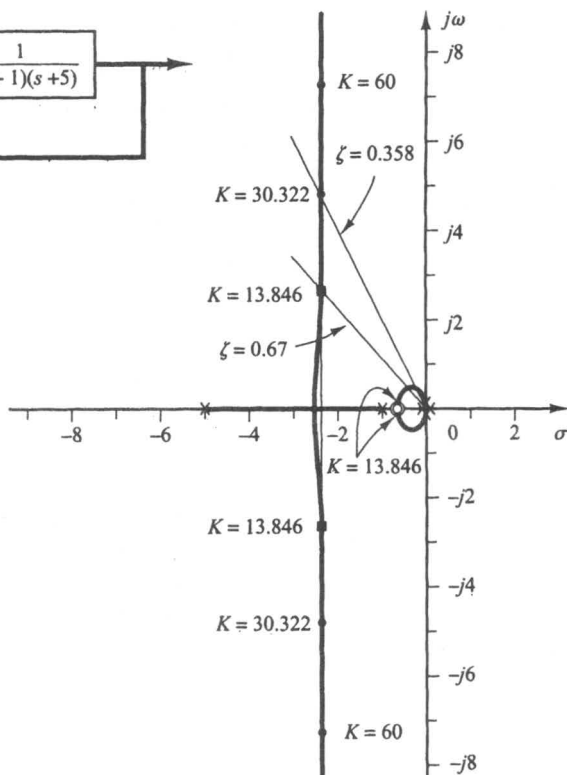
نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کرده، پایداری آن را بررسی کنید.

ب ۷-۱۵ سیستمی با فیدبک واحد و $G(s)$ زیر در نظر بگیرید.



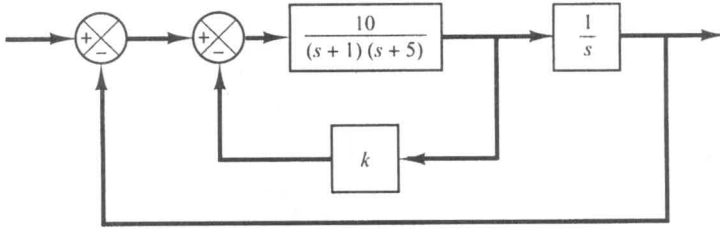
شکل ۸-۱۲

نمودار مکان هندسی ریشه‌ها برای
حالتی که کنترل کننده PID
در $s = -0.65$ صفر مضاعف دارد.
 $K = 13.846$ یا $G_c(s)$ بیان شده
با معادله $(1-s)$ و $K = 30.322$ یا
 $G_c(s)$ بیان شده با معادله (۲-۸)
متناظر است.

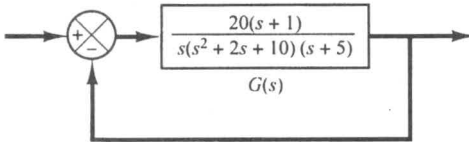


شکل ۸-۱۲ نشان می‌دهد که به ازای بهره $K = 30.322$ قطبهای حلقه بسته واقع در $s = -2.35 \pm j4.82$ و دو قطب حلقه بسته دیگر به صفر مضاعف واقع در $s = -0.65$ بسیار نزدیک‌اند، در نتیجه صفر مضاعف اثر این دو قطب را تقریباً خنثی می‌کند. این قطبهای غالب حلقه بسته هستند که طبیعت پاسخ را تعیین می‌کنند. ولی به ازای بهره $K = 13.846$ قطبهای حلقه بسته واقع در $s = -2.35 \pm j2.62$ کاملاً غالب نیستند، زیرا دو قطب دیگر حلقه بسته که نزدیک صفر مضاعف $s = -0.65$ قرار دارند، اثر قابل ملاحظه‌ای بر پاسخ می‌گذارند. در این حالت ماکزیمم فراجش پاسخ پله (۱۸٪) بسیار بزرگتر از فراجشی است که یک سیستم مرتبه دوم دارای قطب غالب حلقه بسته واقع در $s = -2.35 \pm j2.62$ دارد. (ماکزیمم فراجش پاسخ پله در چنین حالتی تقریباً ۶٪ است).

می‌توان برای بار سوم و چهارم نیز مقادیری انتخاب کرد تا پاسخ بهتری به دست آورد. ولی این کار مقدار زیادی محاسبه و زمان می‌خواهد. اگر می‌خواهید تعداد سعی‌ها را زیاد کنید بهتر است از رهیافت محاسباتی بیان شده در بخش ۸-۳ استفاده کنید. مسئله الف-۸ حل این مسئله را با رهیافت محاسباتی (به کمک MATLAB) نشان می‌دهد. مجموعه پارامترهای به دست آمده در این مسئله به نحوی است که فراجش ماکزیمم ۱۰٪ و زمان نشست کمتر از ۳ sec به دست می‌آید. حل به دست آمده در مسئله الف ۸-۱۲ با کنترل کننده PID زیر متناظر است:



شکل ۷-۱۶۰ سیستم کنترل.



شکل ۷-۱۶۲ سیستم کنترل.

این سیستم چهار نمودار نایکویست دارد. دو نمودار نایکویست به ازای ورودی u_1 و دو نمودار نایکویست به ازای ورودی u_2 . یک برنامه MATLAB برای رسم این نمودارها بنویسید.

ب ۷-۲۲ می‌خواهیم $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ سیستم مسئله ب ۷-۲۱ را تنها به ازای $\omega > 0$ رسم کنیم. یک برنامه MATLAB برای این منظور بنویسید.

اگر بخواهیم $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ را به ازای $-\infty < \omega < \infty$ رسم کنیم، باید در برنامه چه تغییری بدهیم؟

ب ۷-۲۳ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

a را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 45° باشد. ب ۷-۲۴ سیستم شکل ۷-۱۶۱ را در نظر بگیرید. نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را رسم کرده، حاشیه فاز و حاشیه بهره را تعیین کنید.

ب ۷-۲۵ سیستم شکل ۷-۱۶۲ را در نظر بگیرید. نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را رسم کرده،

حاشیه فاز و حاشیه بهره را با استفاده از MATLAB تعیین کنید.

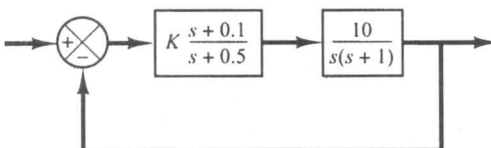
ب ۷-۲۶ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

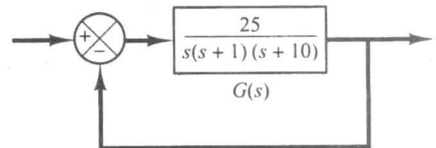
بهره K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° باشد. به ازای این K حاشیه بهره سیستم چقدر است؟ ب ۷-۲۷ سیستم شکل ۷-۱۶۳ را در نظر بگیرید. نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز را رسم کرده، مقدار K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° باشد. به ازای این مقدار K حاشیه بهره چقدر است؟

ب ۷-۲۸ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 0.5)}$$



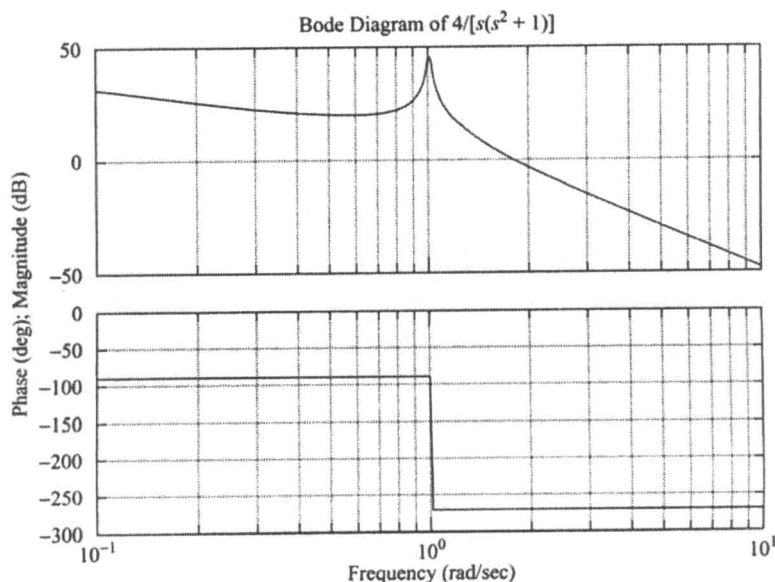
شکل ۷-۱۶۳ سیستم کنترل.



شکل ۷-۱۶۱ سیستم کنترل.

MATLAB Program 8-2

```
num = [4];
den = [1 0.000000000001 1 0];
w = logspace(-1,1,200);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of 4/[s(s^2+1)]')
```



شکل ۸-۱۴

نمودار بوده $4/[s(s^2+1)]$.

بین $\omega = 1$ rad/s و $\omega = 10$ rad/s است. با توجه به این که

$$G_c(s) = \frac{4(as+1)(bs+1)}{s}$$

انتخاب می‌کنیم $a=5$. پس $(as+1)$ در ناحیه فرکانس بالا 90° پیشفازی ایجاد می‌کند. برنامه ۳-۸ نمودار

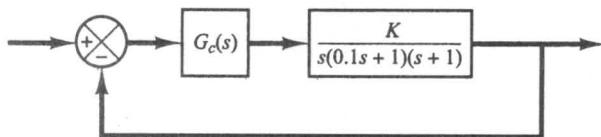
بوده تابع زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{4(5s+1)}{s(s^2+1)}$$

نمودار حاصل در شکل ۸-۱۵ نشان داده شده است.

MATLAB Program 8-3

```
num = [20 4];
den = [1 0.000000000001 1 0];
w = logspace(-2,1,101);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 4(5s+1)/[s(s^2+1)]')
```



شکل ۷-۱۶۶
سیستم حلقه بسته.

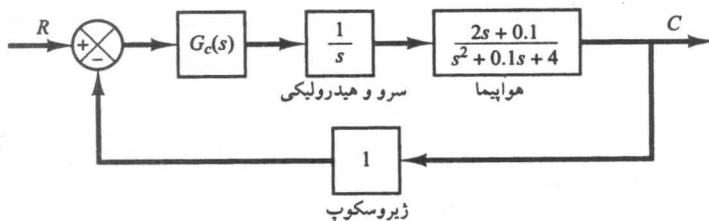
۸ dB یا بیشتر طراحی کنید. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را با MATLAB رسم کنید. نمودار نایکویست سیستم جبران شده را نیز با MATLAB رسم کنید.

ب ۷-۳۴ برای سیستم شکل ۷-۱۶۸ یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز طرح کنید تا ثابت خطای ایستای سرعت K_v برابر 20 sec^{-1} ، حاشیه فاز 60° ، و حاشیه بهره ۸ dB یا بیشتر باشد. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

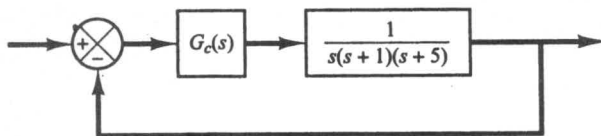
ب ۷-۳۲ برای سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۶۶ جبران‌ساز پیشفاز $G_c(s)$ را برای دستیابی به حاشیه فاز 45° ، حاشیه بهره بزرگتر از ۸ dB، و ثابت خطای سرعت $K_v = 40 \text{ sec}^{-1}$ طراحی کنید.

منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

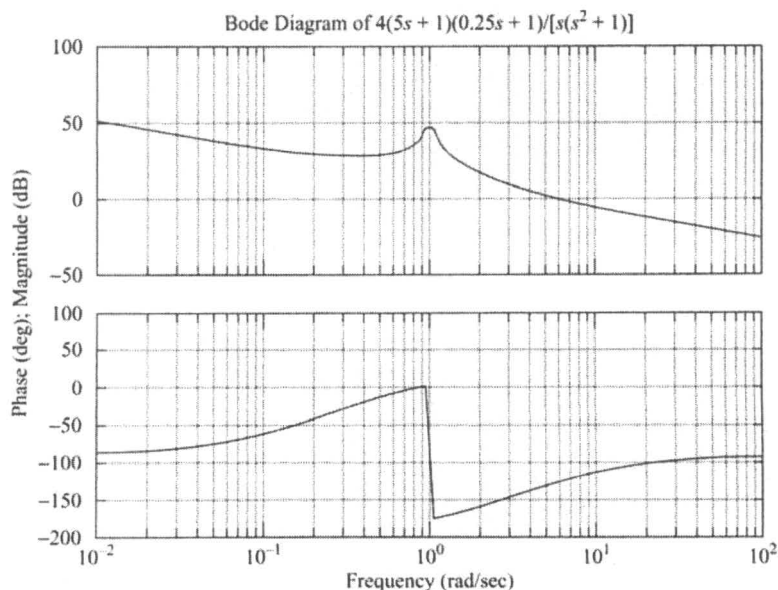
ب ۷-۳۳ سیستم شکل ۷-۱۶۷ را در نظر بگیرید. جبران‌سازی برای دستیابی به ثابت خطای ایستای سرعت 4 sec^{-1} ، حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره



شکل ۷-۱۶۷ سیستم کنترل.



شکل ۷-۱۶۸ سیستم کنترل.



شکل ۱۶-۸ نمودار بوده $\frac{4(5s+1)(0.25s+1)}{[s(s^2+1)]}$

(توجه کنید که بینهایت سیستم دیگر می توان طراحی کرد که این خواسته ها را برآورده کند. این سیستم تنها یکی از سیستمهای ممکن است.)

اکنون پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم طراحی شده را به دست می آوریم. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است

از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s^2 + 21s + 4}{s^3 + 5s^2 + 22s + 4}$$

توجه کنید که صفرهای حلقه بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$s = -4, \quad s = -0.2$$

و قطبهای حلقه بسته در محلهای زیر

$$s = -2.4052 + j3.9119$$

$$s = -2.4052 - j3.9119$$

$$s = -0.1897$$

همچنین توجه کنید که نسبت میرایی قطبهای مزدوج مختلط حلقه بسته ۰/۵۲۳۷ است. برنامه ۵-۸ پاسخ پله و پاسخ شیب را به وجود می آورد. منحنی پاسخ پله واحد در شکل ۸-۱۷ و منحنی پاسخ شیب در شکل ۸-۱۸ نشان داده شده است. توجه کنید که قطب حلقه بسته $s = -0.1897$ و صفر واقع در $s = -0.2$ دنباله ای کوچک و بلند در پاسخ پله ایجاد کرده اند.

کننده‌های PID بسیار مفید واقع می‌شوند. در زمینه سیستم‌های کنترل فرایند، طرح‌های کنترل PID و شکلهای اصلاح شده آن فایده خود را در ایجاد کنترل رضایتبخش به اثبات رسانده‌اند، گرچه در بسیاری از موارد کنترل کننده بهینه نیستند.

در این فصل ابتدا طراحی یک سیستم کنترل شده با PID با استفاده از قواعد زیگلر - نیکولس را معرفی می‌کنیم. سپس طراحی کنترل‌کننده PID به استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی را معرفی کرده، رهیافت محاسباتی بهینه‌سازی کنترل‌کننده را بیان می‌کنیم. سپس کنترل کننده‌های اصلاح شده‌ای چون کنترل PI-D و کنترل I-PD را مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس به معرفی سیستم‌های کنترل با چند درجه آزادی می‌پردازیم، این سیستم‌ها می‌توانند خواسته‌های متراجمی را که سیستم‌های کنترل با یک درجه آزادی از پس ارضایشان برنمی‌آیند، برآورده کنند. (سیستم‌های کنترل با چند درجه آزادی در بخش ۸-۶ تعریف شده‌اند).

در موارد عملی ممکن است بخواهیم پاسخ به ورودی اغتشاش ویژگی‌هایی، و پاسخ به ورودی مرجع ویژگی‌های دیگری داشته باشد. غالباً این دو دسته ویژگی با هم تراجم دارند و نمی‌توان آنها را با سیستم‌های دارای یک درجه آزادی برآورده کرد. با افزودن درجه آزادی سیستم کنترل می‌توان هر دو دسته را ارضا کرد. در این فصل سیستم‌های کنترل با دو درجه آزادی را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم.

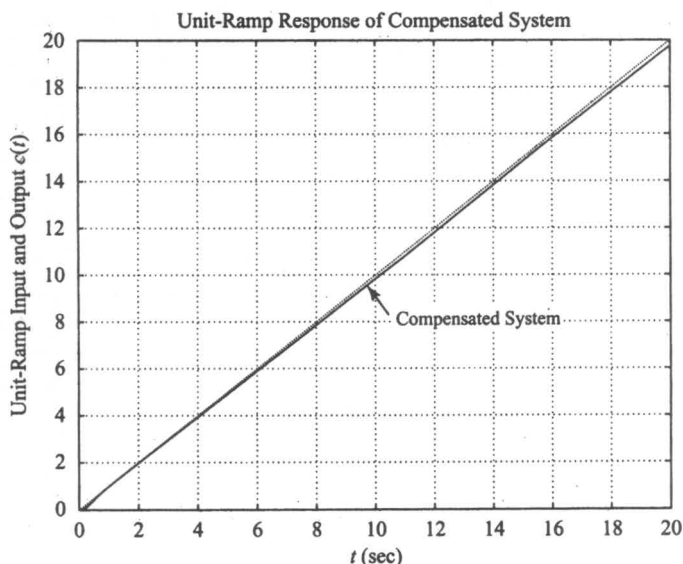
سرانجام یک رهیافت محاسباتی بسیار پر قدرت با استفاده از MATLAB معرفی می‌کنیم که بتواند مقادیر بهینه پارامترها را برای ارضای خواسته‌های پاسخ گذرا (مثلاً این که درصد فراجش پاسخ پله و زمان نشست آن از مقدار مشخصی کمتر باشد) جستجو کند. این رهیافت را می‌توان هم برای سیستم‌های با یک درجه آزادی و هم برای سیستم‌های با چند درجه آزادی به کار برد، به شرطی که مدل ریاضی نسبتاً دقیقی از دستگاه موجود باشد.

نمای کلی فصل. بخش ۸-۱ مطالب مقدماتی را دربر دارد. در بخش ۸-۲ با روش‌های پایه‌ای تنظیم کنترل کننده‌های PID، موسوم به قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس آشنا می‌شویم. بخش ۸-۳ به طراحی یک کنترل‌کننده PID با رهیافت پاسخ فرکانسی اختصاص دارد. در بخش ۸-۴ یک روش محاسباتی برای یافتن پارامترهای بهینه کنترل کننده PID معرفی می‌شود. طرح‌های کنترل با چند درجه آزادی و همچنین سیستم‌های دارای کنترل‌کننده‌های PID اصلاح شده در بخش ۸-۵ معرفی می‌شوند.

۸-۲ قواعد زیگلر - نیکولس

برای تنظیم کنترل‌کننده‌های PID

کنترل PID دستگاه. شکل ۸-۱ کنترل PID یک دستگاه را نشان می‌دهد. اگر بتوان مدل ریاضی دستگاه را به دست آورد، روش‌های طراحی مختلفی را می‌توان برای تعیین پارامترهای کنترل کننده به کار برد تا سیستم حلقه بسته مشخصات پاسخ گذرا و حالت ماندگار خواسته شده را داشته باشد، ولی اگر دستگاه آنقدر پیچیده باشد که نتوان مدل ریاضی آن را به سادگی به دست آورد، نمی‌توان از رهیافت تحلیلی برای طراحی کنترل کننده PID استفاده کرد. در این صورت باید برای تنظیم کنترل کننده PID به روش‌های تجربی متوسل شد.



شکل ۸-۱۸

منحنی پاسخ شیب
سیستم جبران شده.

۴-۸ رهیافت محاسباتی برای یافتن مقدار بهینه پارامترها

در این بخش روش یافتن یک مجموعه پارامتر بهینه برای ارضای مشخصات پاسخ پله به MATLAB کمک را بررسی می‌کنیم. برای نشان دادن این رهیافت دو مثال به کار می‌بریم.

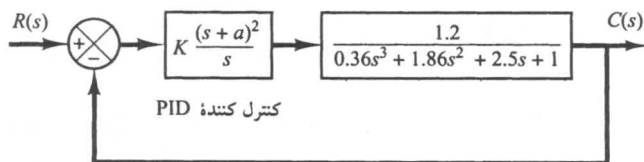
سیستم کنترل شده با PID شکل ۸-۱۹ را در نظر بگیرید. کنترل کننده PID عبارت است از

مثال ۲-۸

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

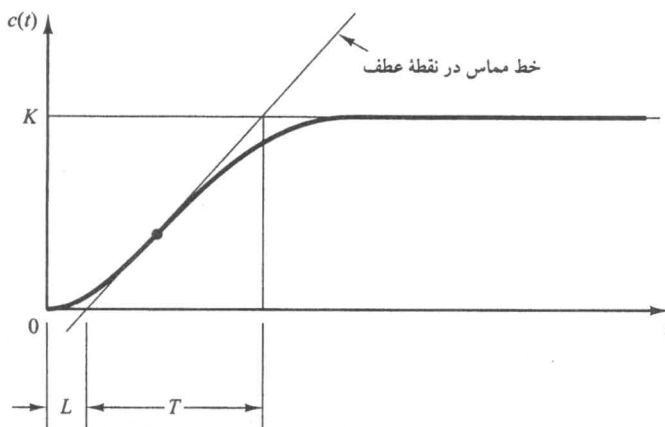
می‌خواهیم مقادیری برای K و a بیابیم، به نحوی که سیستم حلقه بسته زیر میرا بوده، ماکزیم فراجش پاسخ پله کمتر از ۱۰٪ باشد. (می‌توان شرایط دیگری نیز برای این مسئله تعیین کرد، مثلاً این که زمان نشست از حد معینی کمتر، یا زمان صعود از مقدار مشخصی کمتر باشد. برای نمونه مثال ۸-۳ را نگاه کنید.)

برای حل این مسئله به کمک MATLAB ابتدا ناحیه‌ای برای جستجوی مقادیر مناسب K و a تعیین می‌کنیم. سپس برنامه‌ای می‌نویسیم که ترکیبی از K و a بیابد، به نحوی که ماکزیم فراجش پاسخ پله کمتر از ۱۰٪ باشد.



شکل ۸-۱۹

سیستمی با کنترل کننده PID.



شکل ۸-۳

منحنی پاسخ S شکل.

زمان و خط $c(t) = K$ ، تعیین می شود. سپس می توان تابع تبدیل $C(s)/U(s)$ را با یک سیستم مرتبه اول دارای تاخیر انتقالی، به صورت زیر تقریب زد:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}$$

زیگلر و نیکولس پیشنهاد می کنند مقادیر K_p ، T_I و T_d براساس فرمولهای جدول ۸-۱ انتخاب شوند. توجه کنید که کنترل کننده PID تنظیم شده با روش اول قواعد زیگلر - نیکولس دارای تابع تبدیل زیر است:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s \right) \\ &= 1/2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2 L s} + 0.5 L s \right) \\ &= 0.6 T \frac{(s+1/L)^2}{s} \end{aligned}$$

پس کنترل کننده PID یک قطب در مبدأ و صفر دوگانه ای در $s = -1/L$ دارد.

جدول ۸-۱ قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس براساس پاسخ پله دستگاه (روش اول)

T_d	T_I	K_p	نوع کنترل کننده
۰	∞	$\frac{T}{L}$	P
۰	$\frac{L}{0.3}$	$0.9 \frac{T}{L}$	PI
$0.5 L$	$2 L$	$1/2 \frac{T}{L}$	PID

MATLAB Program 8-6

% 'K' and 'a' values to test

K = [2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0];

a = [0.5 0.7 0.9 1.1 1.3 1.5];

% Evaluate closed-loop unit-step response at each 'K' and 'a' combination
% that will yield the maximum overshoot less than 10%

t = 0:0.01:5;

g = tf([1.2],[0.36 1.86 2.5 1]);

k = 0;

for i = 1:6;

for j = 1:6;

gc = tf(K(i)*[1 2*a(j) a(j)^2],[1 0]); % controller

G = gc*g/(1 + gc*g); % closed-loop transfer function

y = step(G,t);

m = max(y);

if m < 1.10

k = k+1;

solution(k,:) = [K(i) a(j) m];

end

end

end

solution % Print solution table

solution =

2.0000 0.5000 0.9002

2.0000 0.7000 0.9807

2.0000 0.9000 1.0614

2.2000 0.5000 0.9114

2.2000 0.7000 0.9837

2.2000 0.9000 1.0772

2.4000 0.5000 0.9207

2.4000 0.7000 0.9859

2.4000 0.9000 1.0923

2.6000 0.5000 0.9283

2.6000 0.7000 0.9877

2.8000 0.5000 0.9348

2.8000 0.7000 1.0024

3.0000 0.5000 0.9402

3.0000 0.7000 1.0177

sortsolution = sortrows(solution,3) % Print solution table sorted by
% column 3

توجه کنید که اگر مدل ریاضی سیستم معلوم باشد (مثلاً تابع تبدیل آن) می‌توان از روش مکان هندسی برای یافتن بهره بحرانی K_{cr} و فرکانس نوسانات نامیرا ω_{cr} استفاده کرد، $\omega_{cr} / \omega_{\pi} = P_{cr}$. این مقادیر با توجه به محل برخورد مکان هندس ریشه‌ها و محور $j\omega$ تعیین می‌شود. (واضح است که اگر شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها محور $j\omega$ را قطع نکنند، این روش قابل اعمال نیست).

ملاحظات. قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس (و دیگر قواعد تنظیم بیان شده در نوشته‌ها) برای تنظیم کنترل‌کننده‌های PID به کار رفته در سیستم‌های کنترل صنعتی، که رفتار دینامیکی دستگاه دقیقاً معلوم نیست، زیاد استفاده می‌شود. این قواعد طی سالیان متمادی ثابت کرده‌اند که بسیار مفیدند؛ البته قواعد زیگلر - نیکولس را می‌توان برای دستگاه‌های دارای رفتار دینامیکی معلوم نیز به کار برد. (اگر رفتار دینامیکی دستگاه معلوم باشد، علاوه بر قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس روش‌های تحلیلی و ترسیمی متعددی برای طراحی کنترل‌کننده‌های PID وجود دارد).

سیستم کنترل شکل ۸-۶ را در نظر بگیرید که در آن یک کنترل‌کننده PID برای کنترل سیستم به کار رفته است. تابع تبدیل کنترل‌کننده PID به صورت زیر است

مثال ۸-۱

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

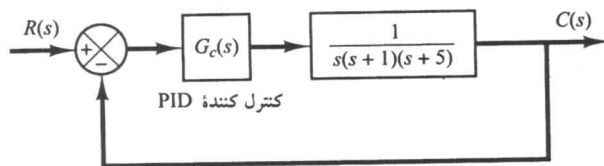
گرچه روش‌های تحلیلی متعددی برای طراحی کنترل‌کننده PID وجود دارد، ولی می‌خواهیم قواعد زیگلر - نیکولس را برای تعیین مقادیر K_p ، T_i و T_d به کار ببریم. پس منحنی پاسخ پله را به دست می‌آوریم تا ببینیم آیا سیستم طراحی شده دارای ماکزیمم فراجهش حدود ۲۵٪ هست یا نه. اگر ماکزیمم فراجهش زیاد بود (۴۰٪ یا بیشتر) تنظیم دقیق‌تری صورت می‌دهیم تا ماکزیمم فراجهش به حدود ۲۵٪ برسد.

چون دستگاه تحت کنترل انتگرالگیر دارد، روش دوم زیگلر - نیکولس را به کار می‌بریم. با قرار دادن $T_d = 0$ و $T_i = \infty$ تابع تبدیل حلقه بسته را به شکل زیر می‌یابیم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

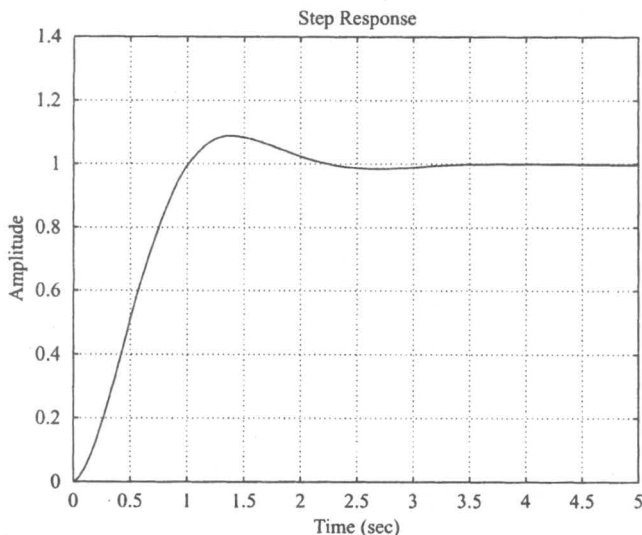
با استفاده از معیار پایداری روث می‌توانیم مقدار K_p را که به ازای آن سیستم پایداری مرزی پیدا می‌کند، بیابیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$



شکل ۸-۶

سیستم دارای کنترل‌کننده PID.



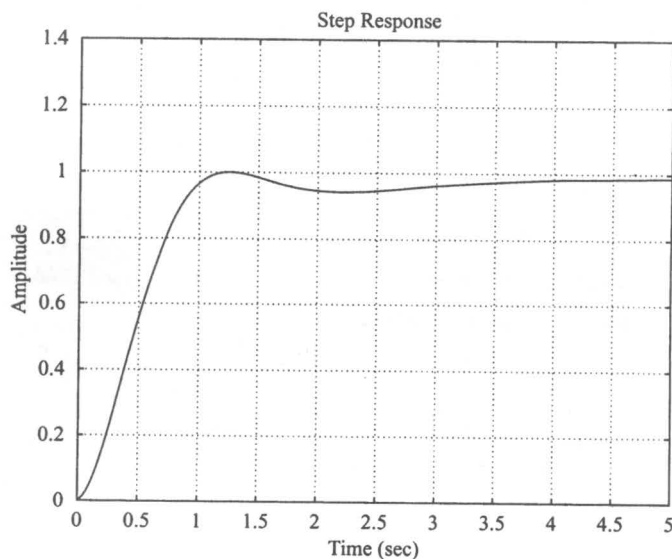
شکل ۸-۲۰

منحنی پاسخ پله سیستم به ازای

$$a = 0.9 \text{ و } K = 2.4$$

(ماکزیمم فراجش

۹.۲۳٪ است).



شکل ۸-۲۱

منحنی پاسخ پله سیستم به ازای

$$a = 0.7 \text{ و } K = 2.8$$

(ماکزیمم فراجش

۰.۲۴٪ است).

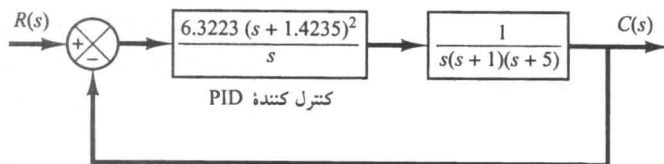
برای رسم پاسخ پله به ازای هر یک از مجموعه مقادیر به دست آمده باید مقادیر K و a متناظر را با استفاده از یک دستور sortsolution مناسب تعیین کنیم.

توجه کنید که سه مجموعه جواب زیر با فراجش بین ۱۰٪ و ۵٪ متناظر هستند:

$$K = 2.0000, \quad a = 0.9000, \quad m = 1.0614$$

$$K = 2.2000, \quad a = 0.9000, \quad m = 1.0772$$

$$K = 2.4000, \quad a = 0.9000, \quad m = 1.0923$$



شکل ۸-۷

نمودار بلوکی سیستم با کنترل کننده PID طراحی شده با استفاده از قواعد تنظیم زیگلر-نیکولس (روش دوم).

حال پاسخ پله سیستم را بررسی می‌کنیم. تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.3223 s^2 + 18s + 12.811}{s^4 + 6s^3 + 11.3223 s^2 + 18s + 12.811}$$

پاسخ پله این سیستم را می‌توان با استفاده از MATLAB به دست آورد. برنامه ۸-۱ را ببینید. منحنی پاسخ پله در شکل ۸-۸ نشان داده شده است. ماکزیمم فراجش پاسخ پله تقریباً ۶۲٪ است. مقدار ماکزیمم فراجش زیاد است. با تنظیم دقیقتر پارامترهای کنترل‌کننده می‌توان فراجش را کمتر کرد. این تنظیم را می‌توان بر روی کامپیوتر انجام داد. می‌بینیم که با حفظ $K_p = 18$ و حرکت دادن صفر مضاعف کنترل کننده PID به $s = -0.65$ یعنی با استفاده از کنترل کننده زیر

$$G_c(s) = 18 \left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.0692s \right) = 13.846 \frac{(s + 0.65)^2}{s} \quad (1-8)$$

می‌توان ماکزیمم فراجش را به ۱۸٪ رساند (شکل ۸-۹ را ببینید). اگر بهره تناسبی K_p را به ۳۹/۴۲ برسانیم، بدون این که محل صفر مضاعف ($s = -0.65$) را تغییر دهیم، یعنی با استفاده از کنترل کننده زیر

$$G_c(s) = 39.42 \left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.0692s \right) = 30.322 \frac{(s + 0.65)^2}{s} \quad (2-8)$$

سرعت پاسخ زیادتر می‌شود، ولی ماکزیمم فراجش نیز مطابق شکل ۸-۱۰ به حدود ۲۸٪ می‌رسد، چون ماکزیمم فراجش به ۲۵٪ نزدیک است و پاسخ نسبت به سیستم دارای کنترل کننده PID معادله (۱-۸) سریعتر است، $G_c(s)$ داده شده با معادله (۲-۸) را قابل قبول می‌یابیم. پس مقادیر تنظیم شده K_p ، T_i و T_d عبارت‌اند از

$$T_d = 0.0692, \quad T_i = 3.077, \quad K_p = 39.42$$

توجه به این نکته جالب است که این مقادیر تقریباً دو برابر مقادیری هستند که قواعد تنظیم زیگلر-نیکولس

MATLAB Program 8-1

```
% ----- Unit-step response -----
num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
step(num,den)
grid
title('Unit-Step Response')
```

MATLAB Program 8-7

```

t = 0:0.01:8;
k = 0;
for K = 3:0.2:5;
    for a = 0.1:0.1:3;
        num = [4*K 8*K*a 4*K*a^2];
        den = [1 6 8+4*K 4+8*K*a 4*K*a^2];
        y = step(num,den,t);
        s = 801; while y(s)>0.98 & y(s)<1.02; s = s - 1; end;
        ts = (s-1)*0.01; % ts = settling time;
        m = max(y);
        if m<1.15 & m>1.10; if ts<3.00;
            k = k+1;
            solution(k,:) = [K a m ts];
        end
    end
end
end
solution

```

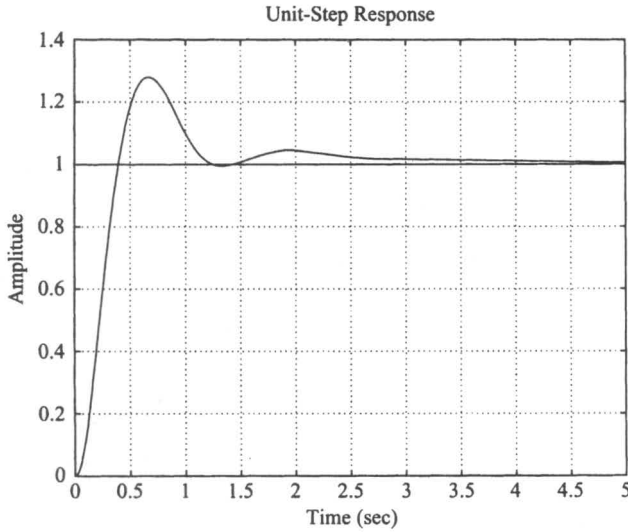
solution =

3.0000	1.0000	1.1469	2.7700
3.2000	0.9000	1.1065	2.8300
3.4000	0.9000	1.1181	2.7000
3.6000	0.9000	1.1291	2.5800
3.8000	0.9000	1.1396	2.4700
4.0000	0.9000	1.1497	2.3800
4.2000	0.8000	1.1107	2.8300
4.4000	0.8000	1.1208	2.5900
4.6000	0.8000	1.1304	2.4300
4.8000	0.8000	1.1396	2.3100
5.0000	0.8000	1.1485	2.2100

sortsolution = sortrows(solution,3)

sortsolution =

3.2000	0.9000	1.1065	2.8300
4.2000	0.8000	1.1107	2.8300
3.4000	0.9000	1.1181	2.7000
4.4000	0.8000	1.1208	2.5900
3.6000	0.9000	1.1291	2.5800
4.6000	0.8000	1.1304	2.4300
4.8000	0.8000	1.1396	2.3100
3.8000	0.9000	1.1396	2.4700



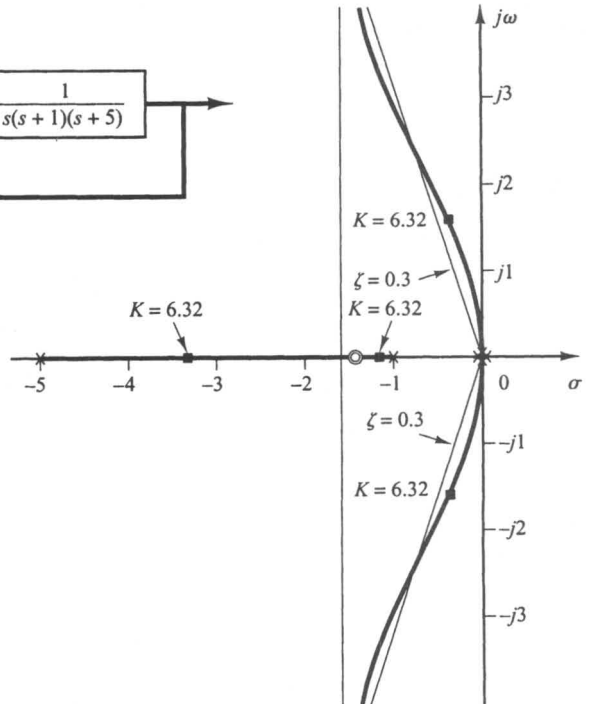
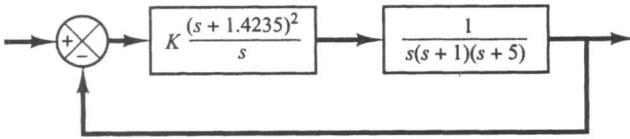
شکل ۸-۱۰

منحنی‌های پاسخ پله سیستم

شکل ۸-۶ با کنترل‌کننده PID

دارای پارامترهای $K_p = ۳۹٫۴۲$ ،

$T_i = ۳٫۰۷۷$ و $T_d = ۰٫۷۶۹۲$.



شکل ۸-۱۱

نمودار مکان هندسی ریشه‌ها

برای حالتی که کنترل‌کننده PID

در $s = -۱٫۴۲۳۵$

صفر مضاعف دارد.

کرد. شکل ۸-۱۲ نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم دارای کنترل‌کننده PID با صفر مضاعف در $s = -۰٫۶۵$ نشان می‌دهد. به تغییر آرایش مکان هندسی ریشه‌ها توجه کنید. این تغییر آرایش امکان تغییر نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته را فراهم می‌کند.

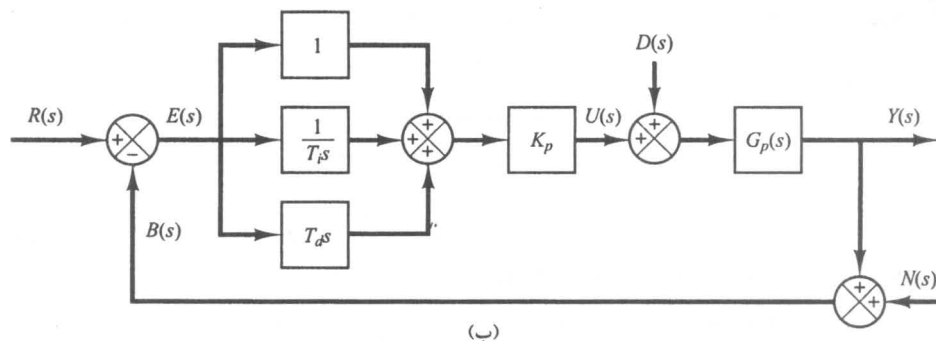
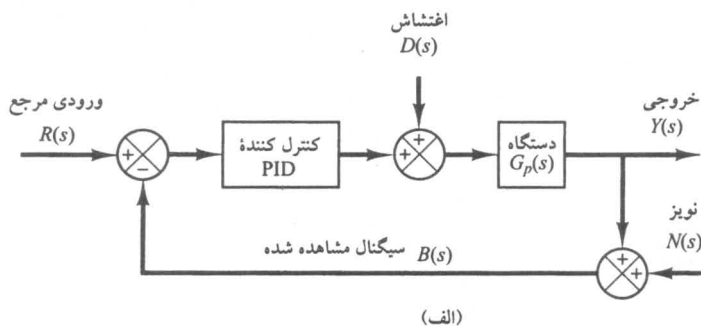
۵-۸ گونه‌های اصلاح شده‌ای از طرح‌های کنترل PID

سیستم کنترل PID پایه شکل ۸-۲۵ (الف) را، که در آن سیستم در معرض اغتشاش و نویز قرار دارد، در نظر بگیرید. شکل ۸-۲۵ (ب) نمودار بلوکی دیگری از همان سیستم است. اگر در سیستم کنترل PID پایه‌ای چون سیستم شکل ۸-۲۵ (ب) ورودی تابع پله‌ای باشد، به خاطر وجود جمله مشتقی در عمل کنترل، متغیر کارانداز $u(t)$ تابع ضربه (تابع دلتا) پیدا می‌کند. در کنترل کننده PID واقعی به جای جمله مشتقی خالص $T_d s$ جمله زیر به کار می‌رود

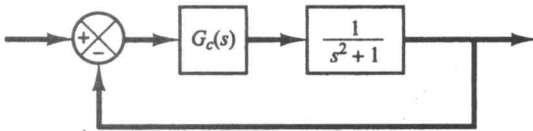
$$\frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

که در آن مقدار γ چیزی حدود ۰/۱ است. در این صورت اگر ورودی مرجع تابع پله‌ای باشد، متغیر کارانداز $u(t)$ تابع ضربه ندارد، بلکه یک تابع پالسی تیز در آن به وجود می‌آید. این پدیده را **لگد نقطه تنظیم** می‌نامند.

کنترل PI-D. برای اجتناب از پدیده لگد نقطه تنظیم می‌توان عمل مشتقی را تنها در مسیر فیدبک به کار گرفت تا تنها از سیگنال فیدبک مشتق گرفته شود، نه از ورودی مرجع. طرح کنترلی دارای این آرایش را کنترل PI-D می‌نامند. شکل ۸-۲۶ یک سیستم دارای کنترل PI-D را نشان می‌دهد.



شکل ۸-۲۵ (الف) سیستم دارای کنترل PID؛ (ب) نمودار بلوکی هم‌ارز.



شکل ۸-۱۳ سیستم کنترل.

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

مقادیر K و a عبارت‌اند از

$$K = 29 \quad a = 0.25$$

فراجشش ماکزیمم ۹۷۵٪ و زمان نشست ۱/۷۸ sec است. جواب دیگری که در آن مسئله به دست آمده عبارت است از

$$K = 27 \quad a = 0.2$$

که با فراجشش ماکزیمم ۵۷۵٪ و زمان نشست ۲/۸۹ sec متناظر است. برای جزییات مسئله الف ۸-۱۲ را ببینید.

۸-۳ طراحی کنترل کننده PID به روش پاسخ فرکانسی

در این بخش طراحی کنترل کننده PID بر اساس رهیافت پاسخ فرکانسی را معرفی می‌کنیم. سیستم شکل ۸-۱۳ را در نظر بگیرید. با استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی یک کنترل کننده PID طراحی کنید، به نحوی که ثابت خطای سرعت به 4 sec^{-1} ، حاشیه فاز به 5° یا بیشتر، و حاشیه بهره حداقل به ۱۰ dB برسد. منحنی‌های پاسخ پله و شیب سیستم جبران شده را به کمک رسم MATLAB کنید.

کنترل کننده PID را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$G_c(s) = \frac{K(as+1)(bs+1)}{s}$$

چون ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 4 \text{ sec}^{-1}$ تعیین شده است، داریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{1}{s^2+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(as+1)(bs+1)}{s} \frac{1}{s^2+1} \\ &= K = 4 \end{aligned}$$

$$G_c(s) = \frac{4(as+1)(bs+1)}{s}$$

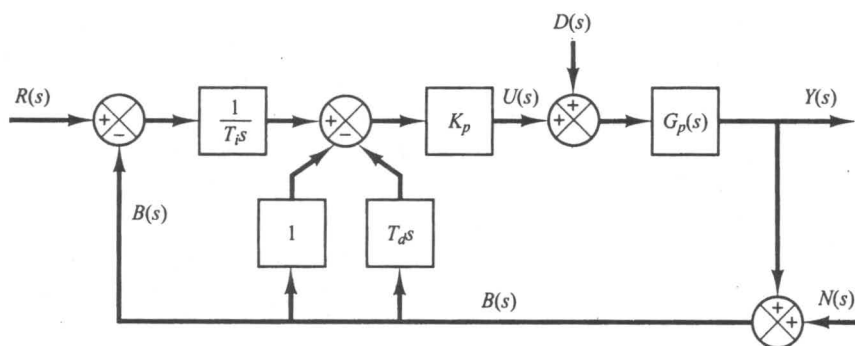
بنابراین

حال نمودار بوده تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$G(s) = \frac{4}{s(s^2+1)}$$

برنامه ۸-۲ نمودار بوده $G(s)$ را به دست می‌دهد. نمودار حاصل در شکل ۸-۱۴ نشان داده شده است.

حاشیه فاز باید حداقل 5° و حاشیه بهره ۱۰ dB یا بیشتر باشد. با توجه به نمودار بوده شکل ۸-۱۴ می‌بینیم که فرکانس عبور بهره تقریباً $\omega = 1/8 \text{ rad/s}$ است. بیابید فرض کنیم که فرکانس عبور بهره سیستم جبران شده



شکل ۸-۲۷ سیستم دارای کنترل I-PD.

کنترل I-PD خوانده می‌شود. سیگنال کارانداز عبارت است از

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) B(s)$$

توجه کنید که ورودی مرجع $R(s)$ تنها در بخش انتگرالی کنترل ظاهر می‌شود. پس در کنترل I-PD برای عملکرد مناسب سیستم کنترل داشتن عمل کنترل انتگرالی ضروری است.

تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s)$ در نبود ورودی‌های اغتشاشی و نیز عبارت است از

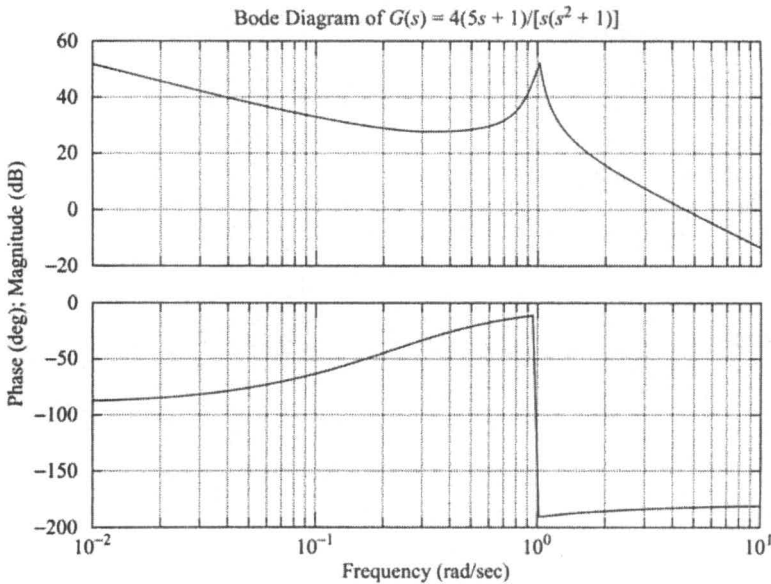
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)}$$

متذکر می‌شویم که در غیاب ورودی مرجع و سیگنال نویز، تابع تبدیل حلقه بسته بین ورودی اغتشاشی و خروجی عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

که همانند عبارتی است که برای کنترل PID و کنترل PI-D به دست آوردیم.

کنترل PID با دو درجه آزادی. نشان دادیم که کنترل PI-D با بردن عمل کنترل مشتقی به مسیر فیدبک، و کنترل I-PD با بردن اعمال کنترل تناسبی و مشتقی به مسیر فیدبک حاصل می‌شود. می‌توان به جای انتقال کامل اعمال کنترل تناسبی و مشتقی به مسیر فیدبک، تنها بخشی از آنها را به مسیر فیدبک برد و بخشی را در مسیر پیشخورد نگه داشت. در نوشته‌ها کنترل PI-PD پیشنهاد شده است. این طرح کنترلی مشخصاتی بین کنترل PID و کنترل PI-D دارد. کنترل PID-PD نیز پیشنهاد و بررسی شده است. در این طرحها یک کنترل کننده در مسیر پیشخورد و یک کنترل کننده در مسیر فیدبک قرار دارد. این طرحهای کنترلی ما را به طرح عمومی‌تر کنترل با دو درجه آزادی رهنمون می‌شود. جزییات طرح کنترل با دو درجه آزادی را در بخشهای بعدی این فصل مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل ۸-۱۵

نمودار بوده

$$G(s) = \frac{4(5s+1)}{s(s^2+1)}$$

مقدار b را براساس نمودار بوده شکل ۸-۱۵ انتخاب می‌کنیم. جمله $(bs+1)$ باید حاشیه فاز 50° را ایجاد کند. با چند سعی و خطا به کمک MATLAB در می‌یابیم که $b=0.25$ حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره $+0$ به دست می‌دهد. پس با انتخاب $b=0.25$ داریم

$$G_c(s) = \frac{4(5s+1)(0.25s+1)}{s}$$

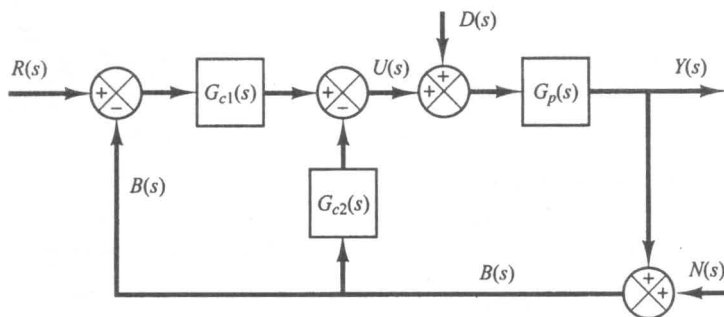
و تابع تبدیل سیستم حلقه باز به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل حلقه باز} &= \frac{4(5s+1)(0.25s+1)}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{5s^2 + 21s + 4}{s^3 + s} \end{aligned}$$

برنامه ۸-۴ نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز را به دست می‌دهد. این نمودار بوده در شکل ۸-۱۶ نشان داده شده است. با توجه به این نمودار می‌بینیم که ثابت خطای سرعت 4 sec^{-1} ، حاشیه فاز 55° و حاشیه بهره $+0$ است. پس سیستم طراحی شده تمام خواسته‌ها را برآورده می‌کند، و سیستم قابل قبولی به حساب می‌آید.

MATLAB Program 8-4

```
num = [5 21 4];
den = [1 0 1 0];
w = logspace(-2,2,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of 4(5s+1)(0.25s+1)/[s(s^2+1)]')
```



شکل ۸-۲۹

سیستم کنترل با
دو درجه آزادی.

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1} G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = - \frac{(G_{c1} + G_{c2}) G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

پس داریم

$$G_{yr} = G_{c1} G_{yd}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

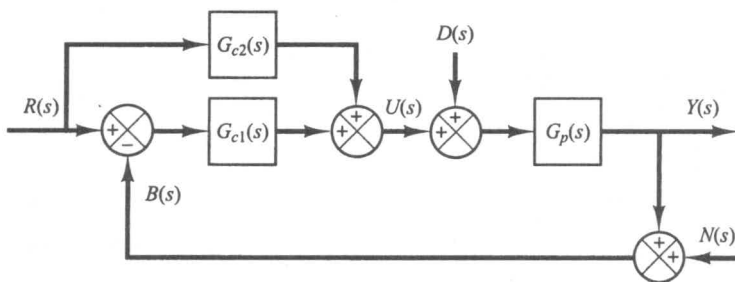
در این حالت اگر G_{yd} معلوم باشد، G_{yn} معلوم است، ولی G_{yr} نه، زیرا G_{c1} مستقل از G_{yd} است. بنابراین در توابع تبدیل G_{yr} ، G_{yn} ، و G_{yd} دو تابع مستقل وجود دارد. پس این سیستم کنترل دو درجه آزادی است.

به نحوی مشابه سیستم شکل ۸-۳۰ نیز یک سیستم دارای دو درجه آزادی است، زیرا برای این سیستم

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1} G_p}{1 + G_{c1} G_p} + \frac{G_{c2} G_p}{1 + G_{c1} + G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = - \frac{G_{c1} G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$



شکل ۸-۳۰

سیستم کنترل
با دو درجه آزادی.

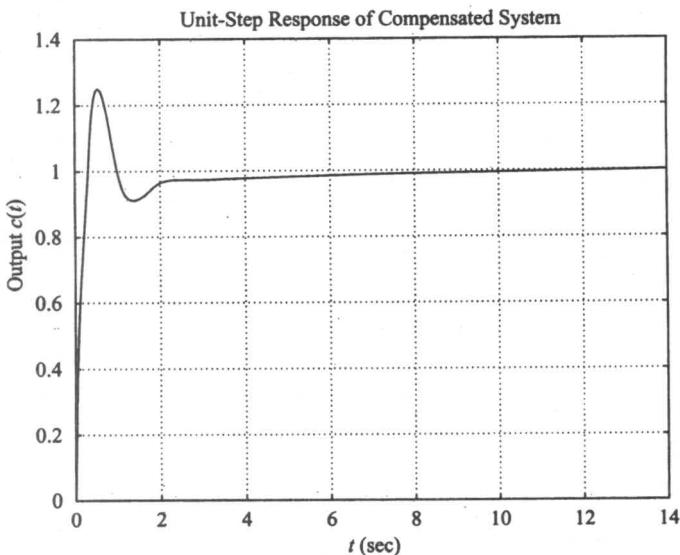
برای دیدن مثالی دیگر از طراحی کنترل‌کننده PID بر اساس رهیافت پاسخ فرکانسی مسئله الف ۷-۸ را

بینید.

MATLAB Program 8-5

```
%***** Unit-step response *****
num = [5 21 4];
den = [1 5 22 4];
t = 0:0.01:14;
c = step(num,den,t);
plot(t,c)
grid
title('Unit-Step Response of Compensated System')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output c(t)')

%***** Unit-ramp response *****
num1 = [5 21 4];
den1 = [1 5 22 4 0];
t = 0:0.02:20;
c = step(num1,den1,t);
plot(t,c,'-',t,t,'--')
title('Unit-Ramp Response of Compensated System')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Unit-Ramp Input and Output c(t)')
text(10.8,8,'Compensated System')
```



شکل ۸-۱۷ منحنی پاسخ پله سیستم جبران شده.

که در آن N می‌تواند ۰، ۱، ۲ باشد و $n \geq m$. همچنین فرض کنید G_{c1} یک کنترل کننده PID است که به دنبال آن یک فیلتر $1/A(s)$ قرار دارد، یعنی

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

و G_{c2} یک کنترل کننده PID، PI، PD، I، D، یا P است که به دنبال آن یک فیلتر $1/A(s)$ قرار دارد، یعنی

$$G_{c2}(s) = \frac{\alpha_2 s + \beta_2 + \gamma_2 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

که در آن بعضی از مقادیر γ_2 ، β_2 و α_2 ممکن است صفر باشد. پس می‌توان $G_{c1} + G_{c2}$ را به صورت زیر نوشت

$$G_{c1} + G_{c2} = \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{A(s)} \quad (۳-۸)$$

که در آن γ ، β و α ثابت هستند. پس

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p} = \frac{K \frac{A(s)}{B(s)}}{1 + \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{B(s)}} \\ &= \frac{s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} \end{aligned}$$

به خاطر وجود s در صورت، پاسخ $y(t)$ به اغتشاش پله‌ای با میل t به بینهایت چنانچه در زیر نشان خواهیم داد، به صفر می‌گراید. چون

$$Y(s) = \frac{s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} D(s)$$

اگر ورودی اغتشاش پله‌ای به اندازه d باشد، آنگاه

$$D(s) = \frac{d}{s}$$

اگر سیستم پایدار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} \right] \frac{d}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s K A(s) d}{s B(s) + \beta K} \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس پاسخ $y(t)$ به اغتشاش پله‌ای ظاهر عمومی نشان داده شده در شکل ۸-۳۲ را دارد.

توجه کنید که بهره K نباید خیلی بزرگ باشد، وگرنه احتمال بزرگ شدن توان ورودی دستگاه به حدی غیرلازم پیش می‌آید.

فرض کنید ناحیه مورد جستجو به صورت زیر تعیین شده است
 $2 \leq K \leq 3$, $0.5 \leq a \leq 1.5$

اگر در این ناحیه جوابی وجود نداشته باشد، باید آن را بزرگتر کنیم. البته در بعضی مسائل جوابی وجود ندارد و بزرگ کردن ناحیه جستجو نیز کمکی نمی‌کند.

در رهیافت محاسباتی باید اندازه گام برای K و a را تعیین کنیم. در فرایند طراحی واقعی باید این گامها به حد کافی کوچک باشد. ولی در این مثال برای این که مقدار محاسبه لازم برای حل مسئله خیلی زیاد نشود، برای هر دو مقدار K و a پله‌های 0.2 انتخاب می‌کنیم.

برای حل این مسئله می‌توان برنامه‌های MATLAB مختلفی نوشت. در اینجا یک برنامه ممکن ارائه شده است: برنامه ۸-۶. در این برنامه دو حلقه for به کار برده‌ایم. برنامه با اجرای حلقه بیرونی شروع می‌شود که مقدار K را تغییر می‌دهد. مقدار a در حلقه داخلی تغییر می‌کند. برنامه MATLAB را به نحوی می‌نویسیم که جستجو از کوچک‌ترین مقدار K و a شروع شود و در هر مرحله این مقادیر بزرگتر شوند. توجه کنید که زمان اجرای برنامه MATLAB بسته به سیستم، گستره جستجوی K و a ، و اندازه گامهای به کار رفته ممکن است از چند ثانیه تا چند دقیقه طول بکشد.
 در این برنامه دستور

$$\text{solution}(k,:)= [K(i) \ a(j) \ m]$$

مقادیر به دست آمده برای K ، a ، و m را نشان می‌دهد. (در اینجا ۱۵ مجموعه مقدار برای K و a به دست می‌آید که به ازای آنها $m < 1/10$ ؛ یعنی فراجشش ماکزیمم کمتر از ۱۰٪ است).
 برای مرتب کردن جوابها بر حسب دامنه فراجشش ماکزیمم (با شروع از کمترین مقدار m و رسیدن به بزرگترین m) دستور زیر به کار رفته است

$$\text{sortsolution}=\text{sortrows}(\text{solution},3)$$

برای رسم منحنی پاسخ پله به ازای آخرین مقادیر K و a جدول مرتب شده، دستور زیر را وارد می‌کنیم

$$K=\text{sortsolution}(k,1)$$

$$a=\text{sortsolution}(k,2)$$

و دستور step را به کار می‌بریم. (منحنی پاسخ پله به دست آمده در شکل ۸-۲۰ نشان داده شده است). برای رسم منحنی پاسخ پله به ازای کمترین فراجشش بزرگتر از ۰٪ به دست آمده در جدول مرتب شده، دستورهای زیر را وارد می‌کنیم

$$K=\text{sortsolution}(11,1)$$

$$a=\text{sortsolution}(11,2)$$

و دستور step را به کار می‌بریم. (منحنی پاسخ پله به دست آمده در شکل ۸-۲۱ نشان داده شده است).

تعیین G_{c2} . اکنون تمام ضرایب تابع تبدیل $Y(s)/R(s)$ معلوم است و خود تابع تبدیل $Y(s)/R(s)$ به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4-8)$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= G_{c1} \frac{Y(s)}{D(s)} \\ &= \frac{G_{c1} s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} \\ &= \frac{G_{c1} s K A(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

چون G_{c1} یک کنترل کننده PID است و می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

$Y(s)/R(s)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

پس انتخاب می کنیم

$$K \gamma_1 = a_2, \quad K \alpha_1 = a_1, \quad K \beta_1 = a_0$$

و در نتیجه

$$G_{c1} = \frac{a_1 s + a_0 + a_2 s^2}{K s} \frac{1}{A(s)} \quad (5-8)$$

می توان کاری کرد که پاسخ این سیستم به ورودی مرجع پله واحد، فراجشی بین حدود پایین و بالای انتخاب شده داشته باشد. مثلاً

$$10\% < \text{ماکزیمم فراجش} < 2\%$$

می توان کاری کرد که خطای حالت ماندگار پاسخ سیستم به ورودی مرجع شیب و شتاب صفر باشد. مشخصه سیستم بیان شده با معادله (4-8) این است که در حالت کلی زمان نشست کوچکی دارد. اگر بخواهیم زمان نشست را کوچکتر کنیم، باید ماکزیمم فراجش بزرگتری را مجاز بدانیم، مثلاً

$$20\% < \text{ماکزیمم فراجش} < 2\%$$

اکنون می توان کنترل کننده G_{c2} را به کمک معادلات (3-8) و (5-8) تعیین کرد. چون

$$G_{c1} + G_{c2} = \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

```
sortsolution =
```

```
2.0000 0.5000 0.9002
2.2000 0.5000 0.9114
2.4000 0.5000 0.9207
2.6000 0.5000 0.9283
2.8000 0.5000 0.9348
3.0000 0.5000 0.9402
2.0000 0.7000 0.9807
2.2000 0.7000 0.9837
2.4000 0.7000 0.9859
2.6000 0.7000 0.9877
2.8000 0.7000 1.0024
3.0000 0.7000 1.0177
2.0000 0.9000 1.0614
2.2000 0.9000 1.0772
2.4000 0.9000 1.0923
```

% Plot the response with the largest overshoot that is less than 10%

```
K = sortsolution(k,1)
```

```
K =
```

```
2.4000
```

```
a = sortsolution(k,2)
```

```
a =
```

```
0.9000
```

```
gc = tf(K*[1 2*a a^2], [1 0]);
```

```
G = gc*g/(1 + gc*g);
```

```
step(G,t)
```

```
grid % See Figure 8-20
```

% If you wish to plot the response with the smallest overshoot that is
% greater than 0%, then enter the following values of 'K' and 'a'

```
K = sortsolution(11,1)
```

```
K =
```

```
2.8000
```

```
a = sortsolution(11,2)
```

```
a =
```

```
0.7000
```

```
gc = tf(K*[1 2*a a^2], [1 0]);
```

```
G = gc*g/(1 + gc*g);
```

```
step(G,t)
```

```
grid % See Figure 8-21
```

دوم این که

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p G_c}{1 + G_c G_p} = \frac{1 \circ G_c}{s(s+1) + 1 \circ G_c}$$

توجه کنید که دو معادله مشخصه $Y(s)/D(s)$ و $Y(s)/R(s)$ یکی است.

ممکن است وسوسه شویم که یک صفر $G_c(s)$ را در $s = -1$ برگزینیم تا قطب واقع در $s = -1$ دستگاه حذف شود، ولی قطب حذف شده $s = -1$ چنانچه در زیر خواهیم دید به یک صفر حلقه بسته برای کل سیستم تبدیل می‌شود. اگر یک کنترل کننده PID به صورت زیر باشد

$$G_c(s) = \frac{K(s+1)(s+\beta)}{s} \quad (7-8)$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{1 \circ}{s + (s+1) + \frac{1 \circ K(s+1)(s+\beta)}{s}} \\ &= \frac{1 \circ s}{(s+1) \left[s^2 + 1 \circ K(s+\beta) \right]} \end{aligned}$$

قطب حلقه بسته $s = -1$ یک قطب کند است، و وجود آن در سیستم حلقه بسته باعث می‌شود که پاسخ پله زمان نشست بزرگتر از ۱ sec داشته باشد. بنابراین $G_c(s)$ را به صورت معادله (۷-۸) انتخاب نمی‌کنیم.

طراحی کنترل کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ در دو گام صورت می‌گیرد.

گام اول طراحی. $G_c(s)$ را برای ارضای خواسته‌های بیان شده برای پاسخ به ورودی اغتشاش $D(s)$ طرح می‌کنیم. در این مرحله طراحی فرض می‌کنیم که ورودی مرجع صفر است.

فرض کنید که $G_c(s)$ یک کنترل کننده PID به شکل زیر است

$$G_c(s) = \frac{K(s+\alpha)(s+\beta)}{s}$$

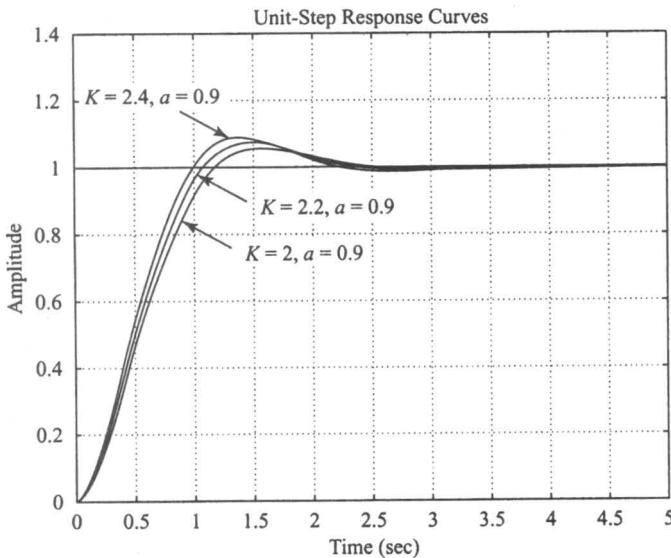
پس تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/D(s)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{1 \circ}{s(s+1) + 1 \circ G_c} \\ &= \frac{1 \circ}{s(s+1) + \frac{1 \circ K(s+\alpha)(s+\beta)}{s}} \\ &= \frac{1 \circ s}{s^2(s+1) + 1 \circ K(s+\alpha)(s+\beta)} \end{aligned}$$

توجه کنید که وجود s در صورت $Y(s)/D(s)$ تضمین می‌کند که پاسخ حالت ماندگار به ورودی اغتشاش پله‌ای صفر است.

بیا باید فرض کنیم که قطبهای غالب حلقه بسته مطلوب مزدوج مختلط، و به صورت زیر هستند

$$s = -a \pm jb$$



شکل ۸-۲۲

منحنی های پاسخ پله سیستم
به ازای $K=2$ و $a=0.9$ ؛
 $K=2.2$ و $a=0.9$ ؛
و $K=2.4$ و $a=0.9$.

پاسخ پله متناظر با این سه مجموعه جواب در شکل ۸-۲۲ نشان داده شده است. توجه کنید که سیستم دارای K بزرگتر زمان صعودی کوچکتر و فراجهش بزرگتری دارد. این که کدام یک از این سه سیستم بهتر از بقیه است، به اهداف سیستم بستگی دارد.

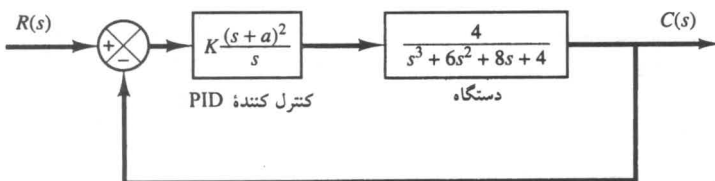
مثال ۳-۸

سیستم شکل ۸-۲۳ را در نظر بگیرید. می خواهیم تمام ترکیب های K و a را که به ازای آنها ماکزیمم فراجهش پاسخ پله سیستم حلقه بسته کمتر از ۱۵٪ و بیشتر از ۱۰٪ است به دست آوریم. همچنین زمان نشست باید کمتر از ۳ ثانیه باشد. در این مسئله ناحیه جستجو را به شکل زیر می گیریم

$$0.1 \leq a \leq 3 \quad 3 \leq K \leq 5$$

پارامترهای K و a را برای دستیابی به این مشخصات تعیین کنید.

در این مثال گامهای جستجو را معقول، مثلاً ۰.۲ برای K و ۰.۱ برای a برمی گزینیم. برنامه ۸-۷ حل این مسئله را به دست می دهد. با توجه به جدول جواب مرتب شده به نظر می رسد ردیف اول بهترین جواب است. شکل ۸-۲۴ منحنی پاسخ پله به ازای $K=3.2$ و $a=0.9$ را نشان می دهد. چون این انتخاب نسبت به بقیه K کوچکتری دارد، می توان ردیف اول را بهترین انتخاب دانست.



شکل ۸-۲۳

سیستم کنترل شده با PID،
به ازای کنترل کننده PID ساده شده.

مرجع را نیز مشخص می‌کند. برای ارضای خواسته سوم به روش جایدهی صفر توسل می‌جوئیم و تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s)$ را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(\gamma a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + \gamma ac)s + (a^2 + b^2)c}{s^2 + (\gamma a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + \gamma ac)s + (a^2 + b^2)c}$$

به این ترتیب خواسته سوم خود به خود برآورده می‌شود.

پس مسئله ما به جستجوی یک مجموعه قطب حلقه بسته مطلوب در ناحیه مشخص شده تبدیل می‌شود، به نحوی که پاسخ به ورودی مرجع پله واحد ماکزیمم فراجشی بین ۱۹٪ و ۲٪، و زمان نشست کمتر از ۱ sec داشته باشد. (اگر نتوان در این ناحیه جوابی به دست آورد باید ناحیه جستجو را گسترش داد.)

برای جستجوی محاسباتی باید گامهای مناسبی به کار ببریم. در این مسئله گامها را ۲/۰ می‌گیریم.

برنامه ۸-۸ MATLAB جدولی از مقادیر قابل قبول a ، b ، و c به دست می‌دهد. می‌بینیم که خواسته مربوط به پاسخ به ورودی مرجع پله واحد توسط ۲۳ مجموعه یافته شده توسط برنامه ۸-۸ برآورده می‌شود. توجه کنید که آخرین ردیف با آخرین نقطه جستجو متناظر است. این نقطه خواسته را برآورده نمی‌کند، بنابراین باید آن را ندیده گرفت. (برنامه به نحوی نوشته شده که آخرین نقطه جستجو در ردیف آخر جدول قرار می‌گیرد، چه خواسته را برآورده کند و چه نکند.)

MATLAB Program 8-8

```
t = 0:0.01:4;
k = 0;
for i = 1:21;
    a(i) = 6.2-i*0.2;
    for j = 1:21;
        b(j) = 6.2-j*0.2;
        for h = 1:31;
            c(h) = 12.2-h*0.2;
            num = [0 2*a(i)+c(h) a(i)^2+b(j)^2+2*a(i)*c(h) (a(i)^2+b(j)^2)*c(h)];
            den = [1 2*a(i)+c(h) a(i)^2+b(j)^2+2*a(i)*c(h) (a(i)^2+b(j)^2)*c(h)];
            y = step(num,den,t);
            m = max(y);
            s = 401; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
                s = s-1; end;
            ts = (s-1)*0.01;
            if m < 1.19 & m > 1.02 & ts < 1.0;
                k = k+1;
                table(k,:) = [a(i) b(j) c(h) m ts];
            end
        end
    end
end
```

3.0000	1.0000	1.1469	2.7700
5.0000	0.8000	1.1485	2.2100
4.0000	0.9000	1.1497	2.3800

% Plot the response curve with the smallest overshoot shown in
sortsolution table.

```
K = sortsolution(1,1), a = sortsolution(1,2)
```

```
K =
```

```
3.2000
```

```
a =
```

```
0.9000
```

```
num = [4*K 8*K*a 4*K*a^2];
```

```
den = [1 6 8+4*K 4+8*K*a 4*K*a^2];
```

```
num
```

```
num =
```

```
12.8000 23.0400 10.3680
```

```
den
```

```
den =
```

```
1.0000 6.0000 20.8000 27.0400 10.3680
```

```
y = step(num,den,t);
```

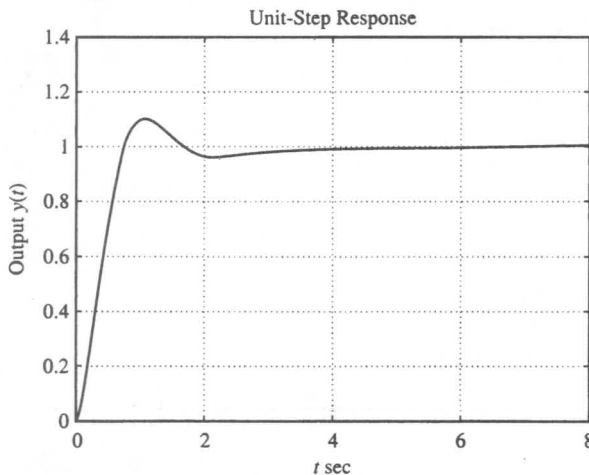
```
plot(t,y) % See Figure 8-24.
```

```
grid
```

```
title('Unit-Step Response')
```

```
xlabel('t sec')
```

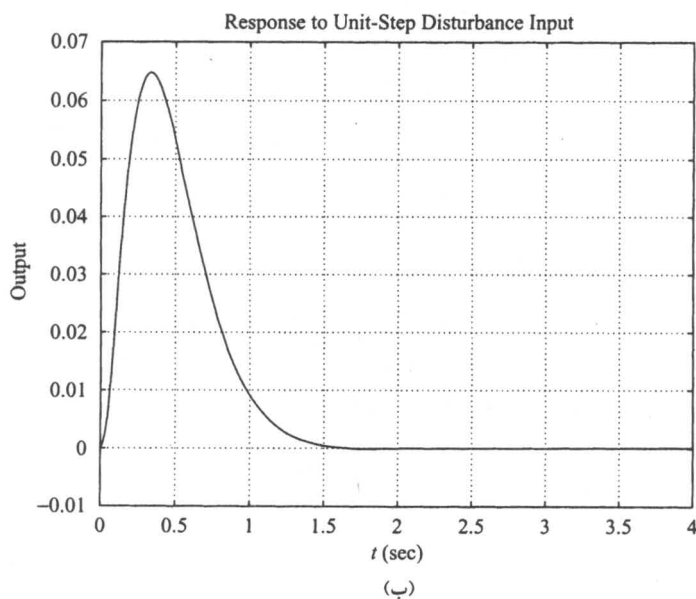
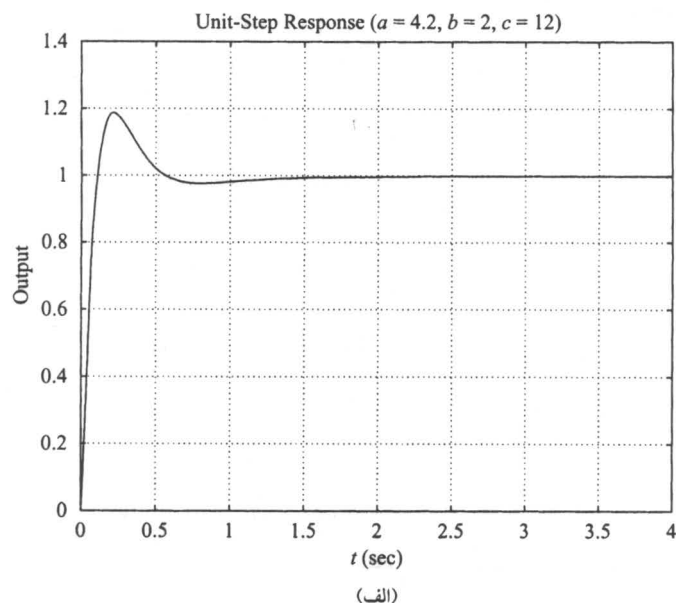
```
ylabel('Output y(t)')
```



شکل ۸-۲۴

منحنی پاسخ پله به ازای

$a = 0.9$ و $K = 3.2$



شکل ۳۵-۸

(الف) منحنی پاسخ پله سیستم

به ورودی مرجع

؛ ($c = 12, b = 2, a = 4.2$)

(ب) منحنی پاسخ پله سیستم به

ورودی اغتشاش

. ($c = 12, b = 2, a = 4.2$)

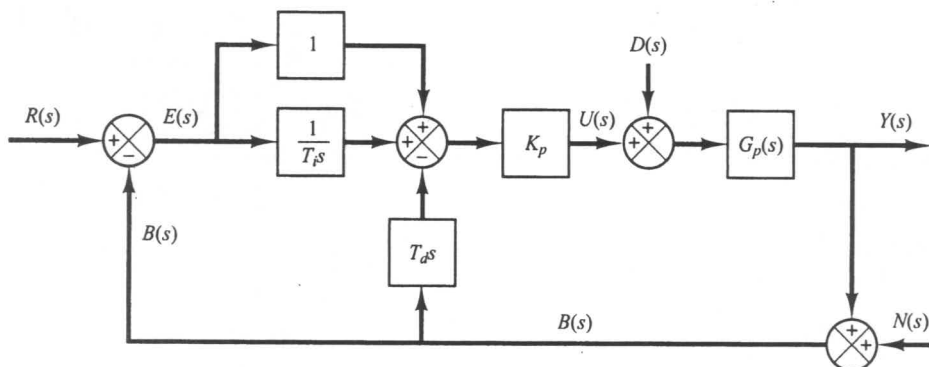
$$s^3 + (1 + 10K)s^2 + 10K(\alpha + \beta)s + 10K\alpha\beta = s^3 + 20.4s^2 + 122.44s + 259.68$$

با برابر قرار دادن ضریب توانهای مشابه s دو طرف این معادله به دست می آوریم

$$1 + 10K = 20.4$$

$$10K(\alpha + \beta) = 122.44$$

$$10K\alpha\beta = 259.68$$



شکل ۸-۲۶ سیستم دارای کنترل PI-D.

با توجه به شکل ۸-۲۶ می‌بینیم که سیگنال کارانداز $U(s)$ عبارت است از

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) B(s)$$

توجه کنید که اگر اغتشاش و نویز وجود نداشته باشد، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم دارای کنترل PID [شکل ۸-۲۵ (ب)] و سیستم دارای کنترل PI-D (شکل ۸-۲۶) به ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

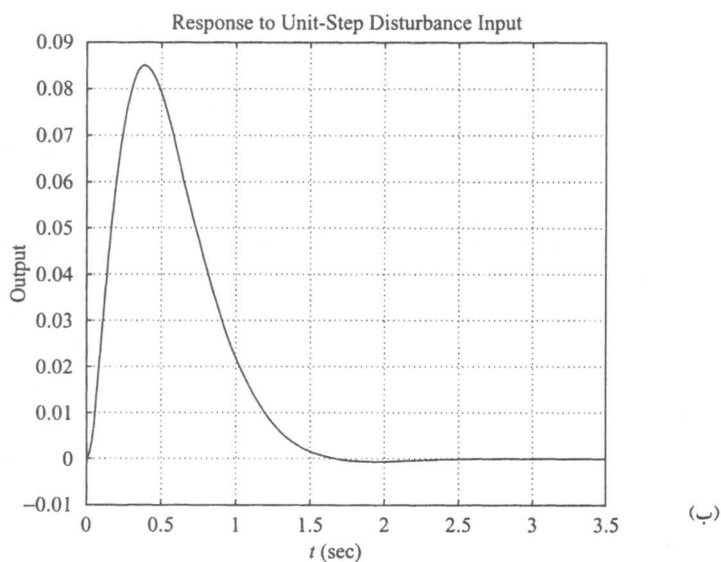
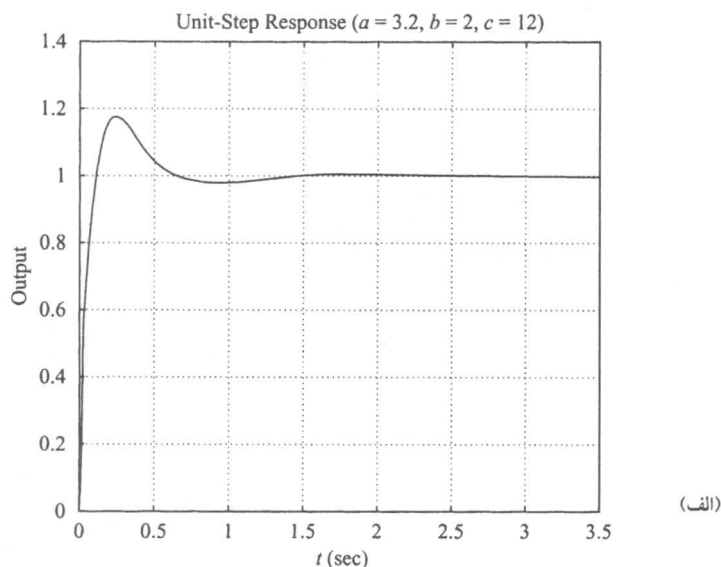
و

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

تذکر این نکته مهم است که در صورت نبودن نویز ورودی مرجع، تابع تبدیل بین اغتشاش $D(s)$ و خروجی $Y(s)$ برای هر دو سیستم یکسان، و به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

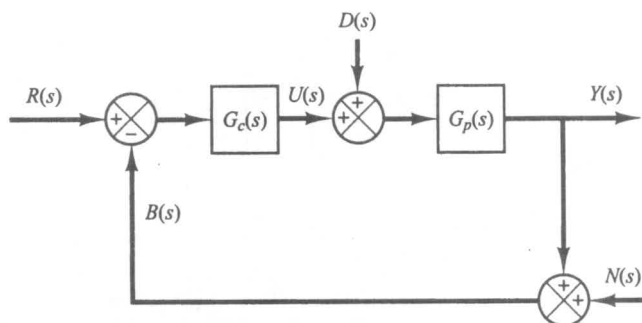
کنترل I-PD. باز حالتی را در نظر بگیرید که ورودی مرجع تابع پله‌ای است. در هر دو طرح کنترل PID و کنترل PI-D سیگنال کارانداز یک تابع پله‌ای دارد. در بسیاری از موارد تغییر پله‌ای در سیگنال کارانداز می‌تواند نامطلوب باشد، بنابراین انتقال عمل کنترل تناسبی و عمل کنترل مشتقی به مسیر فیدبک، به نحوی که این اعمال تنها بر سیگنال فیدبک شده اثر بگذارند، می‌تواند راهگشا باشد. شکل ۸-۲۷ این طرح کنترل را نشان می‌دهد که



شکل ۸-۳۶ (الف) منحنی پاسخ پله سیستم به ورودی مرجع ($a = 3.2, b = 2, c = 12$)؛ (ب) منحنی پاسخ پله سیستم به ورودی اغتشاش ($a = 3.2, b = 2, c = 12$).

مسئله ما به طراحی $G_c(s)$ برای برآوردن خواسته‌های مربوط به پاسخ به ورودیهای پله، شیب، و شتاب تبدیل می‌شود.

چون صورت شامل s است، $G_c(s)$ باید انتگرالگیر داشته باشد تا این s حذف شود. [گرچه برای صفر بودن خطای حالت ماندگار به ازای ورودی اغتشاش پله واحد باید در صورت $Y(s)/D(s)$ جمله s وجود



شکل ۸-۲۸

سیستم کنترل با یک درجه آزادی.

۸-۶ کنترل با دو درجه آزادی

سیستم شکل ۸-۲۸ را در نظر بگیرید. این سیستم علاوه بر ورودی مرجع $R(s)$ ، در معرض ورودی اغتشاش $D(s)$ ، و ورودی نویز $N(s)$ نیز قرار دارد. $G_c(s)$ تابع تبدیل کنترل کننده و $G_p(s)$ تابع تبدیل دستگاه است. فرض می‌کنیم $G_p(s)$ ثابت و غیرقابل تغییر است.

برای این سیستم توابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s) = G_{yr}$ ، $Y(s)/D(s) = G_{yd}$ و $Y(s)/N(s) = G_{yn}$ را می‌توان به صورت زیر یافت

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

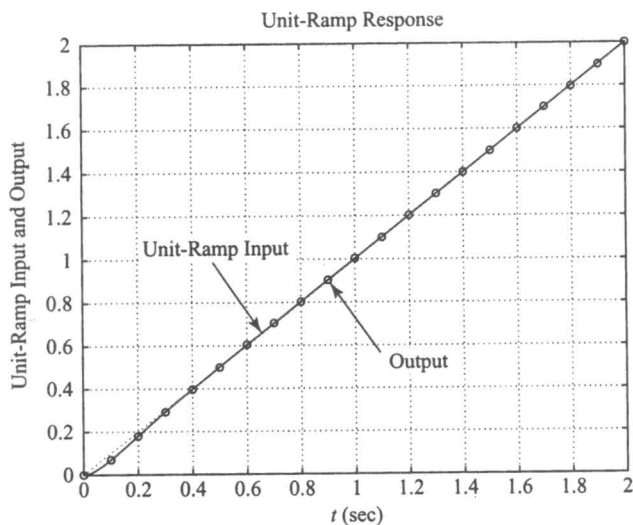
[در یافتن $Y(s)/R(s)$ فرض کرده‌ایم $D(s)=0$ و $N(s)=0$ ؛ برای یافتن $Y(s)/D(s)$ و $Y(s)/N(s)$ فرض مشابهی صورت گرفته است.] درجه آزادی سیستم کنترل براین اساس تعیین می‌شود که در میان این توابع تبدیل چند تابع مستقل وجود دارد. در سیستم فعلی

$$G_{yr} = \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

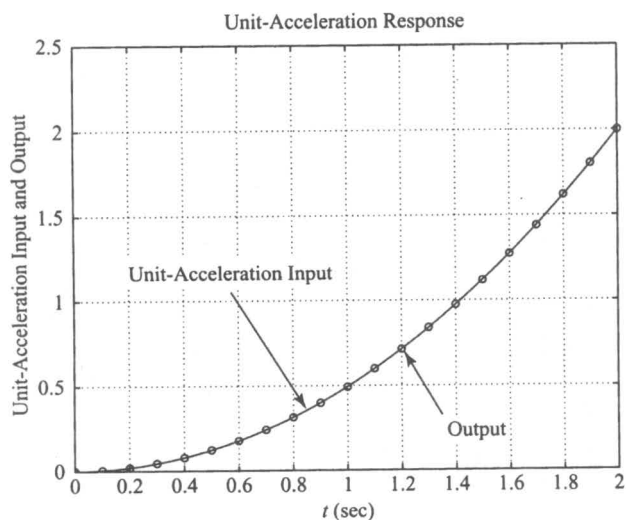
$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

از سه تابع تبدیل حلقه بسته G_{yr} ، G_{yn} و G_{yd} اگر یکی معلوم باشد. دو تای دیگر نیز تعیین می‌شوند. یعنی سیستم شکل ۸-۲۸ سیستمی با یک درجه آزادی است.

حال سیستم شکل ۸-۲۹ را در نظر بگیرید، که در آن تابع تبدیل دستگاه است و ثابت و غیرقابل تغییر فرض می‌شود. برای این سیستم توابع تبدیل حلقه بسته G_{yr} ، G_{yn} و G_{yd} به ترتیب عبارت‌اند از



(الف)



(ب)

شکل ۸-۳۸

(الف) پاسخ به ورودی مرجع

شیب واحد؛ (ب) پاسخ به

ورودی مرجع شتاب واحد.

سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۸-۳۹ را در نظر بگیرید. این یک سیستم کنترل با دو درجه آزادی است. در مسئله طراحی در نظر گرفته شده در اینجا فرض می‌کنیم که ورودی نویز $N(s)$ صفر است. فرض کنید که تابع تبدیل دستگاه $G_p(s)$ عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

همچنین فرض کنید که کنترل کننده $G_{c1}(s)$ یک کنترل کننده PID است. یعنی

$$G_{c1}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

مثال ۵-۸

پس

$$G_{yr} = G_{c2} G_{yd} + \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

واضح است که با معلوم بودن G_{yd} ، G_{yn} تثبیت می‌شود، ولی G_{yr} نه، زیرا G_{c2} مستقل از G_{yd} است. در بخش ۷-۸ خواهیم دید که در این سیستم‌های کنترل دارای دو درجه آزادی می‌توان مشخصات حلقه بسته و مشخصات فیدبک را به طور مستقل از هم تنظیم کرد و عملکرد سیستم را بهبود بخشید.

۷-۸ رهیافت جایدهی صفر برای بهبود مشخصات پاسخ

در اینجا نشان می‌دهیم که با رهیافت جایدهی صفر که در ادامه همین بخش معرفی می‌شود می‌توان به اهداف زیر دست یافت:

پاسخ به ورودی‌های مرجع شیب و سهمی خطای حالت ماندگار نداشته باشند.

در سیستم‌های کنترل با عملکرد بسیار خوب همیشه می‌خواهیم که خروجی سیستم تغییرات ورودی را با کمترین خطا دنبال کند. برای ورودی‌های پله، شیب، و شتاب نبودن خطای حالت ماندگار امر مطلوبی است. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان سیستم کنترلی طراحی کرد که در دنبال کردن ورودی‌های شیب و شتاب خطای حالت ماندگار نداشته باشد، و در همین حال پاسخ به ورودی پله‌ای اغتشاش نیز به سرعت به صفر بگراید.

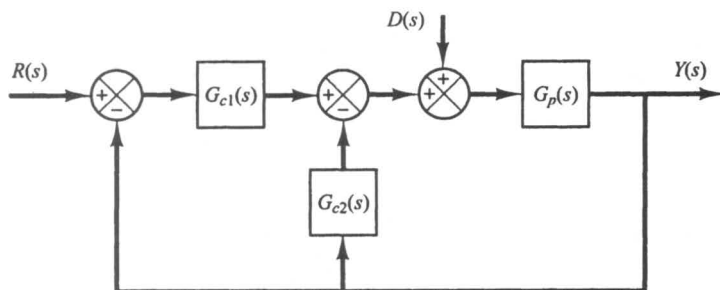
سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۳۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تابع تبدیل دستگاه $G_p(s)$ یک تابع تبدیل می‌نیم فاز و به صورت زیر است

$$G_p(s) = K \frac{A(s)}{B(s)}$$

که در آن

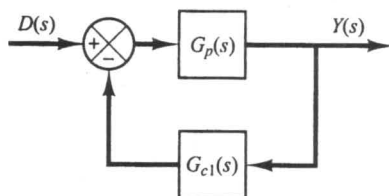
$$A(s) = (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)$$

$$B(s) = s^N (s + p_{N+1})(s + p_{N+2}) \cdots (s + p_n)$$



شکل ۸-۳۱

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.



شکل ۸-۴۰ سیستم کنترل.

این کنترل کننده یک قطب در مبدا، و دو صفر دارد. اگر فرض شود که دو صفر در یک محل قرار دارند (صفر مضاعف) می توان $G_{c1}(s)$ را به صورت زیر نوشت

$$G_{c1}(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

بنابراین معادله مشخصه سیستم به صورت زیر درمی آید

$$1 + G_{c1}(s)G_p(s) = 1 + \frac{K(s+a)^2}{s} \frac{5}{(s+1)(s+5)} = 0$$

یا

$$s(s+1)(s+5) + 5K(s+a)^2 = 0$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$s^3 + (6+5K)s^2 + (5+10Ka)s + 5Ka^2 = 0 \quad (8-8)$$

اگر صفر مضاعف را بین $s = -3$ و $s = -6$ قرار دهیم، مکان هندسی ریشه های $G_{c1}(s)G_p(s)$ به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۴۱ درمی آید. سرعت پاسخ باید زیاد باشد، ولی نه زیاده از حد لازم، زیرا سرعت زیاده تر در حالت کلی مستلزم استفاده از عناصر گرانتر است. بنابراین قطبهای حلقه بسته غالب را به صورت زیر برمی گزینیم

$$s = -3 \pm j2$$

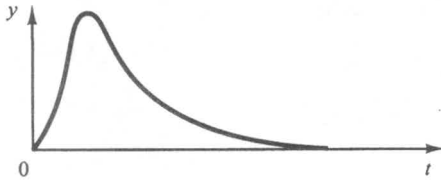
(توجه کنید که این گزینش یکتا نیست. بینهایت قطب حلقه بسته ممکن وجود دارد که قابل انتخاب است.) چون سیستم مرتبه سوم است، سه قطب حلقه بسته وجود دارد. سومین قطب را روی بخش محور حقیقی در $s = -5$ انتخاب می کنیم.

$s = -3 + j2$ را در معادله (۸-۸) قرار می دهیم

$$(-3+j2)^3 + (6+5K)(-3+j2)^2 + (5+10Ka)(-3+j2) + 5Ka^2 = 0$$

که به صورت زیر ساده می شود

$$24 + 25K - 30Ka + 5Ka^2 + j(-16 - 60K + 20Ka) = 0$$



شکل ۸-۳۲

پاسخ نوعی به ازای ورودی اغتشاش پله‌ای.

توجه کنید که $Y(s)/R(s)$ و $Y(s)/D(s)$ عبارت‌اند از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1} G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}, \quad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

توجه کنید مخرج $Y(s)/R(s)$ و $Y(s)/D(s)$ یکی است. (برای تمام سیستمها همیشه همین طور است. هر سیستمی تنها یک معادله مشخصه دارد.) قبل از انتخاب قطبهای $Y(s)/R(s)$ باید صفرهای $Y(s)/R(s)$ را در محل‌های مطلوب قرار دهیم.

جایدهی صفر. سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$p(s)$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_2 (s + s_1)(s + s_2)$$

یعنی صفرهای $s = -s_1$ و $s = -s_2$ را به همراه a_2 طوری برمی‌گزینیم که چندجمله‌ای صورت $p(s)$ با مجموعه سه جمله آخر مخرج برابر باشد. در این صورت خطای حالت ماندگار سیستم به ازای ورودی‌های پله، شیب، و شتاب صفر می‌شود.

قیودی که بر مشخصات پاسخ سیستم گذاشته می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم ماکزیمم فراجش پاسخ به ورودی مرجع پله واحد بین دو حد دلخواه باشد، مثلاً

$$10\% < \text{ماکزیمم فراجش} < 2\%$$

حد پایین را کمی بزرگتر از صفر برگزیده‌ایم تا پاسخ فرامیرا نشود. هر چه حد بالا کوچکتر باشد، تعیین ضرائب a مشکل‌تر می‌شود. در برخی موارد هیچ ترکیبی نمی‌تواند مشخصات خواسته شده را برآورده کند. در این صورت باید حد بالای فراجش را بالاتر ببریم. باید به کمک MATLAB حداقل یک مجموعه جواب برای مقادیر a جستجو کنیم که مشخصات بیان شده را داشته باشد. با در نظر گرفتن ملاحظات محاسباتی بهتر است به جای جستجو برای یافتن مقادیر a قطبهای حلقه بسته قابل قبولی بیابیم، به این منظور ناحیه خاصی از نیم‌صفحه چپ را جستجو می‌کنیم. پس از یافتن قطبهای حلقه بسته تمام ضرائب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ تعیین می‌شود.

$$G_{c1}(s) = \frac{1/3210(s^2 + 7/2112s + 13)}{s} \quad (12-8)$$

$$= 9/5260 \left(1 + \frac{1}{0/5547s} + 0/1387s \right)$$

بنابراین

$$K_p = 9/5260, \quad T_i = 0/5547, \quad T_d = 0/1387$$

برای بررسی پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/D(s)$ را به دست می‌آوریم

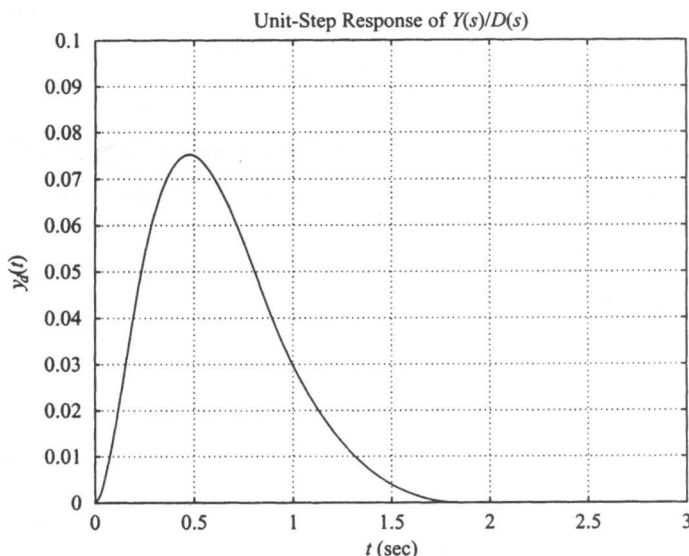
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$

$$= \frac{5s}{s(s+1)(s+5) + 5K(s+a)^2}$$

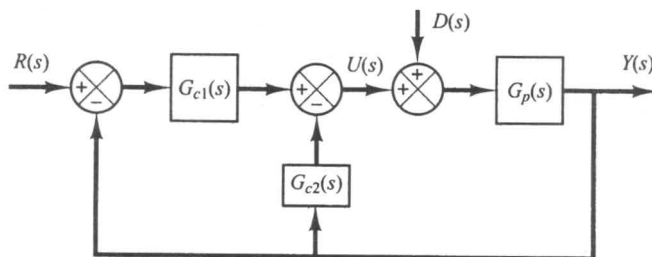
$$= \frac{5s}{s^3 + 12/605s^2 + 25/63s + 85/8673}$$

پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای در شکل ۴۲-۸ نشان داده شده است. منحنی پاسخ خوب و قابل قبول می‌نماید. توجه کنید که قطبهای حلقه بسته در $s = -3 \pm j2$ و $s = -6/6051$ قرار دارند. قطبهای حلقه بسته مزدوج مختلط به صورت قطبهای غالب عمل می‌کنند.

طراحی $G_{c2}(s)$: اکنون $G_{c2}(s)$ را برای دستیابی به پاسخ مطلوب به ورودیهای مرجع طرح می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s)$ عبارت است از



شکل ۴۲-۸ پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای.



شکل ۸-۳۳

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

داریم

$$G_{c2} = \left[\frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} - \frac{a_1 s + a_0 + a_2 s^2}{K s} \right] \frac{1}{A(s)} \quad (8-6)$$

$$= \frac{(K\alpha - a_1)s + (K\beta - a_0) + (K\gamma - a_2)s^2}{K s} \frac{1}{A(s)}$$

دو کنترل کننده G_{c1} و G_{c2} به ترتیب از معادلات (۸-۵) و (۸-۶) به دست می‌آیند.

سیستم کنترل با دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل ۸-۳۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل دستگاه $G_p(s)$ عبارت است از

مثال ۸-۴

$$G_p(s) = \frac{1^0}{s(s+1)}$$

کنترل کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ را به نحوی طرح کنید که پاسخ به ورودی مرجع پله واحد ماکزیم فراجشی کمتر از ۱۹٪ و بیشتر از ۲٪ داشته، زمان نشست آن کمتر از ۱ sec باشد. می‌خواهیم خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های مرجع شیب و شتاب صفر باشد. پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد باید کوچک باشد و به سرعت به صفر بگراید.

برای طراحی کنترل کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ مناسب ابتدا توجه کنید که

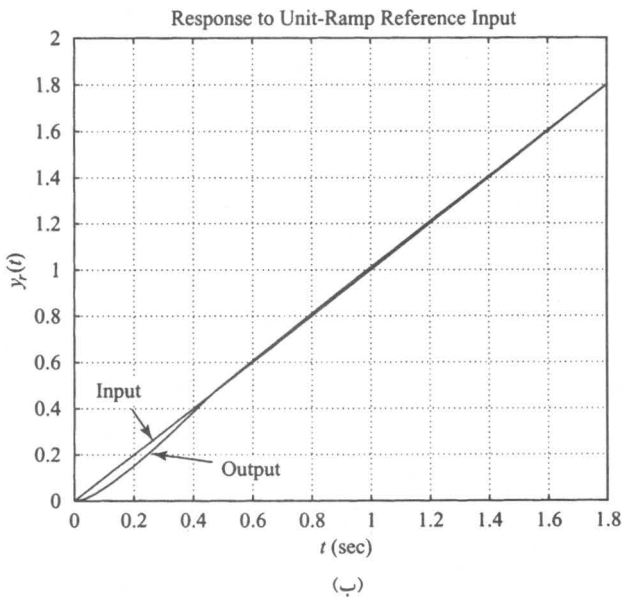
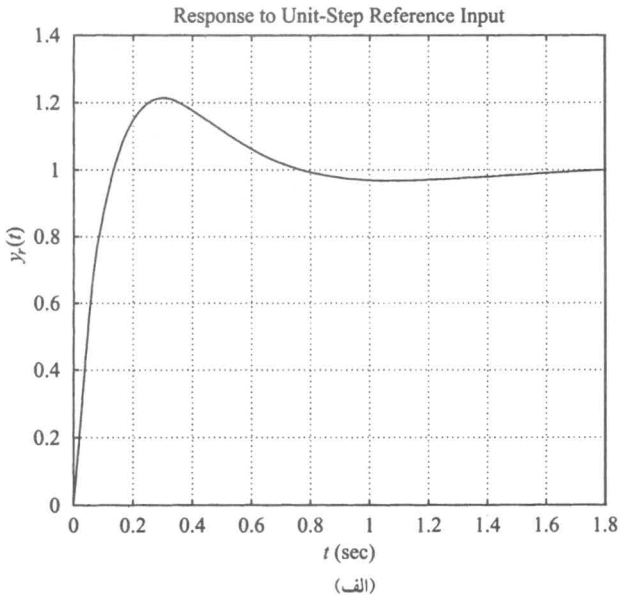
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

برای ساده کردن نمادگذاری تعریف می‌کنیم

$$G_c = G_{c1} + G_{c2}$$

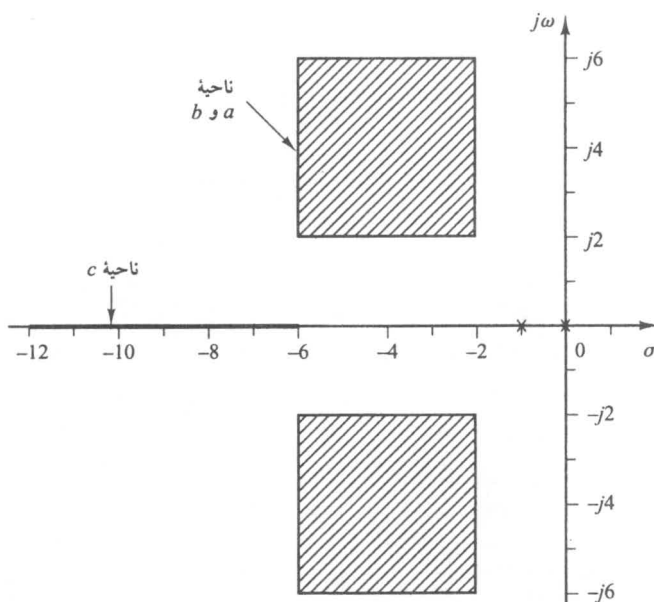
پس

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{\frac{1^0}{s(s+1)}}{1 + \frac{1^0}{s(s+1)} G_c} = \frac{1^0}{s(s+1) + 1^0 G_c}$$



شکل ۸-۴۳

(الف) پاسخ به ورودی مرجع پله واحد؛ (ب) پاسخ به ورودی مرجع شیب واحد.



شکل ۸-۳۴

ناحیه جستجو برای a ، b ، و c .

و دیگر قطب حلقه بسته حقیقی و به صورت زیر است

$$s = -c$$

توجه کنید که در این مسئله سه خواسته داریم. اولین خواسته این است که پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای سریعاً مستهلک شود. دومین خواسته این است که ماکزیمم فراجهش در پاسخ به ورودی مرجع پله واحد بین ۱۹٪ و ۲٪ و زمان نشست کمتر از ۱ sec باشد. سومین خواسته این است که خطاهای حالت ماندگار در پاسخ به ورودی‌های مرجع شیب و شتاب صفر باشد.

باید به صورت محاسباتی به دنبال یک مجموعه مقدار مناسب برای a ، b ، و c باشیم. برای ارضای اولین خواسته ناحیه جستجو برای a ، b ، و c را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$2 \leq a \leq 6, \quad 2 \leq b \leq 6, \quad 6 \leq c \leq 12$$

این ناحیه در شکل ۸-۳۴ نشان داده شده است. اگر قطبهای غالب حلقه بسته $s = -a \pm jb$ در ناحیه هاشور زده این شکل باشد، پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای به سرعت مستهلک می‌شود. (اولین خواسته برآورده می‌شود.)

توجه کنید که مخرج $Y(s)/D(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} s^2(s+1) + 1 \cdot K(s+\alpha)(s+\beta) \\ &= s^3 + (1+1 \cdot K)s^2 + 1 \cdot K(\alpha+\beta)s + 1 \cdot K\alpha\beta \\ &= (s+a+jb)(s+a-jb)(s+c) \\ &= s^3 + (\gamma a+c)s^2 + (a^2+b^2+\gamma ac)s + (a^2+b^2)c \end{aligned}$$

چون مخرجهای $Y(s)/D(s)$ و $Y(s)/R(s)$ یکی است، مخرج $Y(s)/D(s)$ مشخصات پاسخ به ورودی

ولی پاسخ اندازه جبران ساز در ناحیه فرکانسی $\omega > 1/T_d$ افزایشی است. (پس کنترل کننده PD یک فیلتر بالا گذر است.) این افزایش پیوسته اندازه نامطلوب است، زیرا نویزهای فرکانس بالای موجود در سیستم را تقویت می کند. جبران ساز پیشفاز می تواند پیشفازی لازم را ایجاد کند، و افزایش دامنه آن در ناحیه فرکانس بالا بسیار کمتر از کنترل کننده PD است. به همین خاطر جبران ساز پیشفاز بر کنترل کننده PD رجحان دارد.

چون کنترل کننده PD تابع تبدیلی با یک صفر و بدون قطب دارد، نمی توان آن را با عناصر غیرفعال RLC ساخت. کنترل کننده PD را می توان با آپ امپ، مقاومت و خازن ساخت، ولی چون همانطوری که گفتیم این کنترل کننده یک فیلتر بالاگذر است، عمل مشتقگیری آن می تواند در بعضی موارد مشکلات جدی نویز را به همراه داشته باشد. این مشکل در کنترل کننده های PD ساخته شده با عناصر هیدرولیکی و نیوماتیکی وجود ندارد.

کنترل کننده PD همانند جبران ساز پیشفاز مشخصات پاسخ گذرا را بهبود می بخشد، پایداری را بهتر می کند، و پهنای باند سیستم را زیاد می کند که به معنی کوچک شدن زمان صعود است.

کنترل کننده PID ترکیبی از کنترل کننده های PI و PD است. این کنترل کننده یک جبران ساز پسفاز - پیشفاز است. توجه کنید که عملهای کنترلی PI و PD در نواحی فرکانس مختلف صورت می گیرند، کنترل PI در ناحیه فرکانس پایین و کنترل PD در ناحیه فرکانس بالا. کنترل PID را در مواقعی می توان به کار برد که هم پاسخ گذرا و هم عملکرد حالت ماندگار سیستم نیاز به بهبود داشته باشد.

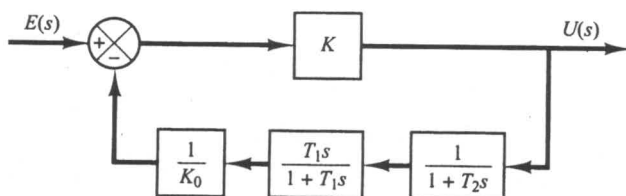
الف ۸-۲ نشان دهید که تابع تبدیل $U(s)/E(s)$ کنترل کننده PID شکل ۸-۴ عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_o \cdot \frac{T_1 + T_2}{T_1} \left[1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} + \frac{T_1 T_2 s}{T_1 + T_2} \right]$$

فرض کنید که بهره K از یک خیلی بزرگتر است.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{K}{1 + K \left(\frac{1}{K_o} \frac{T_1 s}{1 + T_1 s} \frac{1}{1 + T_2 s} \right)} \\ &\approx \frac{K}{K \left(\frac{1}{K_o} \frac{T_1 s}{1 + T_1 s} \frac{1}{1 + T_2 s} \right)} \\ &= \frac{K_o (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{T_1 s} \end{aligned}$$



شکل ۸-۴

کنترل کننده PID.

```
table(k,:)= [a(i) b(j) c(h) m ts]
```

```
table =
```

```
4.2000 2.0000 12.0000 1.1896 0.8500
4.0000 2.0000 12.0000 1.1881 0.8700
4.0000 2.0000 11.8000 1.1890 0.8900
4.0000 2.0000 11.6000 1.1899 0.9000
3.8000 2.2000 12.0000 1.1883 0.9300
3.8000 2.2000 11.8000 1.1894 0.9400
3.8000 2.0000 12.0000 1.1861 0.8900
3.8000 2.0000 11.8000 1.1872 0.9100
3.8000 2.0000 11.6000 1.1882 0.9300
3.8000 2.0000 11.4000 1.1892 0.9400
3.6000 2.4000 12.0000 1.1893 0.9900
3.6000 2.2000 12.0000 1.1867 0.9600
3.6000 2.2000 11.8000 1.1876 0.9800
3.6000 2.2000 11.6000 1.1886 0.9900
3.6000 2.0000 12.0000 1.1842 0.9200
3.6000 2.0000 11.8000 1.1852 0.9400
3.6000 2.0000 11.6000 1.1861 0.9500
3.6000 2.0000 11.4000 1.1872 0.9700
3.6000 2.0000 11.2000 1.1883 0.9800
3.4000 2.0000 12.0000 1.1820 0.9400
3.4000 2.0000 11.8000 1.1831 0.9600
3.4000 2.0000 11.6000 1.1842 0.9800
3.2000 2.0000 12.0000 1.1797 0.9600
2.0000 2.0000 6.0000 1.2163 1.8900
```

همانطور که در بالا گفتیم ۲۳ مجموعه متغیر a ، b ، و c خواسته‌ها را برآورده می‌کنند. منحنی‌های پاسخ پله سیستم به ازای هر سه ۲۳ مجموعه تقریباً یکی است. شکل ۸-۳۵ (الف) پاسخ پله واحد را به ازای مجموعه زیر نشان می‌دهد

$$a=4.2 \quad , \quad b=2 \quad , \quad c=12$$

ماکزیمم فراجشش ۱۸٫۹۶٪ و زمان نشست ۰٫۸۵ sec است. با استفاده از مقادیر a ، b ، و c بالا قطبهای حلقه بسته در مکان‌های زیر قرار دارند

$$s=-12 \quad , \quad s=-4.2 \pm j2$$

با استفاده از این قطبهای حلقه بسته مخرج $Y(s)/D(s)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$s^2(s+1)+10K(s+\alpha)(s+\beta)=(s+4.2+j2)(s+4.2-j2)(s+12)$$

و سرانجام

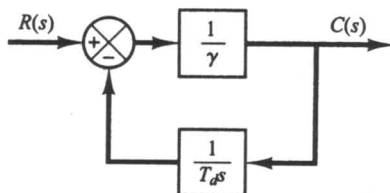
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_o R_f}{R_f R_f} \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_f C_f}\right)}{s \left(s + \frac{R_1 + R_f}{R_1 R_f C_1}\right)}$$

توجه کنید که $R_1 C_1$ و $R_f C_f$ محل صفرهای کنترل کننده را تعیین می کنند و R_f ، R_1 ، و C_1 بر محل قطب در بخش منفی محور حقیقی اثر می گذارد. بهره کنترل کننده با R_o/R_f تنظیم می شود.

الف ۴-۸ در عمل ساخت مشتقگیر واقعی غیرممکن است. بنابراین همیشه مجبوریم مشتقگیر واقعی $T_d s$ را به صورت تقریبی زیر بسازیم

$$\frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

یک راه ساخت این مشتقگیر تقریبی استفاده از یک انتگرالگیر در مسیر فیدبک است. نشان دهید که تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۴۶-۸ به صورت عبارت بالا است. (در مشتقگیرهای تجارتي مقدار γ حدود ۱٪ است.)



شکل ۴۶-۸ مشتقگیر تقریبی.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۴۶-۸ عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{\gamma}}{1 + \frac{1}{\gamma T_d s}} = \frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

توجه کنید که این مشتقگیر دارای تاخیر مرتبه اول، پهنای باند سیستم کنترل حلقه بسته را کم کرده، اثرهای مضر سیگنالهای نویزی را کم می کند.

الف ۵-۸ سیستم شکل ۴۷-۸ را در نظر بگیرید که کنترلر PID یک دستگاه مرتبه دوم را نشان می دهد. اغتشاش $D(s)$ به صورت نشان داده شده به سیستم وارد می شود. فرض کنید ورودی مرجع $R(s)$ معمولاً مقداری ثابت دارد، و مشخصات پاسخ سیستم به اغتشاش بسیار اهمیت دارد.

سیستم کنترل را به نحوی طرح کنید که پاسخ به اغتشاش پله ای سریعاً میرا شود (زمان نشست ۲٪ برابر ۲ تا ۳ ثانیه). آرایش قطبهای حلقه بسته را به نحوی برگزینید که سیستم یک زوج قطب مختلط غالب داشته باشد. سپس پاسخ به ورودی پله ای را بیابید. پاسخ به ورودی مرجع پله واحد را نیز بیابید.

پس

$$K = 1/94, \quad \alpha + \beta = \frac{122/44}{19/4}, \quad \alpha\beta = \frac{259/68}{19/4}$$

و $G_c(s)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K(s+\alpha)(s+\beta)}{s} \\ &= \frac{K[s^2 + (\alpha+\beta)s + \alpha\beta]}{s} \\ &= \frac{1/94 s^2 + 12/244 s + 25/968}{s} \end{aligned}$$

تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/D(s)$ به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{10}{s(s+1) + 10 G_c} \\ &= \frac{10}{s(s+1) + 10 \frac{1/94 s^2 + 12/244 s + 25/968}{s}} \\ &= \frac{10s}{s^3 + 20/4 s^2 + 122/44 s + 259/68} \end{aligned}$$

با استفاده از این عبارت می توان پاسخ $y(t)$ سیستم به ازای ورودی اغتشاش پله واحد را به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۳۵ (ب) به دست آورد.

شکل ۸-۳۶ (الف) پاسخ سیستم به ورودی مرجع پله واحد را به ازای مقادیر زیر نشان می دهد

$$a = 3/2, \quad b = 2, \quad c = 12$$

شکل ۸-۳۶ (ب) پاسخ این سیستم را به ازای ورودی اغتشاش پله واحد نشان می دهد. مقایسه شکل های ۸-۳۵ (الف) و ۸-۳۶ (الف) نشان می دهد که این دو پاسخ تقریباً یکسان هستند، ولی مقایسه شکل های ۸-۳۵ (ب) و ۸-۳۶ (ب) نشان می دهد که سیستم اولی کمی بهتر از سیستم دومی است. مقایسه پاسخ سیستمها به ازای تمام مجموعه مقادیر مندرج در جدول نشان می دهد که مجموعه اول ($a = 4/2, b = 2, c = 12$) بهترین سیستم را به دست می دهد. بنابراین برای جواب این مسئله انتخاب می کنیم

$$a = 4/2, \quad b = 2, \quad c = 12$$

گام دوم طراحی: اکنون به سراغ طراحی $G_{c1}(s)$ می رویم. چون $Y(s)/R(s)$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_{c1} G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{\frac{10}{s(s+1)} G_{c1}}{1 + \frac{10}{s(s+1)} \frac{1/94 s^2 + 12/244 s + 25/968}{s}} \\ &= \frac{10s G_{c1}}{s^3 + 20/4 s^2 + 122/44 s + 259/68} \end{aligned}$$

با این کنترل کننده PID پاسخ به ورودی اغتشاش عبارت است از

$$G_d(s) = \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} D(s)$$

$$= \frac{s}{(s+10)(s^2 + 4s + 16)} D(s)$$

خروجی حالت ماندگار به ازای ورودی اغتشاش پله واحد صفر است، زیرا

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s C_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{(s+10)(s^2 + 4s + 16)} \frac{1}{s} = 0$$

با استفاده از MATLAB می‌توان پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد را به دست آورد. برنامه ۸-۹ منحنی پاسخ شکل ۸-۴۸ (الف) را ایجاد می‌کند. این منحنی نشان می‌دهد که زمان نشست تقریباً $s \ 2.7$ است. پاسخ میرایی سریعی دارد. پس سیستم طراحی شده قابل قبول است.

برای ورودی مرجع $r(t)$ تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر است

$$\frac{C_r(s)}{R(s)} = \frac{10.4(s^2 + 4.5192s + 15.385)}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

$$= \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

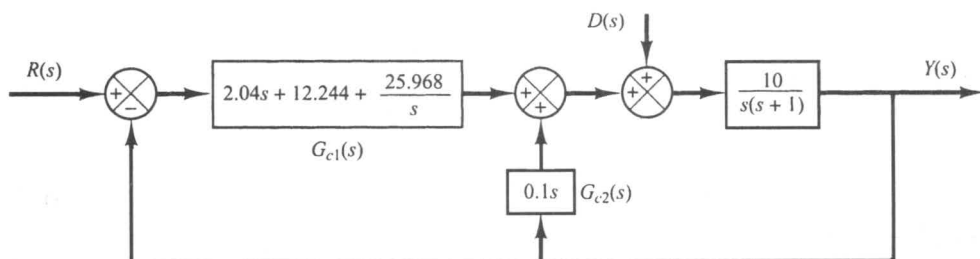
MATLAB Program 8-9

% ***** Response to unit-step disturbance input *****

```
numd = [1 0];
dend = [1 14 56 160];
t = 0:0.01:5;
[c1,x1,t] = step(numd,dend,t);
plot(t,c1)
grid
title('Response to Unit-Step Disturbance Input')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output to Disturbance Input')
```

% ***** Response to unit-step reference input *****

```
numr = [10.4 47 160];
denr = [1 14 56 160];
[c2,x2,t] = step(numr,denr,t);
plot(t,c2)
grid
title('Response to Unit-Step Reference Input')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output to Reference Input')
```



شکل ۳۷-۸ نمودار بلوکی سیستم طراحی شده.

داشته باشد، ولی وجود s در صورت تابع تبدیل $Y(s)/R(s)$ لازم نیست. [برای حذف آفست در پاسخ به ورودی مرجع پله واحد و حذف خطا در دنبال کردن ورودی مرجع شیب و شتاب، صورت $Y(s)/R(s)$ باید برابر سه جمله آخر مخرج باشد. یعنی

$$10sG_{c1}(s) = 20/4s^2 + 122/44s + 259/68$$

یا

$$G_{c1}(s) = 2/04s + 12/244 + \frac{25/968}{s}$$

پس $G_{c1}(s)$ یک کنترل کننده PID است. چون $G_c(s)$ به صورت زیر می‌باشد

$$G_c(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s) = \frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s}$$

به دست می‌آوریم

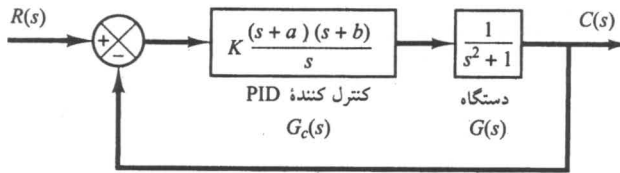
$$\begin{aligned} G_{c2}(s) &= G_c(s) - G_{c1}(s) \\ &= \left(\frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s} \right) - \left(\frac{2/04s + 12/244 + 25/968}{s} \right) \\ &= -0/1s \end{aligned}$$

پس $G_{c2}(s)$ یک کنترل کننده مشتقی است. نمودار بلوکی سیستم طراحی شده در شکل ۳۷-۸ نشان داده شده است.

اکنون تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20/4s^2 + 122/44s + 259/68}{s^2 + 20/4s^2 + 122/44s + 259/68}$$

پاسخ به ورودی مرجع شیب واحد و ورودی مرجع شتاب واحد به ترتیب در شکل‌های ۳۸-۸ (الف) و (ب) نشان داده شده است. خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های شیب و شتاب صفر است. پس تمام خواسته‌ها برآورده شده‌اند. به این ترتیب کنترل کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ طراحی شده قابل قبول هستند.



شکل ۸-۴۹

سیستم کنترل شده با
کنترل کننده PID.

الف ۸-۶ سیستم نشان داده شده در شکل ۸-۴۹ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک کنترل کننده PID طراحی کنیم $G_c(s)$ به نحوی که قطبهای غالب حلقه بسته در $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ قرار گیرند. برای کنترل کننده PID انتخاب کنید $a=1$ و مقادیر K و b را بیابید. نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم طراحی شده را رسم کنید.
حل: چون

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1)(s+b)}{s} \frac{1}{s^2+1}$$

جمع زاویه‌ها از صفر واقع در $s = -1$ و قطبهای واقع در $s = 0$ ، $s = j$ و $s = -j$ تا $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ (که یکی از قطبهای حلقه بسته مطلوب است) عبارت است از

$$90^\circ - 143.74^\circ - 120^\circ - 110.1^\circ = -283.84^\circ$$

پس صفر واقع در $s = -b$ باید زاویه‌ای برابر 103.84° ایجاد کند. بنابراین صفر باید در محل زیر باشد

$$b = 0.5714$$

ثابت بهره K را می‌توان با توجه به شرط اندازه به دست آورد

$$\left| \frac{K(s+1)(s+0.5714)}{s} \frac{1}{s^2+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

$$K = 2.3333$$

یا

پس جبران کننده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = 2.3333 \frac{(s+1)(s+0.5714)}{s}$$

تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر درمی‌آید

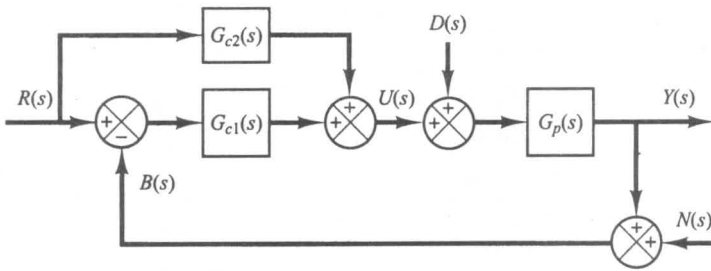
$$G_c(s)G(s) = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s} \frac{1}{s^2+1}$$

برای این سیستم جبران شده مکان هندسی ریشه‌ها به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۵۰ است.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s^3 + s + 2.3333(s+1)(s+0.5714)}$$

قطبهای حلقه بسته در $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ و $s = -0.3333$ قرار دارند. شکل ۸-۵۱ منحنی پاسخ پله را نشان



شکل ۸-۳۹

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

کنترل‌کننده $G_{c1}(s)$ یک کنترل‌کننده P یا PD است. [اگر $G_{c2}(s)$ عمل کنترلی انتگرالی داشته باشد، در سیگنال ورودی یک مولفه شیب وارد می‌کند که نامطلوب است. بنابراین $G_{c2}(s)$ نباید شامل عمل کنترلی انتگرالی باشد.] پس فرض می‌کنیم که

$$G_{c1}(s) = \hat{K}_p (1 + \hat{T}_d s)$$

که در آن $\hat{T}_d$ می‌تواند صفر باشد.

بیایید کنترل‌کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ را به نحوی طراحی کنیم که پاسخ به ورودی مرجع و پاسخ به ورودی اغتشاش «مشخصات مطلوبی» داشته باشد، به این ترتیب که

۱. پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای باید یک قله کوچک داشته باشد و سرانجام صفر شود. (یعنی خطای حالت ماندگار باید صفر باشد.)

۲. پاسخ به ورودی مرجع پله‌ای باید فراجهی کمتر از ۲۵٪ داشته، زمان نشست آن کمتر از ۲ sec باشد. خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های مرجع شیب و شتاب نیز باید صفر باشد.

طراحی این سیستم کنترل دو درجه آزادی را می‌توان در دو گام زیر انجام داد:

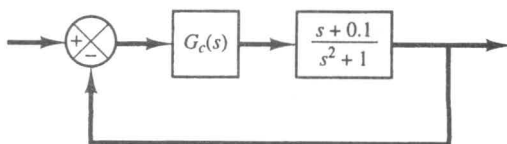
۱. تعیین $G_{c1}(s)$ به نحوی که پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای مشخصات مطلوب را داشته باشد.
۲. طراحی $G_{c2}(s)$ به نحوی که پاسخ به ورودی‌های مرجع مشخصات مطلوب را داشته باشد، بدون این که پاسخ به ورودی اغتشاش در نظر گرفته شده در گام ۱ تغییر کند.

طراحی $G_{c1}(s)$: ابتدا توجه کنید که ورودی نویز $N(s)$ را صفر در نظر گرفته‌ایم. برای یافتن پاسخ به ورودی اغتشاش فرض می‌کنیم که ورودی مرجع صفر است. در این صورت نمودار بلوکی مرتبط‌کننده $D(s)$ و $Y(s)$ را می‌توان به صورت شکل ۸-۴۰ رسم کرد. تابع تبدیل $Y(s)/D(s)$ عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$

که در آن

$$G_{c1}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_d s} + T_d s \right)$$



شکل ۸-۵۲

سیستم کنترل.

حل : چون دستگاه انتگرالگیر ندارد ، باید در جبران ساز یک انتگرالگیر منظور شود. جبران ساز را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$G_c(s) = \frac{K}{s} \hat{G}_c(s) \quad , \quad \lim_{s \rightarrow 0} \hat{G}_c(s) = 1$$

که در آن $\hat{G}_c(s)$ را بعداً تعیین می کنیم . چون ثابت خطای ایستای سرعت برابر 4 sec^{-1} مشخص شده ، داریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{s+0.1}{s^2+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s} \hat{G}_c(s) \frac{s+0.1}{s^2+1} = 0.1 K = 4$$

بنابراین $K = 40$. در نتیجه

$$G_c(s) = \frac{40}{s} \hat{G}_c(s)$$

اکنون نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم می کنیم

$$G_c(s) = \frac{40(s+0.1)}{s(s^2+1)}$$

برنامه ۸-۱۰ نمودار بوده $G(s)$ را به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۵۳ به دست می دهد .

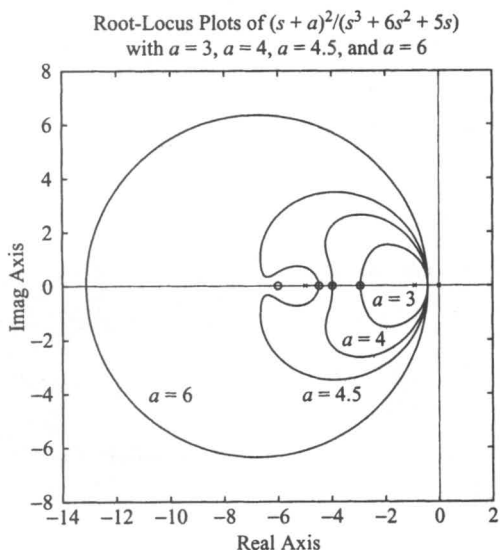
حاشیه فاز باید 50° و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر باشد . $\hat{G}_c(s)$ را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$\hat{G}_c(s) = as+1 \quad (a>0)$$

بنابراین $G_c(s)$ در ناحیه فرکانس بالا 90° پیشفازی ایجاد می کند . با استفاده از چند سعی و خطا به کمک MATLAB در می یابیم که به ازای $a = 0.1526$ حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره $+\infty \text{ dB}$ می شود. برنامه ۸-۱۱ و نمودار بوده نشان داده شده در شکل ۸-۵۴ را ببینید. این نمودار بوده نشان می دهد که ثابت خطای ایستای سرعت 4 sec^{-1} ، حاشیه فاز 50° ، و حاشیه بهره $+\infty \text{ dB}$ است . بنابراین سیستم طراحی شده تمام خواسته ها را برآورده می کند.

MATLAB Program 8-10

```
% ***** Bode Diagram *****
num = [40 4];
den = [1 0.000000001 1 0];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 40(s+0.1)/[s(s^2+1)]')
```



شکل ۸-۴۱

مکان هندسی ریشه‌های

$$\frac{5K(s+a)^2}{[s(s+1)(s+5)]}$$

به ازای $a=3, a=4, a=4.5$ و $a=6$.

با برابر صفر قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی به دست می‌آوریم

$$24 + 25K - 30Ka + 5Ka^2 = 0 \quad (8-9)$$

$$-16 - 60K + 20Ka = 0 \quad (8-10)$$

از معادله (۸-۱۰) به دست می‌آوریم

$$K = \frac{4}{5a-15} \quad (8-11)$$

با گذاشتن معادله (۸-۱۱) در معادله (۸-۹) به دست می‌آوریم

$$a^2 = 13$$

پس $a = 3.6056$ یا $a = -3.6056$. توجه کنید که مقدار K به صورت زیر درمی‌آید

$$K = 1/3210 \quad a = 3.6056 \quad \text{به ازای}$$

$$K = -0.1211 \quad a = -3.6056 \quad \text{به ازای}$$

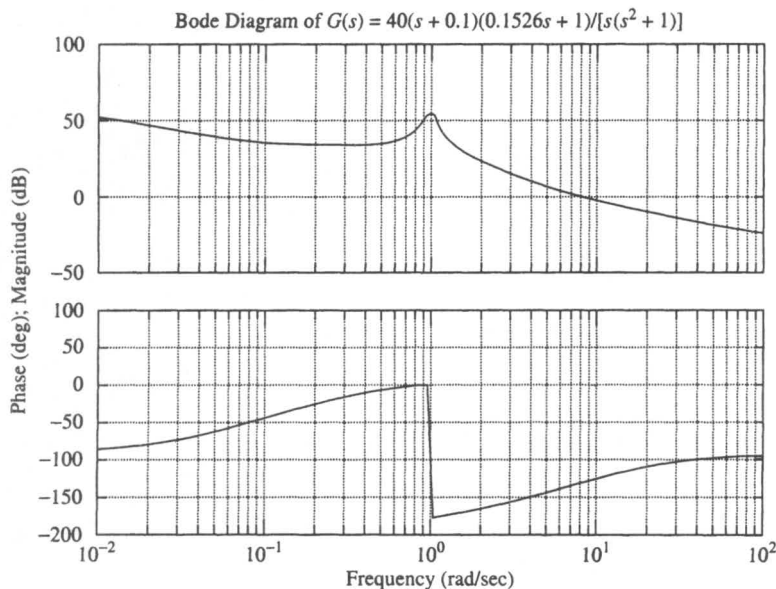
چون $G_c(s)$ در مسیر پیشخورد است، K باید مثبت باشد. بنابراین انتخاب می‌کنیم

$$K = 1/3210 \quad a = 3.6056$$

و $G_c(s)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K \frac{(s+a)^2}{s} = 1/3210 \cdot \frac{(s+3.6056)^2}{s} \\ &= \frac{1/3210 \cdot s^2 + 9/5260 \cdot s + 17/1735}{s} \end{aligned}$$

برای تعیین K_p ، T_i و T_d به صورت زیر عمل می‌کنیم



شکل ۸-۵۴

نمودار بوده $G(s) = 40(s + 0.1)(0.1526s + 1)/[s(s^2 + 1)]$.

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل حلقه باز} &= \frac{40(0.1526s + 1)}{s} \frac{s + 0.1}{s^2 + 1} \\ &= \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

حال پاسخ پله واحد و پاسخ شیب واحد سیستم طراحی شده را واریسی می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4}$$

قطبهای حلقه بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$s = -3.0032 + j5.6573$$

$$s = -3.0032 - j5.6573$$

$$s = -0.0975$$

برنامه ۸-۱۲ منحنی پاسخ پله سیستم طراحی شده را به دست می‌دهد. منحنی پاسخ پله حاصل در شکل ۸-۵۵ نشان داده شده است. توجه کنید که قطب حلقه بسته واقع در $s = -0.0975$ و صفر واقع در $s = -0.1$ دنباله‌ای دراز و کوچک ایجاد کرده‌اند.

برنامه ۸-۱۳ منحنی پاسخ شیب واحد سیستم طراحی شده را به دست می‌دهد. این منحنی در شکل ۸-۵۶ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_p(G_{c1} + G_{c2})}{1 + G_{c1}G_p} \\ &= \frac{\left[\frac{1/321s^2 + 9/526s + 17/1735}{s} + \hat{K}_p(1 + \hat{T}_d s) \right] \frac{5}{(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{1/321s^2 + 9/526s + 17/1735}{s} \frac{5}{(s+1)(s+5)}} \\ &= \frac{(6/6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d)s^2 + (47/63 + 5\hat{K}_p)s + 85/8673}{s^3 + 12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673}\end{aligned}$$

جایدهی صفر. دو صفر و بهره را طوری تعیین می‌کنیم که صورت با سه جمله آخر مخرج برابر باشد. یعنی

$$(6/6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d)s^2 + (47/63 + 5\hat{K}_p)s + 85/8673 = 12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673$$

با برابر قرار دادن ضرایب جملات هم توان دو طرف معادله به دست می‌آوریم

$$6/6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d = 12/6051$$

$$47/63 + 5\hat{K}_p = 52/63$$

و از آن به دست می‌آوریم

$$\hat{K}_p = 1 \quad \hat{T}_d = 1/2$$

بنابراین

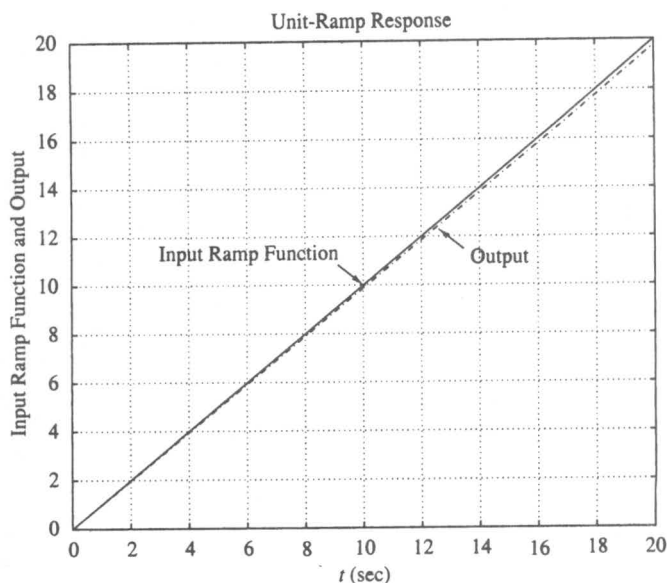
$$G_{c2}(s) = 1 + 1/2s \quad (13-8)$$

تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s)$ به ازای کنترل‌کننده $G_{c2}(s)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673}{s^3 + 12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673}$$

شکل ۸-۴۳ (الف) پاسخ پله این سیستم را نشان می‌دهد. پاسخ دارای ماکزیمم فراجش ۲۱٪ و زمان نشست تقریبی ۱/۶ sec است. شکل‌های ۸-۴۳ (ب) و (ج) پاسخ به ورودیهای شیب و شتاب را نشان می‌دهند. خطای حالت ماندگار پاسخ به هر دو ورودی صفر است. پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای رضایتبخش است. پس کنترل‌کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ طراحی شده، که به ترتیب با معادلات (۸-۱۲) و (۸-۱۳) توصیف شده‌اند، قابل قبول هستند.

اگر مشخصات پاسخ به ورودی پله‌ای رضایتبخش نمی‌بود، می‌بایست محل قطبهای غالب را تغییر داده، فرایند طراحی را تکرار می‌کردیم. قطبهای حلقه بسته غالب باید در ناحیه خاصی از نیم‌صفحه چپ قرار گیرند (مثلاً در $2 \leq a \leq 6$ ، $2 \leq b \leq 6$ و $6 \leq c \leq 12$). اگر بخواهیم این ناحیه را به صورت محاسباتی جستجو کنیم، باید برنامه‌ای شبیه برنامه ۸-۸ بنویسیم و آن را اجرا کنیم. به این ترتیب یک مجموعه جواب برای a ، b ، و c به دست می‌آوریم که به ازای آنها پاسخ سیستم به ورودی مرجع پله واحد تمام خواسته‌های مربوط به ماکزیمم فراجش و زمان نشست را ارضا کند.



شکل ۵۶-۸

منحنی پاسخ شیب واحد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6/104s^2 + 40/6104s + 4}{s^3 + 6/104s^2 + 41/6104s + 4}$$

نمودار نایکویست . قبلاً دیدیم که قطبهای حلقه بسته سیستم طراحی شده همگی در نیمه چپ صفحه s قرار دارند. بنابراین سیستم طراحی شده پایدار است . هدف از رسم نمودار نایکویست در اینجا آزمون پایداری سیستم نیست ، بلکه یافتن درک بهتری از تحلیل پایداری نایکویست است . برای یک سیستم پیچیده نمودار نایکویست آنقدر پیچیده است که نمی‌توان به سادگی تشخیص داد نقطه $j\omega + 1$ چند بار دور زده می‌شود. چون سیستم طراحی شده سه قطب حلقه باز بر روی محور $j\omega$ دارد ، و نمودار نایکویست ، همانطور که خواهیم دید ، خیلی پیچیده است .

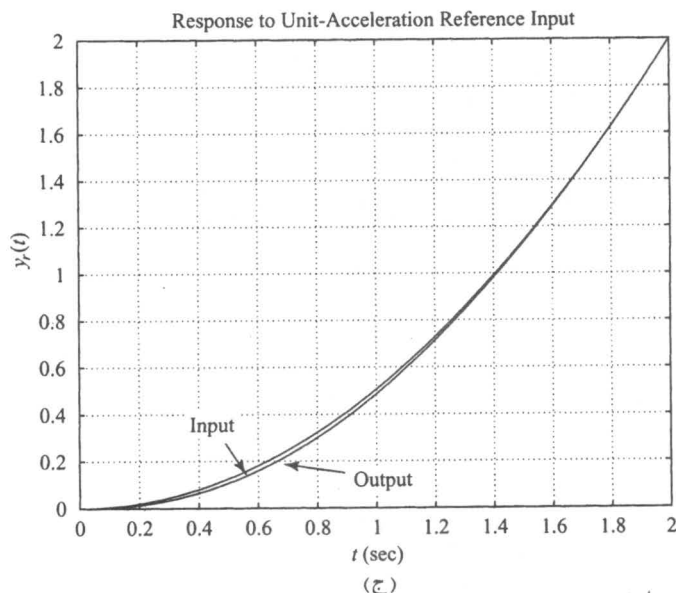
تابع تبدیل حلقه باز سیستم طراحی شده را $G(s)$ می‌نامیم . داریم

$$G(s) = G_c(s) \frac{s + 0/1}{s^2 + 1} = \frac{6/104s^2 + 40/6104s + 4}{s(s^2 + 1)}$$

یک مسیر نایکویست اصلاح شده مطابق شکل ۵۷-۸ (الف) انتخاب می‌کنیم . این مسیر سه قطب حلقه باز (واقع در $s=0$ ، $s=j\omega$ ، و $s=-j\omega$) را در بردارد. اکنون قرار می‌دهیم $s_1 = s + \sigma_0$. در این صورت مسیر نایکویست در صفحه s_1 به صورت نشان داده شده در شکل ۵۷-۸ (ب) در می‌آید. در صفحه s_1 تابع تبدیل حلقه باز سه قطب در نیمه راست صفحه دارد.

با انتخاب $\sigma_0 = 0/01$ ، چون $s = s_1 - \sigma_0$ به دست می‌آوریم

$$G(s) = G(s_1 - 0/01)$$



شکل ۸-۴۳

(ج) پاسخ به ورودی مرجع شتاب واحد.

مسائل نمونه و حلشان

الف ۸-۱ مشخصات دینامیکی کنترل‌کننده‌های PI، PD و PID را به اختصار شرح دهید.

حل: کنترل‌کننده PI با تابع تبدیل زیر مشخص می‌شود

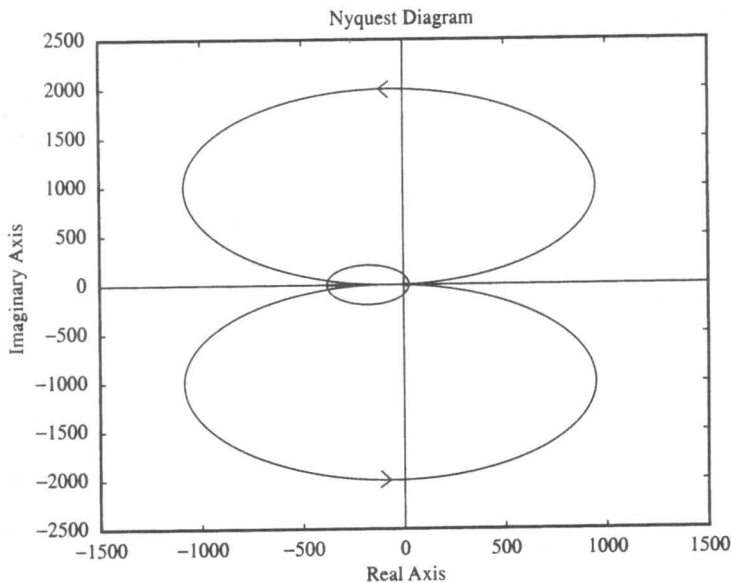
$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

کنترل‌کننده PI یک جبران‌ساز پسفاز است، یک صفر در $s = -1/T_i$ و یک قطب در $s = 0$ دارد. پس مشخصه کنترل‌کننده PI داشتن بهره بی‌نهایت در فرکانس صفر است. این مشخصه باعث بهبود رفتار حالت ماندگار می‌شود. گذاشتن کنترل‌کننده PI در سیستم مرتبه سیستم را یک واحد زیاد می‌کند، بنابراین پایداری سیستم کمتر می‌شود و حتی ممکن است سیستمی ناپایدار حاصل شود. پس مقادیر K_p و T_i باید به دقت انتخاب شود تا پاسخ گذرای مطلوبی حاصل شود. با طراحی مناسب کنترل‌کننده PI می‌توان کاری کرد که پاسخ پله فراجشی کوچک داشته باشد و حتی بدون فراجش باشد، ولی سرعت پاسخ خیلی کم می‌شود. علت این امر پایین گذر بودن کنترل‌کننده PI و تضعیف مولفه‌های فرکانس بالای سیگنال‌هاست.

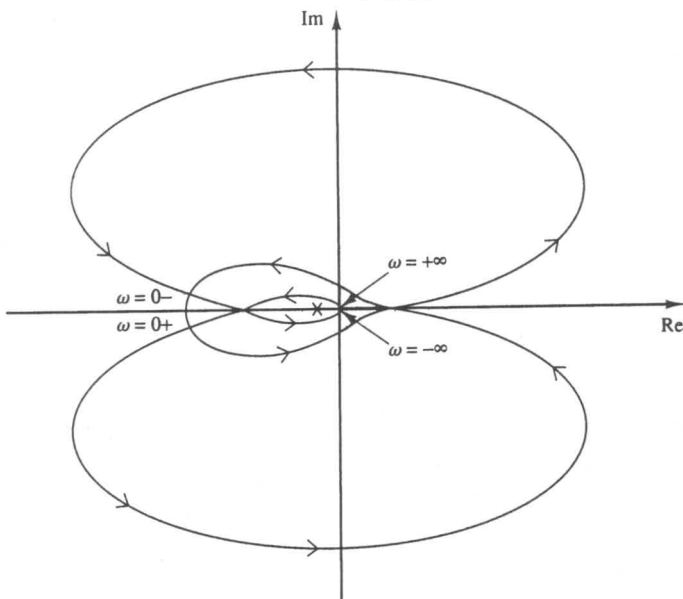
کنترل‌کننده PD گونه ساده شده‌ای از جبران‌ساز پیشفاز، با تابع تبدیل $G_c(s)$ زیر است

$$G_c(s) = K_p (1 + T_d s)$$

مقدار K_p معمولاً با توجه به خواسته‌های حالت ماندگار تعیین می‌شود. فرکانس گوشه‌ای $1/T_d$ به نحوی انتخاب می‌شود که پیشفازی ماکزیمم در حوالی فرکانس عبور بهره رخ دهد. هر چند حاشیه فاز بزرگتر می‌شود،



شکل ۸-۵۸
نمودار نایکوئیست.

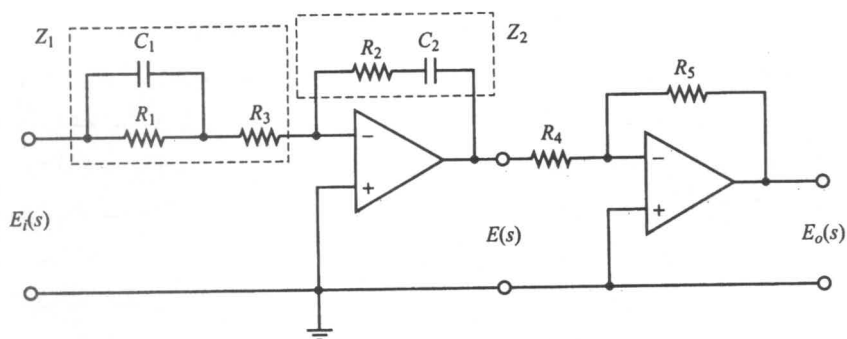


شکل ۸-۵۹
باز ترسیم نمودار نایکوئیست.

الف ۸-۸ نشان دهید که سیستم دارای کنترل I-PD شکل ۸-۶۰ (الف) با سیستم دارای کنترل PID و فیلتر ورودی شکل ۸-۶۰ (ب) هم‌ارز است.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ سیستم دارای کنترل I-PD عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p}{T_I s} G_p(s)}{1 + K_p \left[1 + (1/T_I s) + T_d s \right] G_p(s)}$$



شکل ۸-۴۵ کنترل کننده PID اصلاح شده.

$$\begin{aligned}\frac{U(s)}{E(s)} &= K_s \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \\ &= K_s \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s + \frac{T_d}{T_i} \right) \\ &= K_s \frac{T_i + T_d}{T_i} \left[1 + \frac{1}{(T_i + T_d)s} + \frac{T_i T_d s}{T_i + T_d} \right]\end{aligned}$$

الف ۸-۳ مدار الکتریکی دو آپ امپی شکل ۸-۴۵ را در نظر بگیرید. این مدار یک کنترل کننده PID اصلاح شده است که تابع تبدیل آن یک انتگرالگیر و یک جمله مرتبه اول تاخیری دارد. تابع تبدیل این کنترل کننده را بیابید.

حل: چون

$$Z_1 = \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s} + R_r = \frac{R_1 + R_r + R_1 R_r C_1 s}{1 + R_1 C_1 s}$$

$$Z_r = R_r + \frac{1}{C_r s}$$

و

داریم

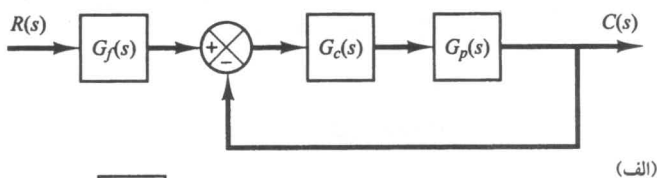
$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_r}{Z_1} = -\frac{(R_r C_r s + 1)(R_1 C_1 s + 1)}{C_r s (R_1 + R_r + R_1 R_r C_1 s)}$$

همچنین

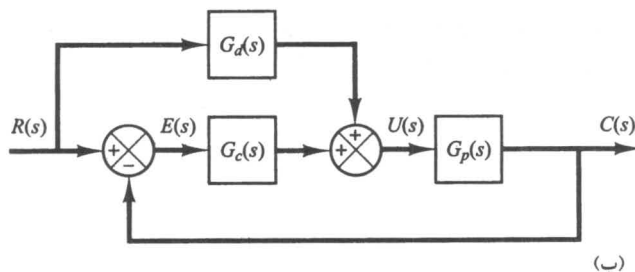
$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_o}{R_f}$$

پس

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_o}{R_f (R_1 + R_r) C_r} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_r C_r s + 1)}{s \left(\frac{R_1 R_r}{R_1 + R_r} C_1 s + 1 \right)}$$



(الف)



(ب)

شکل ۸-۶۱

(الف) نمودار بلوکی یک سیستم

کنترل دارای فیلتر ورودی؛

(ب) نمودار بلوکی تغییر یافته.

الف ۸-۱۵ در بعضی موارد گذاشتن فیلتر ورودی مطابق شکل ۸-۶۱ (الف) امری مطلوب است. توجه کنید که فیلتر ورودی $G_f(s)$ خارج حلقه قرار دارد، بنابراین بر پایداری و عملکرد حلقه بسته سیستم بی تأثیر است. مزیت داشتن فیلتر ورودی این است که می توان صفرهای تابع تبدیل حلقه بسته را اصلاح کرد (آنها را حذف کرد یا به جایشان صفر دیگری ایجاد کرد) و به این ترتیب به پاسخ قابل قبول دست یافت.

نشان دهید که آرایش شکل ۸-۶۱ (الف) را می توان به صورت آرایش شکل ۸-۶۱ (ب) درآورد، به شرطی که داشته باشیم $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$. ساختار جبران سازی نشان داده شده در شکل ۸-۶۱ (ب) را گاهی جبران سازی فرمان می نامند.

حل: برای سیستم شکل ۸-۶۱ (الف) داریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_f(s) \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (۱۵-۸)$$

برای سیستم شکل ۸-۶۱ (ب) داریم

$$U(s) = G_d(s)R(s) + G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = G_p(s)U(s)$$

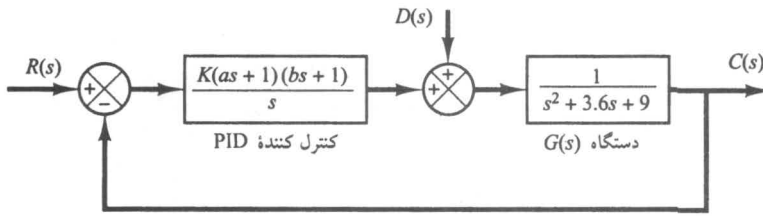
پس

$$C(s) = G_p(s)\{G_d(s)R(s) + G_c(s)[R(s) - C(s)]\}$$

یا

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_d(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (۱۶-۸)$$

با گذاشتن $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$ در معادله (۱۶-۸) به دست می آوریم



شکل ۸-۴۷
سیستم دارای
کنترل کننده PID.

حل: تابع تبدیل کنترل کننده PID به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{K(as+1)(bs+1)}{s}$$

برای ورودی اغتشاش، هنگام نداشتن ورودی مرجع، تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \frac{C_d(s)}{D(s)} &= \frac{s}{s(s^2 + 3.6s + 9) + K(as+1)(bs+1)} \\ &= \frac{s}{s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K} \end{aligned} \quad (8-14)$$

می خواهیم پاسخ به ورودی اغتشاش پله ای زمان نشست برابر ۲ تا ۳ ثانیه داشته، سیستم میرایی معقولی داشته باشد. این خواسته ها را می توان به داشتن قطبهای غالبی با $\zeta = 0.5$ و $\omega_n = 4$ rad/s تعبیر کرد. قطب حلقه بسته سوم را در $s = -10$ قرار می دهیم تا اثرش بر پاسخ گذرا ناچیز باشد. پس معادله مشخصه مطلوب شکل زیر را دارد

$$(s+10)(s^2 + 2 \times 0.5 \times 4s + 4^2) = (s+10)(s^2 + 4s + 16) = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

معادله مشخصه سیستم توصیف شده با معادله (۸-۱۴) عبارت است از

$$s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K = 0$$

پس باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} 3.6 + Kab &= 14 \\ (9 + Ka + Kb) &= 56 \\ K &= 160 \end{aligned}$$

که نتیجه می دهد

$$a+b = 0.29375, \quad ab = 0.065$$

کنترل کننده PID شکل زیر را به خود می گیرد

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K[abs^2 + (a+b)s + 1]}{s} \\ &= \frac{160[0.065s^2 + 0.29375s + 1]}{s} \\ &= \frac{10.4[s^2 + 4.5192s + 15.385]}{s} \end{aligned}$$

اگر بهره داخلی خیلی بزرگتر از یک باشد، $G(s)H(s)/[1+G(s)H(s)]$ تقریباً برابر یک و تابع تبدیل $C(s)/E(s)$ تقریباً برابر $1/H(s)$ است.

ولی اگر بهره $|G(s)H(s)|$ از یک بسیار کوچکتر باشد، حلقه داخلی بی‌اثر بوده $C(s)/E(s)$ تقریباً برابر $G(s)$ می‌شود. برای این که حلقه داخلی هم در فرکانسهای پایین و هم در فرکانسهای بالا بی‌اثر باشد باید داشته باشیم

$$|G(j\omega)H(j\omega)| \ll 1 \quad \omega \ll 1 \quad \text{و} \quad \omega \gg 1$$

چون در این مسئله

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$$

با انتخاب $H(s)$ به صورت زیر

$$H(s) = ks$$

شرایط لازم ارضا می‌شود، زیرا

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Kk j\omega}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = 0$$

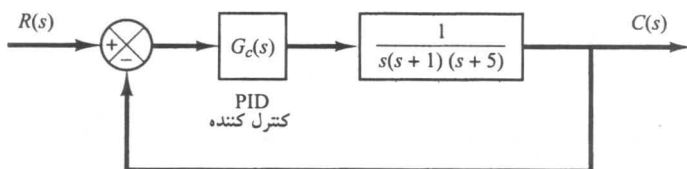
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{Kk j\omega}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = 0$$

پس با $H(s) = ks$ (فیدبک سرعت) حلقه داخلی هم در فرکانسهای پایین و هم در فرکانسهای بالا بی‌اثر می‌شود. حلقه داخلی تنها در ناحیه فرکانسهای میانی اثر دارد.

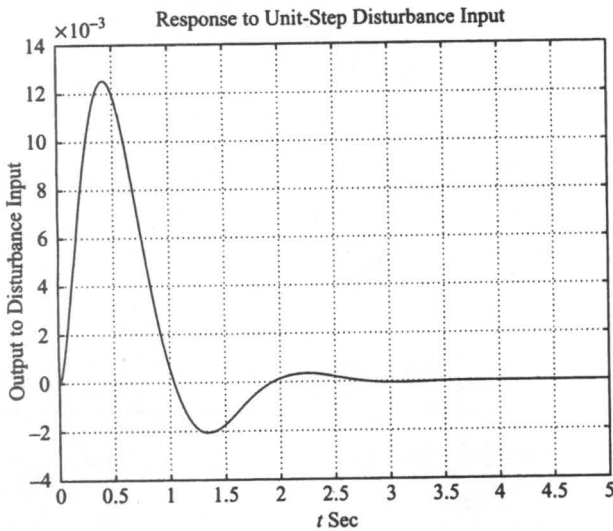
الف ۸-۱۲ سیستم کنترل شکل ۸-۶۳ را در نظر بگیرید. این همان سیستمی است که در مثال ۸-۱ در نظر گرفتیم. در آن مثال یک کنترل کننده PID طراحی کردیم، و به این منظور کار را از روش دوم زیگلر - نیکولس شروع کردیم. در اینجا می‌خواهیم با استفاده از رهیافت محاسباتی کنترل کننده PID را به کمک MATLAB طراحی کنیم. مقادیر a و K کنترل کننده PID زیر را تعیین می‌کنیم

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

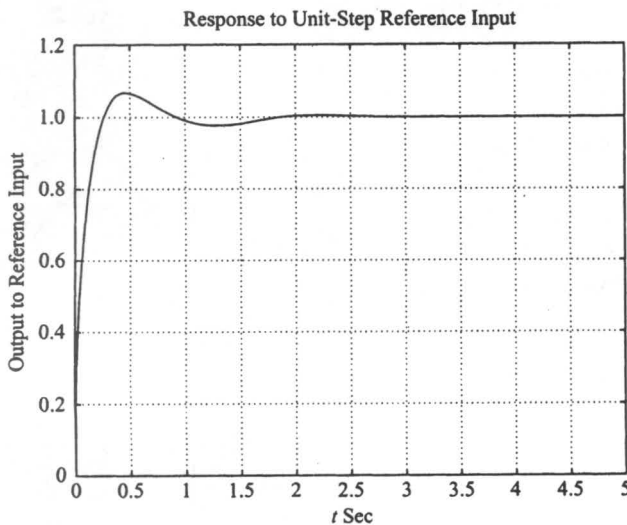
به نحوی که پاسخ پله واحد ماکزیمم فراجشی بین ۱۰٪ و ۲٪ داشته (یعنی $1/10 \leq \text{ماکزیمم خروجی} \leq 1/20$)، زمان نشست خروجی کمتر از ۳ sec باشد. ناحیه جستجو را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$2 \leq K \leq 50, \quad 0.05 \leq a \leq 2$$


شکل ۸-۶۳
سیستم کنترل.



(الف)



(ب)

شکل ۸-۴۸ (الف) پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد؛ (ب) پاسخ به ورودی مرجع پله واحد.

پاسخ به ورودی مرجع پله واحد را نیز می‌توان با برنامه ۸-۹ به دست آورد. منحنی حاصل در شکل ۸-۴۸ (ب) نشان داده شده است. این منحنی نشان می‌دهد که ماکزیمم فراجشش $7/3\%$ و زمان نشست $1/2$ sec است. پاسخ گذرای سیستم نیز کاملاً قابل قبول است.

MATLAB Program 8-15

```

t = 0:0.01:5;
for K = 50:-1:2;
    for a = 2:-0.05:0.05;
        num = [K 2*K*a K*a^2];
        den = [1 6 5+K 2*K*a K*a^2];
        y = step(num,den,t);
        m = max(y);
        s = 501; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
            s = s-1; end;
        ts = (s-1)*0.01;
        if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
            break;
        end
    end
    if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
        break
    end
    end
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response')
xlabel('t sec')
ylabel('Output')
solution = [K;a;m;ts]

solution =

32.0000
0.2000
1.0969
2.6400

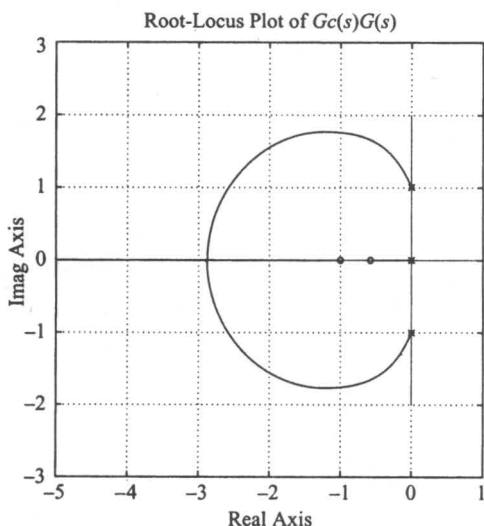
```

حال می‌خواهیم تمام مجموعه‌هایی را بیابیم که به ازای آنها مشخصات بیان شده ارضا می‌شود. یک برنامه MATLAB ممکن برای این منظور برنامه ۸-۱۶ است. توجه کنید که در جدول به دست آمده توسط این برنامه آخرین ردیف جدول (K,:), یا اولین ردیف جدول مرتب شده، باید ندیده گرفت. (اینها آخرین مقادیر به کار رفته برای جستجو هستند.)

با توجه به جدول مرتب شده می‌بینیم که

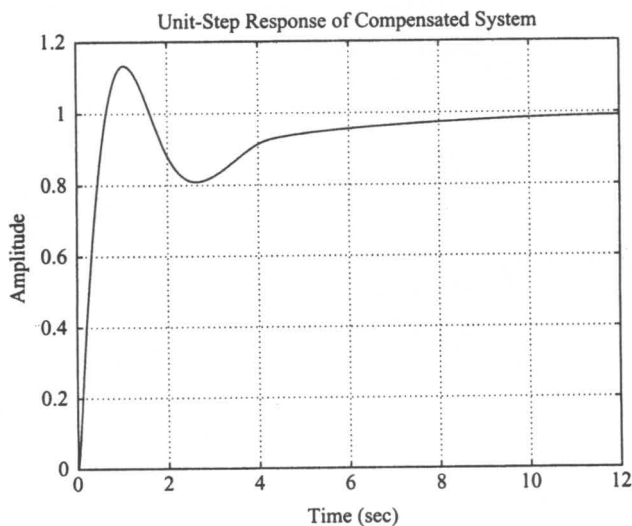
$$K=29, a=0.25 \text{ (ماکزیمم فراجش } = 9.52\%, \text{ زمان نشست } = 1.78 \text{ s)}$$

$$K=27, a=0.2 \text{ (ماکزیمم فراجش } = 5.5\%, \text{ زمان نشست } = 2.89 \text{ s)}$$



شکل ۸-۵۰

نمودار مکان هندسی ریشه‌های
سیستم جبران شده (مسئله الف ۸-۶).



شکل ۸-۵۱

پاسخ پله واحد سیستم
جبران شده.

می‌دهد. قطب حلقه بسته واقع در $s = -0.3333$ و صفر واقع در $s = -0.5714$ دنباله‌ای دراز و کوچک ایجاد کرده‌اند.

الف ۸-۷ سیستم نشان داده شده در شکل ۸-۵۲ را در نظر بگیرید. یک جبران‌ساز طراحی کنید به نحوی که ثابت خطای ایستای سرعت 4 sec^{-1} ، حاشیه فاز 50° ، و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر باشد. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب واحد سیستم جبران شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید. همچنین نمودار نایکویست سیستم جبران شده را نیز با استفاده از MATLAB رسم کنید. با استفاده از معیار پایداری نایکویست نشان دهید که سیستم طرح شده پایدار است.

```

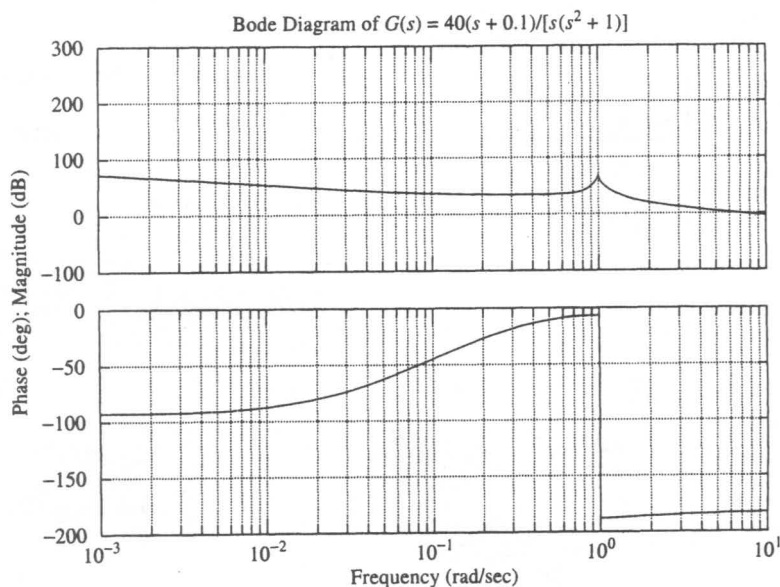
K = sorttable(7,1)
K =
    29
a = sorttable(7,2)
a=
    0.2500
num = [K 2*K*a K*a^2];
den = [1 6 5+K 2*K*a K*a^2];
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
hold
Current plot held
K = sorttable(2,1)
K=
    27
a = sorttable(2,2)
a=
    0.2000
num = [K 2*K*a K*a^2];
den = [1 6 5+K 2*K*a K*a^2];
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
title('Unit-Step Response Curves')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output')
text(1.22,1.22,'K = 29, a = 0.25')
text(1.22,0.72,'K = 27, a = 0.2')

```

بهترین انتخابهای ممکن هستند. پاسخ پله به ازای این دو حالت در شکل ۸-۶۵ نشان داده شده است. با توجه به این منحنی می‌توانیم نتیجه بگیریم که بهترین انتخاب به هدف سیستم بستگی دارد. اگر بخواهیم ماکزیمم فرافشش کوچک باشد $a=0.2$ ، $K=27$ بهترین انتخاب است. اگر زمان نشست کوچک مهمتر از ماکزیمم فرافشش باشد $a=0.25$ ، $K=29$ بهترین انتخاب است.

الف ۸-۱۳ سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۶۶ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل دستگاه عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{100}{s(s+1)}$$



شکل ۸-۵۳

نمودار بوده $G_c(s) = \frac{40(s+0.1)}{s(s^2+1)}$

MATLAB Program 8-11

```
% ***** Bode Diagram *****
```

```
num = conv([40 4],[0.1526 1]);
```

```
den = [1 0.000000001 1 0];
```

```
sys = tf(num,den);
```

```
w = logspace(-2,2,100);
```

```
bode(sys,w)
```

```
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
```

```
Gm dB = 20*log10(Gm);
```

```
[Gm dB,pm,wcp,wcg]
```

```
ans =
```

```
Inf 50.0026 NaN 8.0114
```

```
title('Bode Diagram of G(s) = 40(s+0.1)(0.1526s+1)/[s(s^2+1)]')
```

تابع تبدیل جبران ساز طراحی شده به صورت زیر است

$$G_c(s) = \frac{40}{s} \quad \hat{G}_c(s) = \frac{40(0.1526s+1)}{s}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)] G_p(s)}{1 + G_{c1}(s) G_p(s)}$$

فرض می‌کنیم که $G_{c1}(s)$ یک کنترل کننده PID به شکل زیر است

$$G_{c1}(s) = \frac{K(s+a)^2}{s}$$

معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$1 + G_{c1}(s) G_p(s) = 1 + \frac{K(s+a)^2}{s} \frac{100}{s(s+1)}$$

توجه کنید که قطبهای حلقه بسته در $s=0$ (دو قطب) و $s=-1$ قرار دارند. صفرها در $s=-a$ (دو قطب) قرار دارند.

در ادامه رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها را برای تعیین a و K به کار می‌بریم. فرض کنید می‌خواهیم قطبهای حلقه بسته غالب را در $s = -5 \pm j5$ قرار دهیم. کمبود زاویه در محل قطب مطلوب، یعنی در $s = -5 + j5$ عبارت است از

$$-135^\circ - 135^\circ - 128.66^\circ + 180^\circ = -218.66^\circ$$

دو صفر واقع در $s=-a$ باید زاویه 218.66° را ایجاد کنند (یعنی هر کدام زاویه 109.33° را به وجود آورند). با محاسبه‌ای ساده به دست می‌آوریم

$$a = -3.2460$$

پس کنترل کننده $G_{c1}(s)$ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_{c1}(s) = \frac{K(s+3.2460)^2}{s}$$

ثابت K باید با توجه به شرط اندازه تعیین شود

$$|G_{c1}(s) G_p(s)|_{s=-5+j5} = 1$$

چون

$$G_{c1}(s) G_p(s) = \frac{K(s+3.2460)^2}{s} \frac{100}{s(s+1)}$$

به دست می‌آوریم

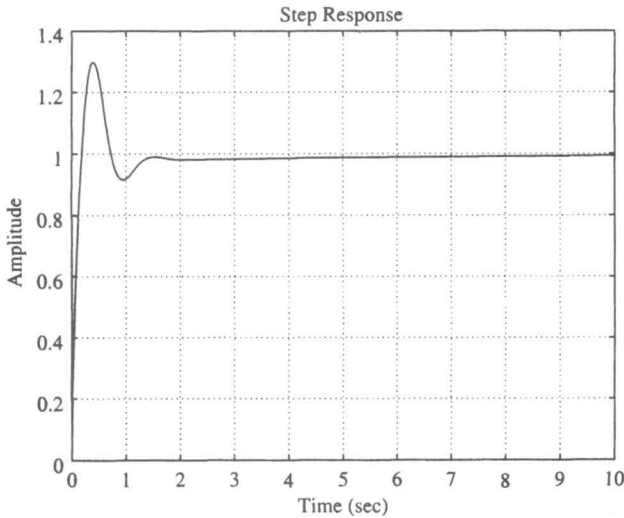
$$K = \left| \frac{s^2(s+1)}{100(s+3.2460)^2} \right|_{s=-5+j5} = 0.11403$$

پس کنترل کننده $G_{c1}(s)$ به صورت زیر درمی‌آید

MATLAB Program 8-12

```
% ***** Unit-Step Response *****
```

```
num = [6.104 40.6104 4];
den = [1 6.104 41.6104 4];
t = 0:0.01:10;
step(num,den,t)
grid
```



شکل ۸-۵۵

منحنی پاسخ پله واحد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4}$$

MATLAB Program 8-13

```
% ***** Unit-Ramp Response *****
```

```
num = [0 0 6.104 40.6104 4];
den = [1 6.104 41.6104 4 0];
t = 0:0.01:20;
c = step(num,den,t);
plot(t,c,'-','t,t','-')
title('Unit-Ramp Response')
xlabel('t(sec)')
ylabel('Input Ramp Function and Output')
text(3,11.5,'Input Ramp Function')
text(13.8,11.2,'Output')
```

پس

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)} \\ &= \frac{100s G_c(s)}{s^3 + 12/403s^2 + 74/028s + 120/148}\end{aligned}$$

برای ارضای خواسته های مربوط به ورودی مرجع شیب و ورودی مرجع شتاب رهیافت جایدهی صفر را پی می گیریم. یعنی صورت $Y(s)/R(s)$ را برابر سه جمله آخر مخرج انتخاب می کنیم، یا

$$100s G_c(s) = 12/403s^2 + 74/028s + 120/148$$

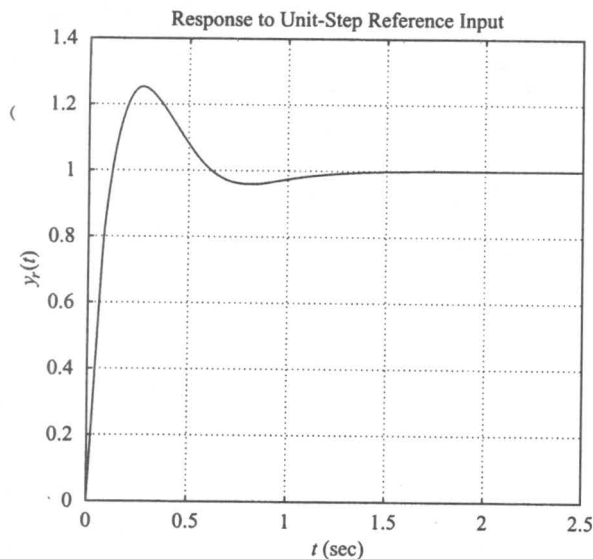
و از آن به دست می آوریم

$$\begin{aligned}G_c(s) &= \frac{0/12403s^2 + 0/74028s + 1/20148}{s} \\ &= 0/74028 + \frac{1/20148}{s} + 0/12403s\end{aligned}\quad (18-8)$$

پس تابع تبدیل حلقه بسته $Y(s)/R(s)$ به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12/403s^2 + 74/028s + 120/148}{s^3 + 12/403s^2 + 74/028s + 120/148}$$

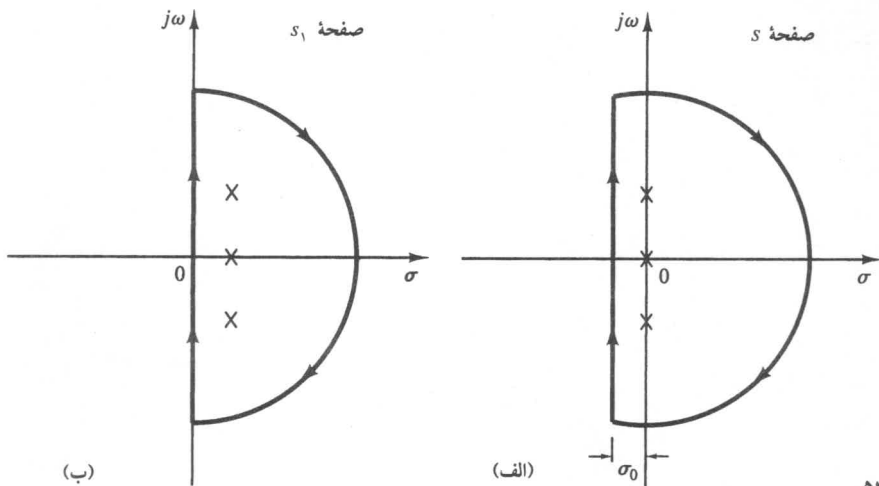
منحنی پاسخ به ورودی مرجع پله واحد، شیب واحد، و شتاب واحد به ترتیب در شکل های ۸-۶۸ (الف)، (ب)، و (ج) نشان داده شده است. ماکزیمم فراجهش پاسخ پله حدود ۲۵٪ و زمان نشست تقریباً ۱/۲ sec است. خطاهای حالت ماندگار به ازای ورودی های شیب و شتاب صفر است. بنابراین کنترل کننده طراحی شده $G_c(s)$ ، که با معادله (۸-۱۸) توصیف می شود عملکرد مطلوبی به همراه دارد.



شکل ۸-۶۸

(الف) پاسخ به ورودی

مرجع پله واحد؛



شکل ۸-۵۷

(الف) مسیر نایکویست اصلاح شده در صفحه s . (ب) مسیر نایکویست در صفحه s_1 .

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل حلقه باز} &= \frac{6/104(s_1^2 - 0/02s_1 + 0/0001) + 4/06104(s_1 - 0/01) + 4}{(s_1 - 0/01)(s_1^2 - 0/02s_1 + 1/0001)} \\ &= \frac{6/104s_1^2 + 4/048832s_1 + 3/5945064}{s_1^3 - 0/03s_1^2 + 1/0003s_1 - 0/010001} \end{aligned}$$

برنامه ۸-۱۴ یک برنامه MATLAB برای رسم نمودار نایکویست را نشان می‌دهد. نمودار نایکویست حاصل در شکل ۸-۵۸ نشان داده شده است.

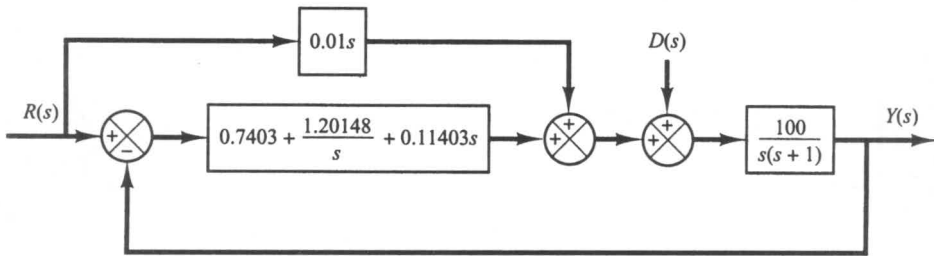
MATLAB Program 8-14

```
% ***** Nyquist Plot *****
num = [6.104 40.48832 3.5945064];
den = [1 -0.03 1.0003 -0.010001];
nyquist(num,den)
v = [-1500 1500 -2500 2500]; axis(v)
```

نمودار نایکویست حاصل نمی‌تواند به سادگی تعداد دورهای حول نقطه $0 + j\omega - 1$ را نشان دهد. به همین خاطر باید این نمودار نایکویست را به صورتی رسم کنیم که جزییات آن در نزدیکی نقطه $0 + j\omega - 1$ آشکار شود. نمودار نایکویست حاصل در شکل ۸-۵۹ نشان داده شده است.

با توجه به این نمودار می‌بینیم که نقطه $0 + j\omega - 1$ سه بار در جهت پادساعتگرد دور زده می‌شود. بنابراین $N = -3$. چون تابع تبدیل حلقه باز در نیمه راست صفحه s_1 سه قطب دارد، داریم $P = 3$. در نتیجه $Z = N + P = 0$. یعنی هیچ قطب حلقه بسته‌ای در نیمه راست صفحه s_1 وجود ندارد. بنابراین سیستم پایدار

است.



شکل ۸-۶۹ نمودار بلوکی سیستم طراحی شده.

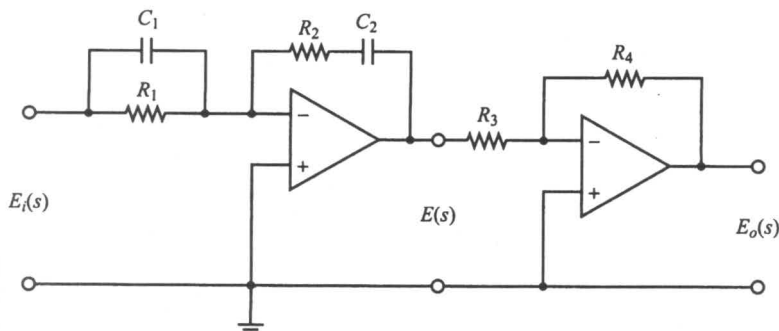
معادلات (۸-۱۷) و (۸-۱۹) به ترتیب توابع تبدیل کنترل کننده های $G_c(s)$ و $G_r(s)$ را به دست می دهند. نمودار بلوکی سیستم طراحی شده در شکل ۸-۶۹ نشان داده شده است.

توجه کنید که اگر ماکزیمم فراجش بسیار بزرگتر از ۲۵٪ و یا زمان نشست بسیار بزرگتر از ۱/۲ sec باشد، یک ناحیه جستجو برگزیده (مثلاً $3 \leq a \leq 6$ ، $3 \leq b \leq 6$ و $6 \leq c \leq 12$) و روش محاسباتی بیان شده در مثال ۸-۴ را برای یافتن یک مجموعه جواب که خواسته های مربوط به پاسخ به ورودی مرجع پله ای را برآورده کند، به کار ببریم.

مسائل

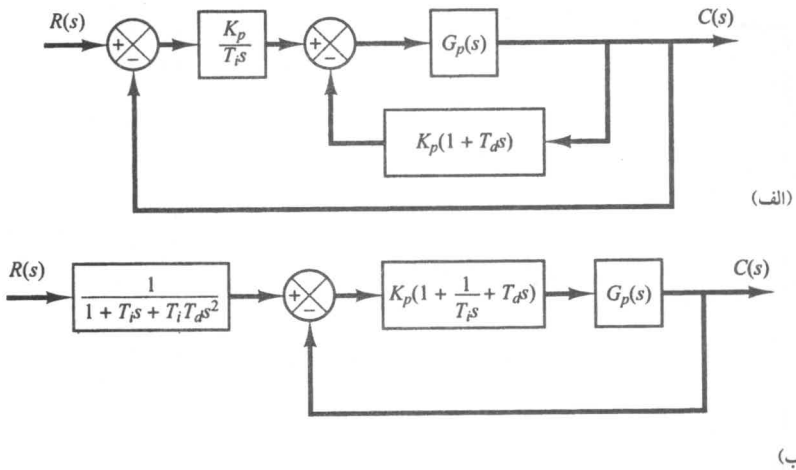
$$C_c(s) = 39.42 \left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s \right) \\ = 30.3215 \frac{(s + 0.65)^2}{s}$$

ب ۸-۱ کنترل کننده PID الکترونیکی شکل ۸-۷۰ را در نظر بگیرید. مقادیر C_1 ، R_4 ، R_3 ، R_2 ، R_1 و C_2 را به نحوی تعیین کنید که تابع تبدیل زیر حاصل شود



شکل ۸-۷۰

کنترل کننده PID الکترونیکی.



شکل ۸-۶۰ (الف) سیستم دارای کنترل I-PD؛ (ب) سیستم دارای کنترل PID و فیلتر ورودی.

تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ سیستم دارای کنترل PID و فیلتر ورودی عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + T_i s + T_i T_d s^2} \frac{K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) G_p(s)}{1 + K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) G_p(s)} \\ &= \frac{\frac{K_p}{T_i s} G_p(s)}{1 + K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) G_p(s)} \end{aligned}$$

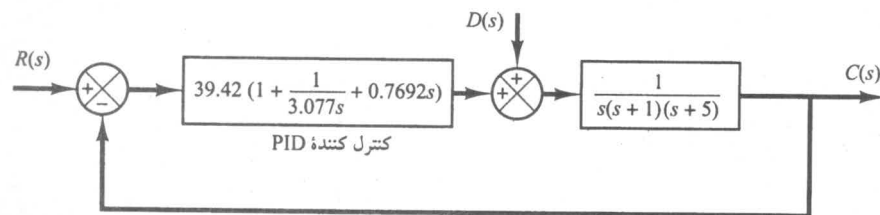
تابع تبدیل حلقه بسته هر دو سیستم یکی است. پس دو سیستم هم ارزند.

الف ۸-۹ ایده اصلی کنترل I-PD پرهیز از سیگنالهای کنترلی بزرگ در سیستم است (که می‌تواند باعث بروز پدیده اشباع شود). با آوردن عملهای کنترلی تناسبی و انتگرالی به مسیر فیدبک، امکان انتخاب K_p و T_d بزرگتر (نسبت به طرح کنترل PID) فراهم می‌شود.

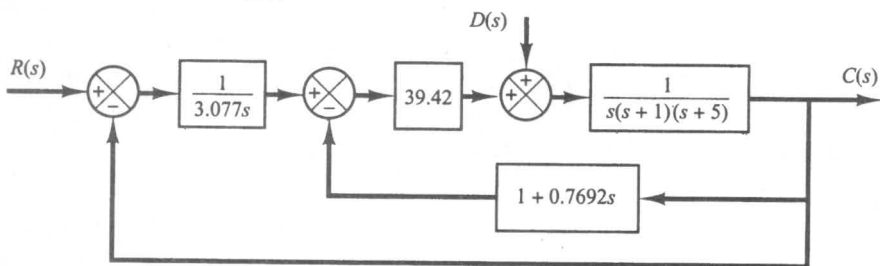
پاسخ سیستم دارای کنترل PID و سیستم دارای کنترل I-PD به ورودی اغتشاش و ورودی مرجع را به طور کیفی مقایسه کنید.

حل: ابتدا پاسخ سیستم دارای کنترل I-PD به ورودی اغتشاش را در نظر بگیرید. چون در کنترل I-PD می‌توان مقادیر K_p و T_d را بزرگتر از حالت کنترل PID برگزید، سیستم دارای کنترل I-PD اثرهای اغتشاش را سریعتر از سیستم دارای کنترل PID فرو می‌نشاند.

حال پاسخ سیستم دارای کنترل I-PD به ورودی مرجع را در نظر بگیرید. چون از لحاظ ورودی مرجع کنترل I-PD و کنترل PID همراه با فیلتر ورودی هم‌ارزند (مسئله الف ۸-۸ را ببینید)، سیستم دارای کنترل PID پاسخی سریعتر از سیستم دارای کنترل I-PD دارد، به شرط این که در سیستم PID پدیده اشباع بروز نکند.



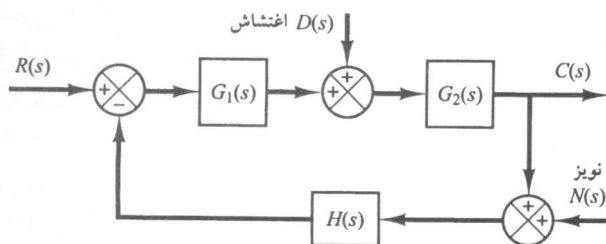
(الف)



(ب)

شکل ۷۳-۸

(الف) سیستم دارای کنترلر PID؛ (ب) سیستم دارای کنترلر I-PD



شکل ۷۴-۸ سیستم کنترل.

مرجع، ورودی اغتشاش، و ورودی نویز. نشان دهید که معادله مشخصه این سیستم به این که کدام سیگنال ورودی در نظر گرفته شود بستگی ندارد.

ب ۷-۸ سیستم شکل ۷۵-۸ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ برای ورودی مرجع و تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/D(s)$ برای ورودی اغتشاش را بیابید. هنگام در نظر گرفتن ورودی $R(s)$ ، $D(s)$ را صفر فرض کنید و برعکس.

ب ۸-۸ سیستم شکل ۷۶-۸ (الف) را در نظر بگیرید، که در آن K بهره قابل تنظیم و $G(s)$ و $H(s)$ اجزاء ثابت‌اند. تابع تبدیل حلقه بسته برای ورودی

ب ۵-۸ با توجه به مسئله ب ۴-۸ پاسخ سیستم شکل ۷۳-۸ (الف) به ورودی اغتشاش پله واحد را بیابید.

نشان دهید که از لحاظ ورودی اغتشاش پاسخ سیستمهای PID و I-PD شکلهای ۷۳-۸ (الف) و (ب) دقیقاً یکسان است. [هنگام در نظر گرفتن پاسخ به ورودی اغتشاش $D(s)$ ورودی مرجع $R(s)$ را صفر بگیرید.] تابع تبدیل حلقه بسته دو سیستم را مقایسه کنید.

ب ۶-۸ سیستم شکل ۷۴-۸ را در نظر بگیرید. این سیستم دارای سه سیگنال ورودی است: ورودی

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_f(s) G_c(s) - G_c(s) + G_c(s)] G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)}$$

$$= G_f(s) \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)}$$

که همان معادله (۸-۱۵) است. به این ترتیب هم‌ارزی سیستمهای شکلای ۸-۶۱ (الف) و (ب) ثابت می‌شود. توجه کنید که سیستم شکل ۸-۶۱ (ب) یک کنترل کننده $G_d(s)$ پیشخوردی دارد. بنابراین $G_d(s)$ بر پایداری بخش حلقه بسته سیستم تأثیری ندارد.

الف ۸-۱۱ سیستم حلقه بسته این مشخصه را دارد که به ازای بهره حلقه باز بسیار بزرگتر از یک، تابع تبدیل حلقه بسته تقریباً با عکس تابع تبدیل فیدبک برابر است.

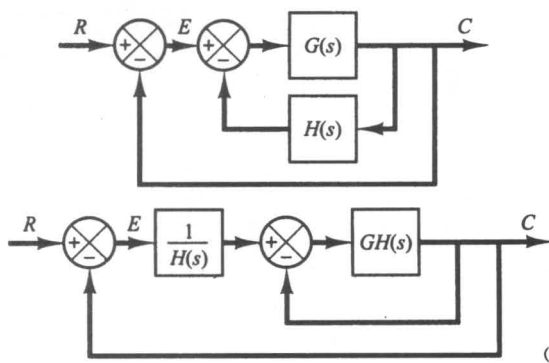
برای تصحیح مشخصه حلقه باز می‌توان یک حلقه فیدبک داخلی اضافه کرد که مشخصه اش عکس مشخصه حلقه باز مطلوب را داشته باشد. یک سیستم دارای فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرد

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

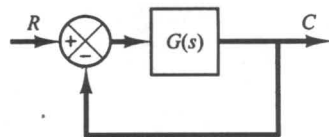
تابع تبدیل $H(s)$ عنصر فیدبک حلقه داخلی را چنان تعیین کنید که حلقه داخلی هم در فرکانسهای پایین و هم در فرکانسهای بالا بی‌اثر باشد.

حل: شکل ۸-۶۲ (الف) سیستم اصلی را نشان می‌دهد. شکل ۸-۶۲ (ب) افزودن حلقه فیدبک داخلی حول $G(s)$ را نشان می‌دهد. چون

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

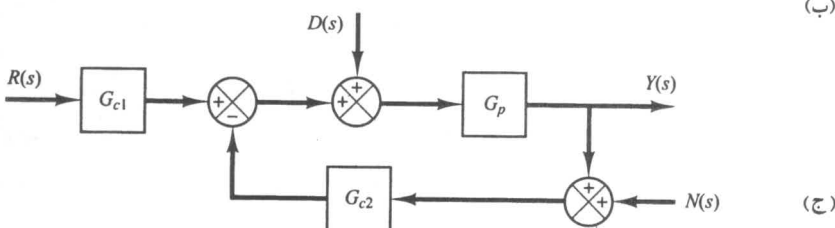
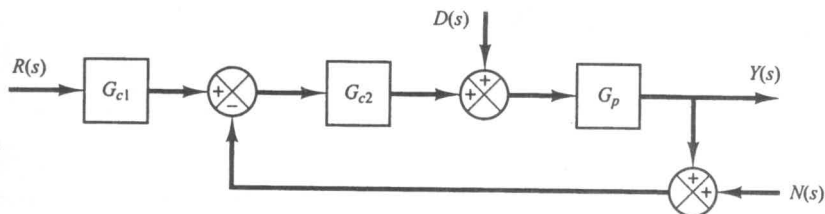
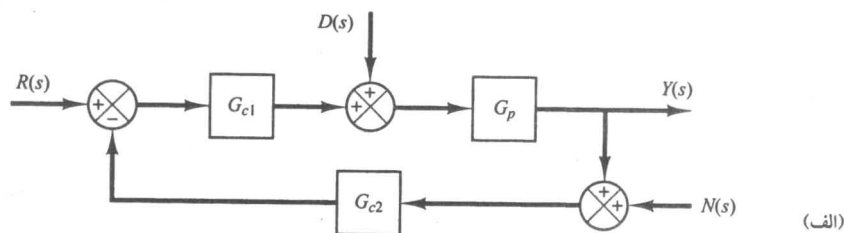


(ب)



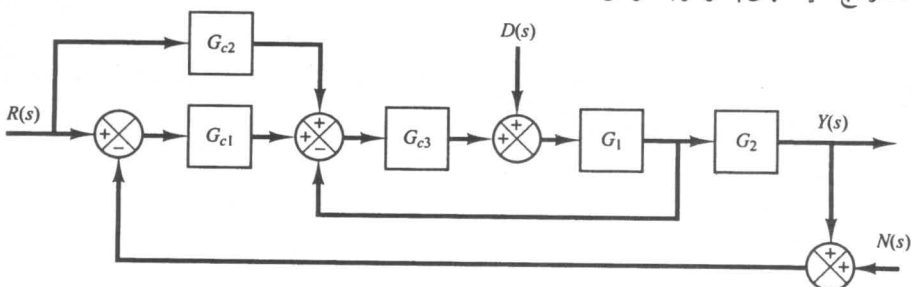
(الف)

شکل ۸-۶۲ (الف) سیستم کنترل؛ (ب) افزودن حلقه فیدبک داخلی برای تصحیح مشخصات حلقه بسته.

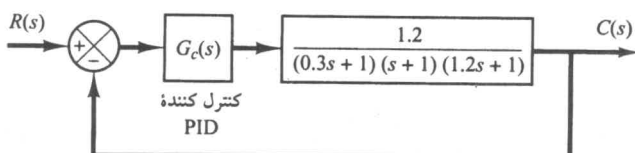


شکل ۸-۷۷

(الف)، (ب)، و (ج) سیستمهای با دو درجه آزادی.



شکل ۸-۷۸ سیستمی با سه درجه آزادی.



شکل ۸-۷۹ سیستم کنترل.

گام تغییرات K را ۱ و گام تغییرات a را ۰/۰۵ برمی‌گزینیم.
 یک برنامه MATLAB بنویسید که ابتدا مقادیر K و a ارضا کننده مشخصات را به دست آورد. همچنین یک برنامه MATLAB بنویسید که تمام مقادیر K و a برآورنده مشخصات را به دست آورد. منحنی‌های پاسخ پله سیستم طراحی شده را به ازای مقادیر برگزیده K و a رسم کنید.
 حل: تابع تبدیل دستگاه عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 5s}$$

تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ برابر است با

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks^2 + 2Kas + Ka^2}{s^3 + 6s^2 + (5+K)s^2 + 2Kas + Ka^2}$$

یک برنامه MATLAB که اولین مجموعه قابل قبول K و a را به دست می‌آورد، برنامه ۸-۱۵ است. در این برنامه دو حلقه for به کار رفته است. مشخصات زمان نشست توسط چهار خط زیر برآورد می‌شود

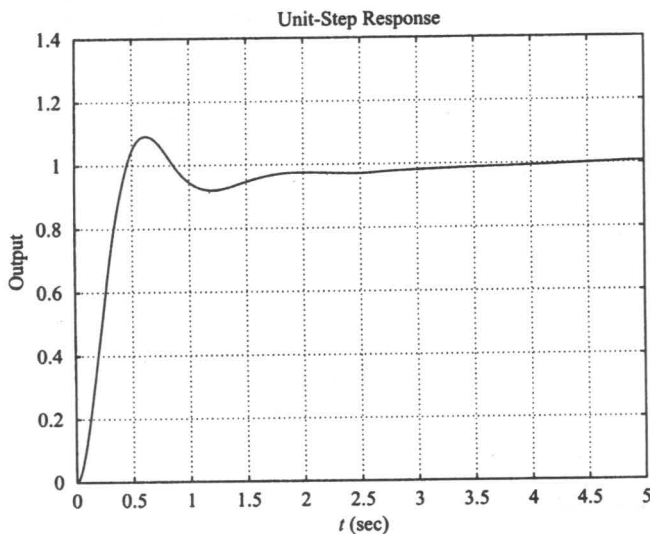
```
s=501;while y(s)>0.98 and y(s)<1.02;
s=s-1;end;
ts=(s-1)*0.01
ts<3.0
```

توجه کنید که به ازای $t=0:0.01:5$ ، ۵۰۱ نقطه محاسباتی وجود دارد. $s = 501$ با آخرین نقطه متناظر است.

جوابی که این برنامه به دست می‌دهد عبارت است از

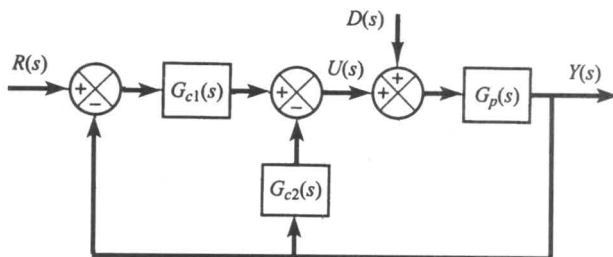
$$K = 32, \quad a = 0.2$$

که با ماکزیمم فراجهش ۹/۶۹٪ و زمان نشست ۲/۶۴ sec متناظر است. منحنی پاسخ پله در شکل ۸-۶۴ نشان داده شده است.



شکل ۸-۶۴

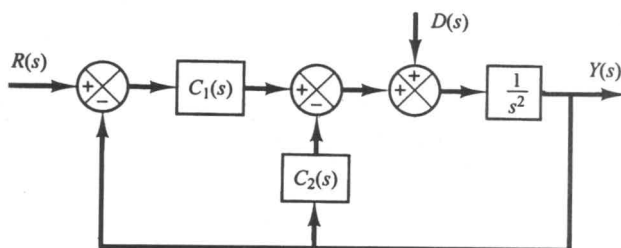
منحنی پاسخ پله واحد.



شکل ۸-۸۱

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

ب ۸-۱۵ سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۸۲ را در نظر بگیرید کنترل‌کننده‌های $G_{c1}(s)$ و $G_{c2}(s)$ را به نحوی طرح کنید که پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد کوچک بوده، به سرعت مستهلک شود (تقریباً در زمان ۱ sec تا ۲ sec). پاسخ به ورودی مرجع پله واحد کوچک بوده، به سرعت مستهلک شود (تقریباً در زمان ۱ sec تا ۲ sec) و پاسخ به ورودی مرجع پله واحد دارای ماکزیمم فراجش ۲۵٪ یا کمتر و زمان نشست ۱ sec یا کمتر باشد. همچنین خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های مرجع شیب و شتاب باید صفر باشد.



شکل ۸-۸۲ سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

MATLAB Program 8-16

```

t = 0:0.01:5;
k = 0;
for i = 1:49;
    K(i) = 51-i*1;
    for j = 1:40;
        a(j) = 2.05-j*0.05;
        num = [K(i) 2*K(i)*a(j) K(i)*a(j)*a(j)];
        den = [1 6 5+K(i) 2*K(i)*a(j) K(i)*a(j)*a(j)];
        y = step(num,den,t);
        m = max(y);
        s = 501; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
            s = s-1; end;
        ts = (s-1)*0.01;
        if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
            k = k+1;
            table(k,:) = [K(i) a(j) m ts];
        end
    end
end
table(k,:) = [K(i) a(j) m ts]
table =

    32.0000    0.2000    1.0969    2.6400
    31.0000    0.2000    1.0890    2.6900
    30.0000    0.2000    1.0809    2.7300
    29.0000    0.2500    1.0952    1.7800
    29.0000    0.2000    1.0726    2.7800
    28.0000    0.2000    1.0639    2.8300
    27.0000    0.2000    1.0550    2.8900
     2.0000    0.0500    0.3781    5.0000

sorttable = sortrows(table,3)

sorttable =

     2.0000    0.0500    0.3781    5.0000
    27.0000    0.2000    1.0550    2.8900
    28.0000    0.2000    1.0639    2.8300
    29.0000    0.2000    1.0726    2.7800
    30.0000    0.2000    1.0809    2.7300
    31.0000    0.2000    1.0890    2.6900
    29.0000    0.2500    1.0952    1.7800
    32.0000    0.2000    1.0969    2.6400

```