

تحلیل و طراحی

۷

سیستمهای کنترل به روش پاسخ فرکانسی

۱-۷ مقدمه

منظور از پاسخ فرکانسی پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی است. در روشهای پاسخ فرکانسی، فرکانس سیگنال ورودی را در گستره فرکانسی خاصی تغییر داده، پاسخ حاصل را بررسی می‌کنیم. در این فصل رهیافت‌های پاسخ فرکانسی برای تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل را معرفی می‌کنیم. اطلاعاتی که این تحلیل به دست می‌دهد با آنچه تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها به دست می‌دهد متفاوت است. در واقع رهیافت‌های پاسخ فرکانسی و مکان هندسی ریشه‌ها مکمل هم هستند. یکی از مزایای رهیافت پاسخ فرکانسی این است که می‌توانیم از داده‌های کسب شده از اندازه‌گیری سیستم فیزیکی استفاده کنیم، بدون این که نیازی به ساخت مدل ریاضی سیستم داشته باشیم. در بسیاری از طراحی‌های سیستمهای کنترل هر دو رهیافت به کار می‌رود. مهندس کنترل باید با هر دو روش آشنا باشد.

روشهای پاسخ فرکانسی در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ توسط نایکویست، بوده، نیکولس، و اشخاص دیگر پی‌ریزی شد. روشهای پاسخ فرکانسی در نظریه کلاسیک کنترل بسیار کارآمد هستند. همچنین در نظریه کنترل مقاوم نیز ابزارهایی کاملاً ضروری به حساب می‌آیند.

معیار پایداری نایکویست قادرمان می‌کند با دانستن مشخصات پاسخ فرکانسی حلقه باز، پایداری مطلق و نسبی سیستم‌های حلقه بسته خطی را بررسی کنیم. یک مزیت رهیافت پاسخ فرکانسی این است که آزمونهای

پاسخ فرکانسی عموماً ساده‌اند و با استفاده از مولدهای سینوسی و وسائل اندازه‌گیری موجود می‌توان این آزمونها را انجام داد. به علاوه، رهیافت پاسخ فرکانسی این مزیت را دارد که به کمک آن می‌توان سیستمی طرح کرد که اثرهای نامطلوب نویز و تداخل در آن می‌نیم شود و این نوع تحلیل و طراحی را می‌توان به سیستمهای کنترل غیرخطی خاصی تعمیم داد.

همچنین پاسخ فرکانسی سیستم کنترل تصویری کیفی از پاسخ گذرا به دست می‌دهد، و همبستگی بین پاسخ فرکانسی و پاسخ گذرا جز در مورد سیستمهای مرتبه دوم یک همبستگی غیرمستقیم است. در طراحی سیستم حلقه بسته، مشخصات پاسخ فرکانسی تابع تبدیل حلقه باز را با توجه به چند معیار طراحی طوری تنظیم می‌کنیم که سیستم پاسخ گذرای با مشخصات مطلوب داشته باشد.

یافتن خروجی حالت ماندگار به ورودی سینوسی. نشان خواهیم داد که خروجی حالت ماندگار یک تابع تبدیل را می‌توان مستقیماً از تابع تبدیل سینوسی آن به دست آورد؛ منظور از تابع تبدیل سینوسی تابع تبدیلی بر حسب $j\omega$ به جای s است، که ω فرکانس است.

سیستم خطی مستقل از زمان شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. ورودی و خروجی این سیستم که تابع تبدیل آن $G(s)$ است، به ترتیب با $x(t)$ و $y(t)$ مشخص شده‌اند. اگر $x(t)$ یک سیگنال سینوسی باشد، خروجی حالت ماندگار نیز یک سینوسی با همان فرکانس است، ولی دامنه و فاز آن می‌تواند متفاوت باشد. فرض کنید سیگنال ورودی به صورت زیر است

$$x(t) = X \sin \omega t$$

[در این کتاب یکای ω همیشه رادیان بر ثانیه است. هر گاه منظورمان فرکانس دارای یکای دور بر ثانیه (هرتز) باشد، از نماد f استفاده می‌کنیم، یعنی $\omega = 2\pi f$.]

همچنین فرض کنید که تابع تبدیل $G(s)$ را می‌توان به صورت دو چندجمله‌ای بر حسب s نوشت، یعنی

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

پس تبدیل لاپلاس خروجی $Y(s)$ عبارت است از

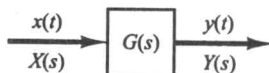
$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}X(s) \quad (1-7)$$

که در آن $X(s)$ تبدیل لاپلاس $x(t)$ است.

نشان خواهیم داد که اگر صبر کنیم تا به حالت ماندگار برسیم، می‌توانیم پاسخ فرکانسی را با گذاشتن $j\omega$ به جای s به دست آوریم. همچنین نشان خواهیم داد که پاسخ حالت ماندگار عبارت است از

$$G(j\omega) = M e^{j\phi} = M \angle \phi$$

شکل ۷-۱



سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان.

که در آن M نسبت دامنه‌های سینوسی‌های ورودی و خروجی، و ϕ اختلاف فاز بین آنها است. در آزمون پاسخ فرکانسی، فرکانس ورودی ω را تغییر می‌دهیم تا تمام گستره فرکانسی مورد نظر جارو شود.

پاسخ حالت ماندگار یک سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان به ورودی سینوسی به شرایط اولیه بستگی ندارد. (پس می‌توانیم شرایط اولیه را صفر فرض کنیم.) اگر $Y(s)$ تنها قطبهای مجزا داشته باشد، بسط معادله (۱-۷) به کسرهای جزیی به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\ (2-7) \quad &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned}$$

که در آن a و b_i ($i=1, 2, \dots, n$) مقادیر ثابت، و $\bar{a}$ مزدوج مختلط a است. عکس تبدیل لاپلاس معادله (۲-۷) به دست می‌دهد.

$$(3-7) \quad y(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}, \quad t \geq 0$$

در سیستمهای پایدار بخش حقیقی $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ منفی است. پس با میل t به بینهایت جملات $e^{-s_1 t}, e^{-s_2 t}, \dots$ و $e^{-s_n t}$ به صفر می‌گرایند. پس در حالت ماندگار تمام جملات سمت راست معادله (۳-۷) صفر می‌شوند، بجز دو جمله اول.

اگر $Y(s)$ قطب مکرر s_j ، با تکرر m_j داشته باشد، در $y(t)$ جملاتی به صورت $t^{h_j} e^{-s_j t}$ به وجود می‌آید ($h_j = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$). در سیستمهای پایدار، با میل t به بینهایت $t^{h_j} e^{-s_j t}$ به صفر می‌گراید.

پس مستقل از این که سیستم قطبهای مجزا داشته باشد یا نه، پاسخ حالت ماندگار عبارت است از

$$(4-7) \quad y_{ss}(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t}$$

که در آن a ثابت است و می‌توان آن را از معادله (۲-۷) به صورت زیر به دست آورد

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{X G(-j\omega)}{2j}$$

توجه کنید که

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \bigg|_{s=j\omega} = \frac{X G(j\omega)}{2j}$$

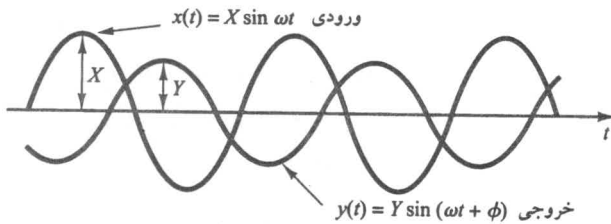
چون $G(j\omega)$ یک کمیت مختلط است، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

که در آن $|G(j\omega)|$ اندازه و ϕ زاویه فاز $G(j\omega)$ است؛ یعنی

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{بخش موهومی } G(j\omega)}{\text{بخش حقیقی } G(j\omega)} \right]$$

زاویه ϕ می‌تواند مثبت، صفر، یا منفی باشد. به نحوی مشابه می‌توان عبارت زیر را برای $G(-j\omega)$ به دست آورد



شکل ۷-۲

سیگنالهای سینوسی ورودی و خروجی.

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

حال با توجه به این که

$$a = -\frac{X |G(j\omega)| e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{X |G(j\omega)| e^{j\phi}}{2j}$$

معادله (۷-۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y_{ss}(t) = X |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \quad (5-7)$$

$$= X |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) = Y \sin(\omega t + \phi)$$

که در آن $Y = X |G(j\omega)|$ می‌بینیم که اگر ورودی یک سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان سینوسی باشد، خروجی حالت ماندگار نیز یک سینوسی با همان فرکانس ورودی است. البته در حالت کلی دامنه و فاز سیگنال خروجی و ورودی متفاوت‌اند. در واقع دامنه خروجی حاصلضرب دامنه ورودی و $|G(j\omega)|$ است، و فاز خروجی و ورودی به اندازه $\phi = \angle G(j\omega)$ تفاوت دارد. شکل ۷-۲ سیگنال سینوسی ورودی و خروجی نوعی را نشان می‌دهد.

بر این اساس این نتیجه مهم را به دست می‌آوریم: برای ورودی‌های سینوسی

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \text{نسبت دامنه سینوسی خروجی به دامنه سینوسی ورودی}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \text{تغییر فاز سینوسی خروجی نسبت به سینوسی ورودی}$$

بنابراین مشخصات پاسخ یک سیستم به ورودی سینوسی را می‌توان مستقیماً از رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

تابع $G(j\omega)$ را تابع تبدیل سینوسی می‌نامند. این تابع نسبت $Y(j\omega)$ به $X(j\omega)$ ، و کمیتی مختلط است که می‌توان آن را با دو کمیت وابسته به فرکانس اندازه و زاویه فاز نشان داد. تابع تبدیل سینوسی یک سیستم خطی را می‌توان با گذاشتن $j\omega$ به جای s در تابع تبدیل سیستم به دست آورد.

در فصل ۶ گفتیم که زاویه فاز منفی را پسفازی و زاویه فاز مثبت را پیشفازی می‌نامند. شبکه دارای مشخصه پیشفازی شبکه پیشفاز، و شبکه دارای مشخصه پسفازی شبکه پسفاز نامیده می‌شود.



شکل ۳-۷

سیستم مرتبه اول.

مثال ۱-۷

سیستم شکل ۳-۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $G(s)$ عبارت است از

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

خروجی حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ را به ازای ورودی سینوسی $x(t) = X \sin \omega t$ بیابید.به جای s در $G(s)$ قرار می‌دهیم $j\omega$ و به دست می‌آوریم

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

نسبت دامنه خروجی به ورودی برابر است با

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

و زاویه فاز عبارت است از

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

پس به ازای ورودی $x(t) = X \sin \omega t$ پاسخ حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ را می‌توان به صورت زیر از معادله (۵-۷) به دست آورد

$$y_{ss}(t) = \frac{X K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega) \quad (۶-۷)$$

با توجه به معادله (۶-۷) می‌بینیم که به ازای ω کوچک، دامنه خروجی حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ تقریباً K برابر دامنه ورودی است. تغییر فاز نیز به ازای ω کوچک کم است. به ازای ω بزرگ دامنه خروجی کوچک است و تقریباً با ω نسبت عکس دارد. با گراییدن ω به بینهایت زاویه فاز به -90° میل می‌کند. این شبکه پسفاز است.

مثال ۲-۷

شبکه توصیف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

پیشفاز یا پسفاز بودن شبکه را تعیین کنید.

به ازای ورودی $x(t) = X \sin \omega t$ پاسخ حالت ماندگار $y_{ss}(t)$ را می‌توان به این صورت یافت: چون

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + (1/T_1)}{j\omega + (1/T_2)} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

داریم

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

و

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega$$

پس خروجی حالت ماندگار عبارت است از

$$y_{ss}(t) = \frac{X T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega)$$

با توجه به این عبارت می‌بینیم که اگر $T_1 > T_2$ ، آنگاه $\tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega > 0$. پس این شبکه به ازای $T_1 > T_2$ یک شبکه پیشفاز است. به ازای $T_1 < T_2$ شبکه یک شبکه پسفاز است.

نمایش تصویری مشخصات پاسخ فرکانسی. تابع تبدیل سینوسی، که کمیتی مختلط و وابسته به ω است، دامنه و زاویه فاز، به صورت تابعی از فرکانس، مشخص می‌شود. برای نمایش تابع تبدیل سینوسی سه روش وجود دارد:

۱. نمودار بوده یا نمودار لگاریتمی

۲. نمودار نایکویست یا نمودار قطبی

۳. نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز (نمودار نیکولس)

در این فصل در مورد این نمایش‌ها به تفصیل صحبت می‌کنیم. همچنین روش ترسیم نمودارهای بوده، نایکویست و نیکولس با MATLAB را نیز بیان می‌کنیم.

نمای کلی فصل. بخش ۷-۱ مطالب مقدماتی را در مورد پاسخ فرکانسی بیان می‌کند. در بخش ۷-۲ راجع به نمودارهای بوده توابع تبدیل مختلف صحبت می‌شود. بخش ۷-۳ راجع به نمودارهای قطبی توابع تبدیل سینوسی، و بخش ۷-۴ راجع به نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز است. بخش ۷-۵ بحث مفصلی در مورد معیار پایداری نایکویست است. بخش ۷-۶ راجع به تحلیل پایداری سیستمهای حلقه بسته بر اساس معیار نایکویست می‌باشد. بخش ۷-۷ معیارهای پایداری نسبی معرفی می‌شوند. در بخش ۷-۸ روشی برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز، به کمک دایره‌های M و N ارائه می‌شود. کاربرد نمودار نیکولس در همین بخش معرفی می‌شود. بخش ۷-۹ به روشهای تجربی تعیین تابع تبدیل اختصاص دارد. در بخش ۷-۱۰ جنبه‌های مقدماتی طراحی سیستم کنترل با رهیافت پاسخ فرکانسی معرفی می‌شود. در بخشهای ۷-۱۱، ۷-۱۲، و ۷-۱۳ به ترتیب در مورد جبران سازی پیشفاز، جبران سازی پسفاز، و جبران سازی پسفاز-پیشفاز به تفصیل صحبت خواهد شد.

۲-۷ نمودار بوده

نمودار بوده یا نمودار لگاریتمی. یک تابع تبدیل سینوسی را می‌توان با دو نمودار مجزا نمایش داد: یک نمودار تغییرات دامنه تابع تبدیل سینوسی برحسب فرکانس، و دیگری زاویه فاز (با واحد درجه) را برحسب فرکانس نشان می‌دهد. هر دو منحنی برحسب لگاریتم فرکانس رسم می‌شوند.

بیان استاندارد لگاریتم دامنه $G(j\omega)$ ، $20 \log |G(j\omega)|$ است که در آن لگاریتم در پایه ۱۰ محاسبه می‌شود. واحد این بیان دسیبل، با علامت اختصاری dB است. در نمایش لگاریتمی، منحنی‌ها روی کاغذ نیم‌لگاریتمی رسم می‌شود، مقیاس لگاریتمی برای فرکانس و مقیاس خطی برای دامنه (برحسب دسیبل) یا فاز (برحسب درجه) به کار می‌رود. (گستره فرکانسی مورد نیاز تعداد دهه‌های محور افقی را تعیین می‌کند).

مزیت اصلی استفاده از نمودار بوده این است که ضرب دامنه‌ها به جمع تبدیل می‌شود. به علاوه روش ساده‌ای برای رسم تقریبی منحنی‌های لگاریتم دامنه وجود دارد. اساس این روش تقریب مجانبی است. تقریب با استفاده از مجانب‌های راست در مواردی که تنها اطلاعات تقریبی مشخصات پاسخ فرکانسی لازم است، تقریب خوبی است. هر گاه منحنی دقیق‌تری لازم باشد می‌توان منحنی رسم شده براساس این مجانب‌ها را تصحیح کرد. منحنی‌های زاویه فاز را می‌توان تنها با داشتن الگوی منحنی فاز رسم کرد. استفاده از مقیاس لگاریتمی برای فرکانس به خاطر باز شدن ناحیه فرکانس‌های پایین بسیار مهم است، زیرا برای اکثر سیستم‌های عملی مشخصات فرکانس پایین بسیار مهم هستند. این که به خاطر لگاریتمی بودن فرکانس نمی‌توان منحنی‌ها را تا فرکانس صفر رسم کرد ($\log 0 = -\infty$) مشکلی جدی ایجاد نمی‌کند.

با نمایش اطلاعات پاسخ فرکانسی به شکل نمودار بوده، تعیین تابع تبدیل به روش تجربی کار ساده‌ای می‌شود.

عوامل پایه‌ای $G(j\omega)H(j\omega)$. چنانچه قبلاً گفتیم مزیت اصلی نمودار لگاریتمی سادگی نسبی ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی است. عوامل پایه موجود در یک تابع تبدیل دلخواه $G(j\omega)H(j\omega)$ عبارت‌اند از:

۱. بهره K

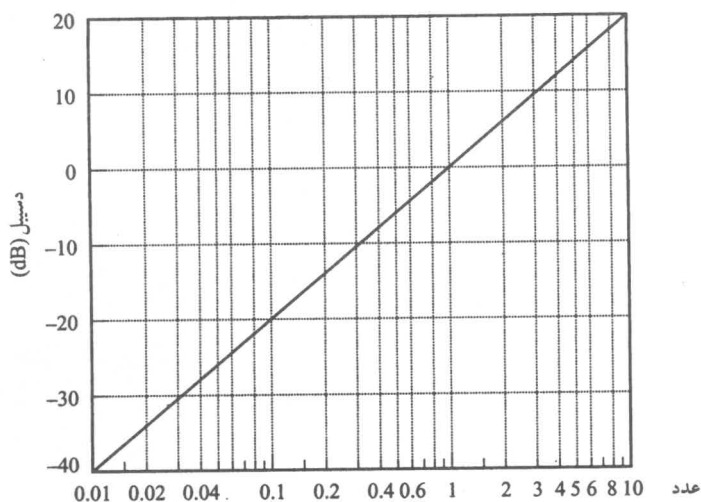
۲. عوامل مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری $(j\omega)^{\pm 1}$

۳. عوامل مرتبه $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

۴. عوامل مرتبه دوم $[1+\zeta^2(j\omega/\omega_n)^2+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

پس از آشنا شدن با نمودارهای لگاریتمی این عوامل پایه‌ای می‌توانیم آنها را برای ترسیم نمودار لگاریتمی مرکب یک تابع تبدیل کلی $G(j\omega)H(j\omega)$ به کار ببریم، به این منظور منحنی‌های این عوامل را رسم کرده، آنها را با هم جمع می‌کنیم، زیرا جمع لگاریتم این عوامل با ضرب آنها هم‌ارز است.

بهره K . برحسب دسیبل، اعداد بزرگتر از یک مثبت و اعداد کوچکتر از یک منفی هستند. منحنی لگاریتم اندازه بهره ثابت K ، خطی افقی با اندازه $20 \log K$ دسیبل است. زاویه فاز بهره K صفر است. اثر تغییر بهره K در تابع تبدیل، بالا و پایین بردن منحنی لگاریتم دامنه به اندازه‌ای ثابت است، ولی بر منحنی فاز اثری ندارد.



شکل ۴-۷

منحنی تبدیل عدد به دسیبل.

شکل ۴-۷ یک منحنی تبدیل عدد به دسیبل را نشان می‌دهد. با توجه به این منحنی می‌توان مقدار هر عدد برحسب دسیبل را یافت. با هر ۱۰ برابر شدن عدد، مقدار برحسب دسیبل به اندازه ۲۰ زیاد می‌شود. اثبات این مطلب به صورت زیر است

$$20 \log(K \times 10) = 20 \log K + 20$$

به نحوی مشابه

$$20 \log(K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

توجه کنید که برحسب دسیبل، هر عدد و عکس آن تنها در علامت تفاوت دارند، یعنی برای عدد K

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

عوامل مشتقگیری و انتگرالگیری $(j\omega)^{\pm 1}$. لگاریتم دامنه $1/j\omega$ برحسب دسیبل عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

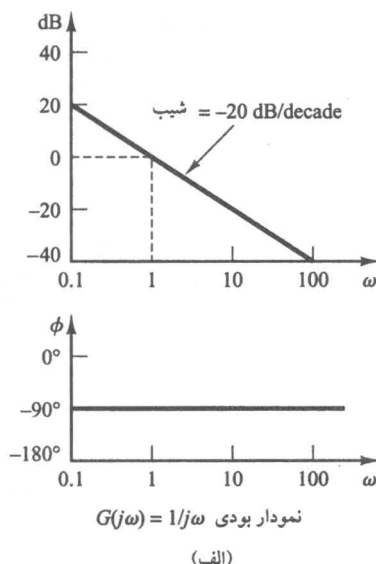
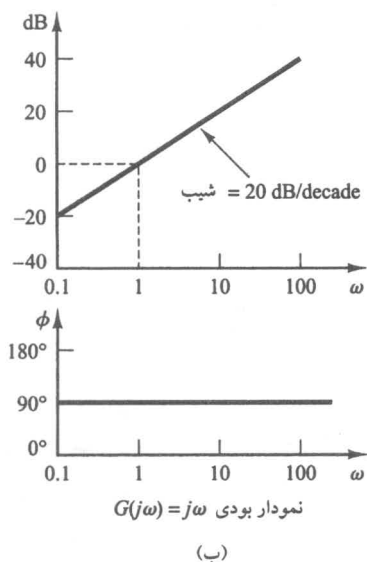
زاویه فاز $1/j\omega$ ثابت و برابر -90° است.

در نمودارهای بوده، نسبتهای فرکانسی برحسب اکتاو یا دهه بیان می‌شوند. اکتاو فاصله فرکانسی ω_1 تا $2\omega_1$ است، که ω_1 می‌تواند هر فرکانسی باشد. دهه فاصله فرکانسی ω_1 تا $10\omega_1$ است؛ باز هم ω_1 می‌تواند هر فرکانسی باشد، (در مقیاس لگاریتمی کاغذ نیم لگاریتمی هر نسبت فرکانسی با فاصله افقی یکسانی متناظر است. برای مثال فاصله افقی $\omega=1$ تا $\omega=10$ برابر فاصله افقی $\omega=3$ تا $\omega=30$ است.)

وقتی ω روی مقیاس لگاریتمی قرار می‌گیرد، لگاریتم دامنه $20 \log \omega \text{ dB}$ یک خط راست می‌شود. برای

رسم این خط راست تنها مشخص کردن یک نقطه ($\omega=1$, 0 dB) کافی است، چون

$$(-20 \log 10 \omega) \text{ dB} = (-20 \log \omega - 20) \text{ dB}$$



شکل ۵-۷ (الف) نمودار بوده $G(j\omega) = 1/j\omega$ ؛ (ب) نمودار بوده $G(j\omega) = j\omega$.

شیب این خط راست -20 dB/dec - (بخوانید منهای 20 dB بر دهه) یا -6 dB/oct - (بخوانید منهای 6 dB بر اکتاو) است.

به نحوی مشابه لگاریتم دامنه $j\omega$ برحسب دسیبل عبارت است از

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

زاویه فاز $j\omega$ ثابت و برابر 90° است. منحنی لگاریتم دامنه خط راستی با شیب 20 dB/dec است، شکل‌های ۵-۷ (الف) و (ب) به ترتیب منحنی‌های پاسخ فرکانسی عوامل $1/j\omega$ و $j\omega$ را نشان می‌دهند. به وضوح پیداست که پاسخ فرکانسی عوامل $1/j\omega$ و $j\omega$ تنها در علامت شیب منحنی‌های دامنه و علامت زاویه فاز تفاوت دارند. هر دو لگاریتم دامنه در $\omega=1$ برابر 0 dB هستند.

اگر تابع تبدیل دارای عوامل $(1/j\omega)^n$ یا $(j\omega)^n$ باشد، لگاریتم دامنه به ترتیب عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20 n \log \omega \text{ dB}$$

یا

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20 n \log \omega \text{ dB}$$

پس شیب منحنی‌های لگاریتم دامنه عوامل $(1/j\omega)^n$ و $(j\omega)^n$ به ترتیب $-20 n \text{ dB/dec}$ و $20 n \text{ dB/dec}$ است. در تمام گستره فرکانسی زاویه فاز $(1/j\omega)^n$ برابر $-90^\circ \times n$ و زاویه فاز $(j\omega)^n$ برابر $90^\circ \times n$ است. منحنی‌های دامنه از نقطه $(\omega=1, 0 \text{ dB})$ می‌گذرند.

عامل مرتبه اول $(1+j\omega T)^{-1}$. لگاریتم دامنه عامل مرتبه اول $1/(1+j\omega T)$ عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$$

در فرکانسهای پایین، یعنی فرکانسهایی که برایشان $\omega \ll 1/T$ ، لگاریتم دامنه را می‌توان به صورت زیر تقریب زد

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \approx -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

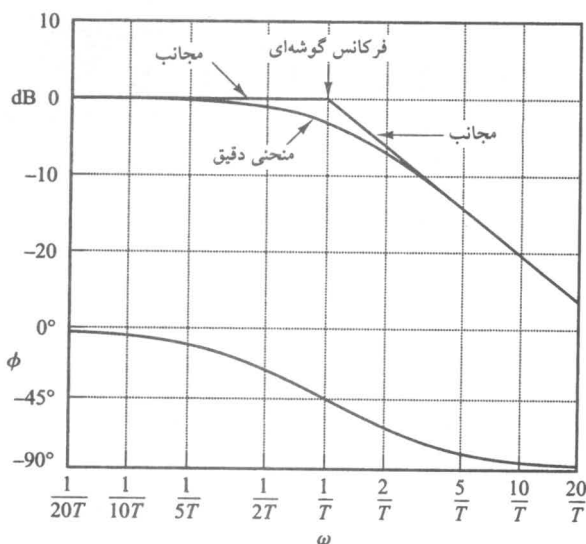
پس منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین خط راست ۰ dB است. در فرکانسهای بالا که برایشان $\omega \gg 1/T$

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \approx -20 \log \omega T \text{ dB}$$

این عبارت تقریبی گستره فرکانس بالاست. در $\omega = 1/T$ این منحنی مقدار ۰ dB را به دست می‌دهد و در $\omega = 10/T$ مقدار ۲۰ dB را. پس مقدار ۲۰ dB $-20 \log \omega T$ با هر دهه افزایش ω به اندازه ۲۰ dB کم می‌شود. پس در $\omega \gg 1/T$ منحنی لگاریتم دامنه خط راستی با شیب ۲۰ dB/dec (یا ۶ dB/oct) است.

تحلیل بالا نشان می‌دهد که منحنی پاسخ فرکانسی عامل $1/(1+j\omega T)$ را می‌توان با دو مجانب تقریب زد. یک مجانب خط راست ۰ dB در گستره فرکانسی $0 < \omega < 1/T$ است، و دیگری خط راستی با شیب ۲۰ dB/dec در گستره فرکانسی $1/T < \omega < \infty$. منحنی دقیق لگاریتم دامنه، مجانبها و منحنی فاز در شکل ۶-۷ نشان داده شده است.

فرکانس محل برخورد دو مجانب را **فرکانس گوشه‌ای** یا شکست می‌نامند. برای عامل $1/(1+j\omega T)$ ، فرکانس $\omega = 1/T$ فرکانس گوشه‌ای است، چون در $\omega = 1/T$ دو مجانب مقدار یکسانی دارند. (در عبارت مجانب فرکانس پایین در $\omega = 1/T$ داریم $20 \log 1 = 0$ dB و در عبارت مجانب فرکانس بالا نیز در $\omega = 1/T$ داریم $20 \log 1 = 0$ dB). فرکانس گوشه‌ای منحنی پاسخ فرکانسی را به دو بخش تقسیم می‌کند، ناحیه فرکانس



شکل ۶-۷

منحنی لگاریتم دامنه و مجانبهای آن و منحنی زاویه فاز $1/(1+j\omega T)$.

پایین و ناحیه فرکانس بالا. فرکانس گوشه‌ای در رسم منحنی‌های پاسخ فرکانسی بسیار مهم است.

مقدار دقیق زاویه فاز ϕ عامل $1/(1+j\omega T)$ عبارت است از

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

در فرکانس صفر زاویه فاز 0° است. در فرکانس گوشه‌ای زاویه فاز عبارت است

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T}{T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$$

در بینهایت زاویه فاز -90° می‌شود. چون زاویه فاز تابع تانژانت معکوس است، زاویه فاز نسبت به نقطه عطف واقع در $\phi = -45^\circ$ تقارن دارد.

خطای منحنی‌های مجانبی دامنه از مقدار واقعی را می‌توان محاسبه کرد. ماکزیمم خطا در فرکانس گوشه‌ای

رخ می‌دهد و تقریباً برابر 3 dB است، زیرا

$$-20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.01 \text{ dB}$$

خطا در فرکانسی که یک اکتاو پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای است، یعنی در $\omega = 1/(2T)$ ، برابر است با

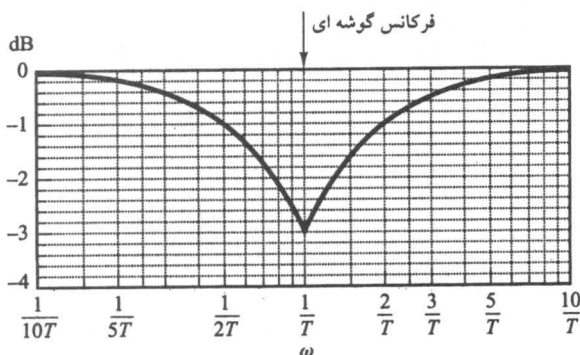
$$-20 \log \sqrt{\frac{1}{4}+1} + 20 \log 1 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

خطا در فرکانسی که یک اکتاو بالاتر از فرکانس گوشه‌ای است، یعنی در $\omega = 2/T$ ، برابر است با

$$-20 \log \sqrt{2^2+1} + 20 \log 2 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

پس خطا در یک اکتاو پایین‌تر یا بالاتر از فرکانس گوشه‌ای تقریباً 1 dB است. به نحوی مشابه می‌توان دید که خطا در یک دهه بالاتر یا پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای تقریباً 0.4 dB است. شکل ۷-۷ خطای استفاده از مجانبها به عنوان منحنی پاسخ فرکانسی $1/(1+j\omega T)$ را برحسب دسیبل نشان می‌دهد.

چون رسم مجانب‌ها بسیار ساده است، و مجانب‌ها به حد کافی به منحنی واقعی نزدیک‌اند، کاربرد این مجانبها در ترسیم نمودار بوده برای یافتن سریع مشخصات کلی پاسخ فرکانسی بسیار مناسب است و در مراحل ابتدایی کار می‌توان آنها را به کار برد. هر گاه منحنی پاسخ فرکانسی دقیق‌تری لازم بود، می‌توان تصحیح لازم را با مراجعه به شکل ۷-۷ انجام داد. در عمل برای صورت دادن این تصحیح می‌توان تصحیح 3 dB در فرکانس



شکل ۷-۷

خطای لگاریتم دامنه برای مجانب پاسخ فرکانسی $1/(1+j\omega T)$.

گوشه‌ای و تصحیح dB ۱ در یک اکتاو بالاتر و یک اکتاو پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای را در نظر گرفت و منحنی همواری رسم کرد که از این سه نقطه بگذرد.

توجه کنید که تغییر ثابت زمانی T باعث جابه‌جا شدن فرکانس گوشه‌ای می‌شود، ولی شکل‌های منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز بی‌تغییر می‌ماند.

تابع تبدیل $1/(1+j\omega T)$ مشخصات یک فیلتر پایین‌گذر را دارد. در فرکانسهای بزرگتر از $\omega=1/T$ لگاریتم دامنه به سرعت به سمت $-\infty$ افت می‌کند. این افت عمدتاً از ثابت زمانی ناشی می‌شود. در فیلتر پایین‌گذر خروجی می‌تواند به خوبی ورودی سینوسی فرکانس پایین را دنبال کند. ولی با افزایش فرکانس ورودی، خروجی نمی‌تواند ورودی را دنبال کند، زیرا خروجی برای رسیدن به دامنه مطلوب به زمان نیاز دارد. در فرکانسهای بالا دامنه به سمت صفر و اختلاف فاز خروجی نسبت به ورودی به -90° میل می‌کند. بنابراین اگر ورودی هارمونیکهای زیادی داشته باشد، مولفه‌های فرکانس پایین به خوبی در خروجی ظاهر می‌شوند، ولی مولفه‌های فرکانس بالا با کاهش دامنه و تغییر فاز به خروجی می‌رسند. بنابراین چنین عنصر مرتبه اولی تنها پدیده‌های ثابت یا دارای تغییر کند را به طور دقیق، یا تقریباً دقیق، در خروجی بازسازی می‌کند.

یک مزیت نمودار بوده این است که برای عملهای عکس یکدیگر، مثلاً $1+j\omega T$ ، منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز تنها در علامت تفاوت می‌کنند. چون

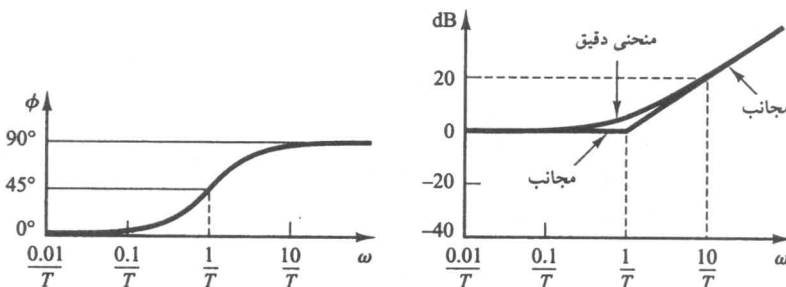
$$20 \log |1+j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right|$$

$$\angle (1+j\omega T) = \tan^{-1} \omega T = - \angle \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right|$$

در هر دو حالت فرکانس گوشه‌ای یکسان است. شیب مجانب فرکانس بالا 20 dB/dec است و زاویه فاز با تغییر ω از صفر تا بینهایت از 0° تا 90° تغییر می‌کند. شکل ۷-۸ منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز عامل $1+j\omega T$ را نشان می‌دهد.

برای رسم دقیق منحنی فاز باید چند نقطه از منحنی را مشخص کنیم. زاویه فاز $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ عبارت است

از



شکل ۷-۸

منحنی لگاریتم دامنه و مجانبهای آن، و منحنی زاویه فاز $1+j\omega T$.

$$\omega = \frac{1}{T} \quad \text{در} \quad \pm 45^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{2T} \quad \text{در} \quad \pm 26.6^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{10T} \quad \text{در} \quad \pm 5.7^\circ$$

$$\omega = \frac{2}{T} \quad \text{در} \quad \pm 63.4^\circ$$

$$\omega = \frac{10}{T} \quad \text{در} \quad \pm 84.3^\circ$$

در مواردی که تابع تبدیل داده شده جملاتی چون $(1+j\omega T)^{\pm n}$ دارد، ترسیم مجانبهای مشابهی ممکن است. فرکانس گوشه‌ای باز هم $\omega = 1/T$ و مجانبها باز هم خطوط راست هستند. مجانب فرکانس پایین خط افقی 0 dB است و مجانب فرکانس بالا خطی با شیب -20 dB/dec یا 20 dB/dec است. خطای مجانبها با منحنی واقعی n برابر خطای $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ است. زاویه فاز در هر فرکانس خاص n برابر زاویه $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ است.

عاملهای مرتبه دوم $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$. سیستمهای کنترل غالباً عاملهای مرتبه دومی به

شکل زیر دارند

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (7-7)$$

به ازای $\zeta > 1$ این عامل مرتبه دوم را می‌توان به صورت حاصلضرب دو جمله مرتبه اول دارای قطبهای حقیقی بیان کرد. به ازای $0 < \zeta < 1$ این عامل مرتبه دوم حاصلضرب دو عامل مختلط مزدوج است. برای عاملهای مرتبه دوم دارای ζ کوچک تقریب مجانبی برای منحنیهای پاسخ فرکانسی چندان دقیق نیست. علت این امر بستگی دامنه و فاز عامل مرتبه دوم به فرکانس گوشه‌ای و نسبت میرایی ζ است.

منحنی مجانبی پاسخ فرکانسی را می‌توان به این ترتیب یافت. داریم

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

برای فرکانسهای پایین، $\omega \ll \omega_n$ لگاریتم دامنه عبارت است از $-20 \log 1 = 0$ dB

پس مجانب فرکانس پایین خط افقی واقع در 0 dB است. در فرکانسهای بالا، $\omega \gg \omega_n$ لگاریتم دامنه عبارت است از

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

پس معادلهٔ مجانب فرکانس بالا خط راستی با شیب -40 dB/dec است، زیرا

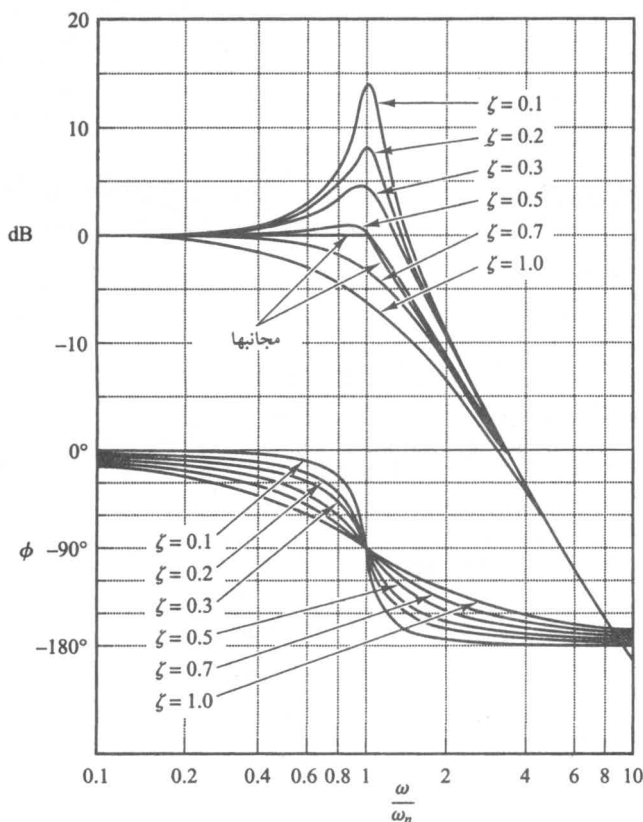
$$-40 \log \frac{1 \cdot \omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

مجانب فرکانس بالا و مجانب فرکانس پایین در $\omega = \omega_n$ هم را قطع می‌کند، زیرا در این فرکانس

$$-40 \log \frac{\omega_n}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

فرکانس ω_n فرکانس گوشه‌ای این عامل مرتبه دوم است.

دو مجانب به دست آمده مستقل از مقدار ζ است. چنانچه معادلهٔ (۷-۷) نشان می‌دهد، نزدیک فرکانس $\omega = \omega_n$ یک حالت تشدید وجود دارد. نسبت میرایی ζ اندازهٔ قلهٔ این تشدید را تعیین می‌کند. واضح است که تقریب با مجانبهای راست خطا دارد. اندازهٔ خطا به مقدار ζ بستگی دارد. این خطا به ازای مقادیر کوچک ζ بزرگ است. شکل ۷-۹ منحنی‌های دقیق لگاریتم دامنه و مجانبهای آن و منحنی‌های دقیق زاویهٔ فاز را به ازای چند مقدار مختلف ζ نشان می‌دهد. در صورتی که بخواهیم منحنی‌های مجانبی را تصحیح کنیم باید با توجه به شکل ۷-۹ تصحیح را در نقاط مختلف صورت دهیم.



شکل ۷-۹

منحنی‌های لگاریتم دامنه و
مجانبهای آن و منحنی‌های
زاویهٔ فاز عامل درجه دوم
معادلهٔ (۷-۷).

زاویه فاز عامل مرتبه دوم $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ عبارت است از

$$\phi = \left[\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (۸-۷)$$

زاویه فاز تابعی از ω و ζ است؛ در $\omega = 0$ زاویه فاز 0° است. در فرکانس $\omega = \omega_n$ زاویه فاز مستقل از مقدار ζ برابر -90° است، زیرا

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta}{0} \right) = -\tan^{-1} \infty = -90^\circ$$

در $\omega = \infty$ زاویه فاز -180° می‌شود. منحنی زاویه فاز نسبت به نقطه عطف واقع در $\omega = \omega_n$ ، $\phi = 90^\circ$ تقارن دارد. برای رسم این منحنی‌های فاز راه ساده‌ای وجود ندارد. به این منظور باید به منحنی‌های زاویه فاز شکل ۹-۷ مراجعه کرد.

منحنی پاسخ فرکانسی عامل

$$1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

را می‌توان با عوض کردن علامت منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز عامل زیر به دست آورد.

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

برای ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی یک تابع مرتبه دوم ابتدا باید مقادیر فرکانس گوشه‌ای ω_n و نسبت میرایی ζ را یافت. سپس می‌توان با استفاده از منحنی‌های شکل ۹-۷، منحنی‌های پاسخ فرکانسی را رسم کرد.

فرکانس تشدید ω_r و قله تشدید M_r . دامنه

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

عبارت است از

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (۹-۷)$$

اگر $|G(j\omega)|$ در فرکانسی قله داشته باشد، آن فرکانس را **فرکانس تشدید** می‌نامند. چون صورت $|G(j\omega)|$ ثابت است، مقدار قله $|G(j\omega)|$ در فرکانسی رخ می‌دهد که تابع زیر می‌نیم شود

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (۱۰-۷)$$

معادله (۷-۱۰) را می توان به شکل زیر نوشت

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2) \quad (۷-۱۱)$$

پس می نیمم $g(\omega)$ در $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ رخ می دهد. بنابراین فرکانس تشدید ω_r عبارت است از

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{به ازای } 0 \leq \zeta \leq 0.707 \quad (۷-۱۲)$$

با میل به صفر، فرکانس تشدید به ω_n میل می کند. به ازای $0 < \zeta \leq 0.707$ فرکانس تشدید ω_r کوچکتر از فرکانس تشدید میرا $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ، که در پاسخ گذرا وجود دارد، است. با توجه به معادله (۷-۱۲) می توان دید که به ازای $0.707 > \zeta$ فرکانس تشدید وجود ندارد. با افزایش فرکانس ω دامنه $|G(j\omega)|$ به طور یکنواخت کم می شود. (به ازای تمام مقادیر $\omega > 0$ دامنه کمتر از ۰ dB است. توجه کنید که به ازای $1 < \zeta < 0.707$ پاسخ پله نوسانی است، ولی نوسانها آنقدر شدید می شوند که قابل مشاهده نیستند.)

دامنه در فرکانس تشدید، $M_r = |G(j\omega_r)|$ ، را می توان برای $0 \leq \zeta \leq 0.707$ به استفاده از معادلات (۷-۱۲) و (۷-۹) یافت. به ازای $0 \leq \zeta \leq 0.707$

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (۷-۱۳)$$

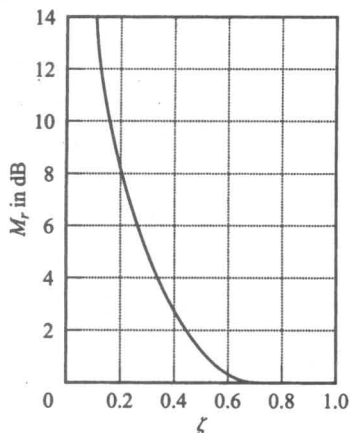
به ازای $\zeta > 0.707$

$$M_r = 1 \quad (۷-۱۴)$$

با میل ζ به صفر، M_r به بینهایت میل می کند. یعنی اگر یک سیستم نامیرا در فرکانس طبیعی اش تحریک شود، دامنه $G(j\omega)$ بینهایت می شود. رابطه M_r و ζ در شکل ۷-۱۰ نشان داده شده است.

زاویه فاز $G(j\omega)$ در فرکانس تشدید را می توان با گذاشتن معادله (۷-۱۲) در معادله (۷-۸) به دست آورد. در فرکانس تشدید

$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



شکل ۷-۱۰

منحنی M_r برحسب ζ سیستم مرتبه دوم $1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$.

روش عمومی رسم نمودار بوده. MATLAB روش ساده‌ای برای رسم نمودار بوده دارد. (این روش در ادامه این بخش توضیح داده می‌شود.) ولی در اینجا می‌خواهیم روش دستی رسم نمودارهای بوده، بدون استفاده از MATLAB را بیان کنیم.

ابتدا تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)H(j\omega)$ را به صورت حاصلضرب عوامل پایه‌ای بیان شده در بالا می‌نویسیم. سپس فرکانسهای گوشه‌ای متناظر با این عوامل پایه‌ای را مشخص می‌کنیم. سرانجام منحنی‌های مجانبی لگاریتم دامنه را با شبیه‌ای مناسب رسم می‌کنیم. منحنی دقیق را، که نزدیک منحنی مجانبی است، می‌توان با افزودن اصلاحاتی رسم کرد.

منحنی زاویه فاز $G(j\omega)H(j\omega)$ را می‌توان با افزودن منحنی‌های زاویه فاز عوامل جداگانه تابع تبدیل به دست آورد.

نمودارهای بوده رسم شده با استفاده از مجانبها، از تمام روشهای دیگر محاسبه پاسخ فرکانسی تابع تبدیل کمتر وقت می‌برد. سهولت ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی یک تابع تبدیل و سهولت اصلاح منحنی پاسخ فرکانسی هنگام افزودن جبران‌ساز، دلایل اصلی کاربرد فراوان نمودارهای بوده در مسائل عملی است.

نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید.

مثال ۳-۷

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2) \left[(j\omega)^2 + j\omega + 2 \right]}$$

اصلاحات لازم برای دقیق بودن منحنی لگاریتم دامنه را صورت دهید.

برای پرهیز از اشتباهات ممکن در ترسیم منحنی لگاریتم دامنه بهترست $G(j\omega)$ را به صورت زیر بهنجار کنیم، تا مجانب فرکانس پایین عوامل مرتبه اول و مرتبه دوم dB باشد.

$$G(j\omega) = \frac{7.5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

این تابع از عوامل زیر تشکیل شده است

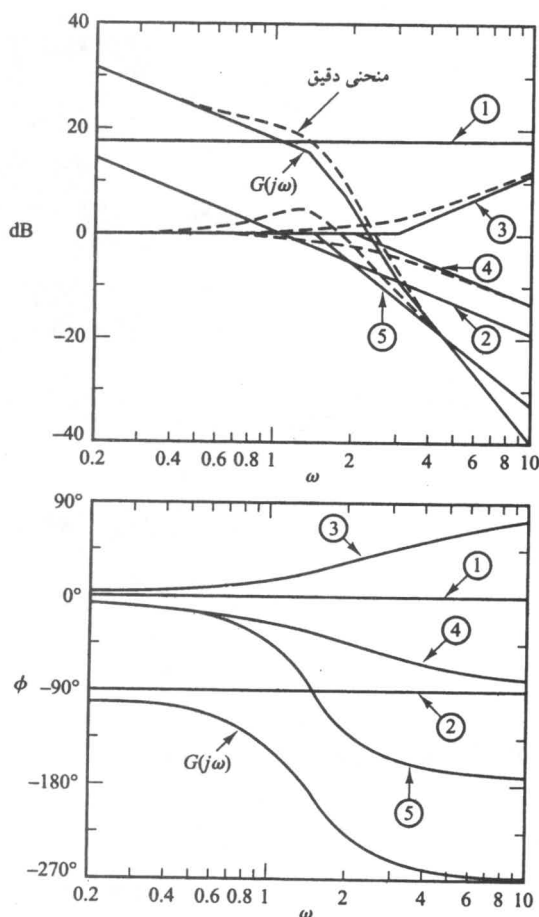
$$7.5, \quad (j\omega)^{-1}, \quad 1 + \frac{j\omega}{3}, \quad \left(1 + \frac{j\omega}{2} \right)^{-1}, \quad \left[1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right]^{-1}$$

فرکانسهای گوشه‌ای عوامل سوم، چهارم، و پنجم به ترتیب $\omega = 3$ ، $\omega = 2$ ، و $\omega = \sqrt{2}$ است. دقت کنید که نسبت میرایی آخرین جمله ۳۵۳۶٪ است.

منحنی‌های مجانبی هر عامل به طور مجزا در شکل ۷-۱۱ نشان داده شده است. منحنی کل را می‌توان با جمع جبری منحنی‌های مجزا، به صورت نشان داده در شکل ۷-۱۱ به دست آورد. توجه کنید که در هر فرکانس گوشه‌ای شیب منحنی تغییر می‌کند، و در فاصله بین هر دو فرکانس گوشه‌ای شیب منحنی با جمع شبیه‌ای منحنی‌های مجزا برابر است. در زیر فرکانس $\omega = \sqrt{2}$ شیب منحنی dB/dec -۲۰ است. در اولین فرکانس

گوشه‌ای، $\omega = \sqrt{2}$ شیب به -60 dB/dec تغییر یافته تا فرکانس گوشه‌ای بعدی، یعنی $\omega = 2$ ادامه می‌یابد. در $\omega = 2$ شیب -80 dB/dec می‌شود. سرانجام در آخرین فرکانس گوشه‌ای $\omega = 3$ شیب -60 dB/dec می‌شود. پس از رسم این منحنی تقریبی می‌توان منحنی دقیق را با انجام اصلاحاتی در فرکانسهای گوشه‌ای و یک اکتاو بالاتر و یک اکتاو پایین‌تر از فرکانسهای گوشه‌ای به دست آورد. برای عاملهای مرتبه اول $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ تصحیحات لازم $\pm 3 \text{ dB}$ در فرکانس گوشه‌ای و $\pm 1 \text{ dB}$ در فرکانسهای یک اکتاو بالاتر یا پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای است. تصحیحات لازم برای عوامل مرتبه دوم از شکل ۷-۹ به دست می‌آید. منحنی لگاریتم دامنه دقیق $G(j\omega)$ در شکل ۷-۱۱ با خط چین مشخص شده است.

توجه کنید که تغییر شبیه‌ها تنها در فرکانسهای گوشه‌ای تابع تبدیل $G(j\omega)$ رخ می‌دهند. بنابراین به جای رسم منحنی‌های مجزای دامنه و جمع کردن آنها به صورت نشان داده شده، می‌توانیم از ابتدا منحنی اصلی را رسم کنیم. از خط راست واقع در اولین بخش فرکانس (در این مثال خط با شیب -20 dB/dec واقع در $\omega < \sqrt{2}$) شروع می‌کنیم. با افزایش فرکانس به اثر قطب مختلط (عامل مرتبه دوم) با فرکانس گوشه‌ای $\omega = \sqrt{2}$ می‌رسیم. قطبهای مختلط مزدوج باعث می‌شوند شیب منحنی دامنه از -20 به -60 dB/dec برسد. در فرکانس



شکل ۷-۱۱

نمودار بوده سیستم مثال ۷-۳.

گوشه‌ای بعد، $\omega=2$ قطب مرتبه اول باعث می‌شود شیب به -80 dB/dec تغییر یابد. سرانجام در فرکانس گوشه‌ای $\omega=3$ اثر صفر باعث می‌شود شیب از -80 به -60 dB/dec برسد.

برای ترسیم منحنی زاویه فاز کامل باید منحنی‌های زاویه فاز تمام عوامل رسم شود. جمع جبری منحنی‌های مجزای فاز، مطابق شکل ۷-۱۱ منحنی فاز کامل را به دست می‌دهد.

سیستم‌های می‌نیم فاز و سیستم‌های غیر می‌نیم فاز. توابع تبدیلی که در نیمه راست صفحه s نه قطب دارند و نه صفر، توابع تبدیل می‌نیم فاز هستند، و آنهایی که در نیمه راست صفحه s قطب و / یا صفر دارند توابع تبدیل غیر می‌نیم فاز هستند. سیستم‌های با تابع تبدیل می‌نیم فاز سیستم‌های می‌نیم فاز و سیستم‌های با تابع تبدیل غیر می‌نیم فاز سیستم‌های غیر می‌نیم فاز نامیده می‌شوند.

از میان سیستم‌هایی که مشخصه دامنه یکسانی دارند، گستره تغییرات فاز سیستم می‌نیم فاز کمتر از بقیه است، و هر سیستم غیر می‌نیم فازی با آن مشخصه دامنه، گستره تغییرات فاز بزرگتری دارد.

توجه کنید که برای یک سیستم می‌نیم فاز تابع تبدیل را می‌توان تنها با توجه به منحنی دامنه به طور یکتا مشخص کرد. برای سیستم‌های غیر می‌نیم فاز چنین نیست. ضرب هر تابع تبدیلی در تابع تبدیل یک فیلتر تمام گذر منحنی دامنه آن را تغییر نمی‌دهد. ولی مشخصه فاز آن تغییر می‌کند.

برای مثال دو سیستم با توابع تبدیل سینوسی زیر در نظر بگیرید.

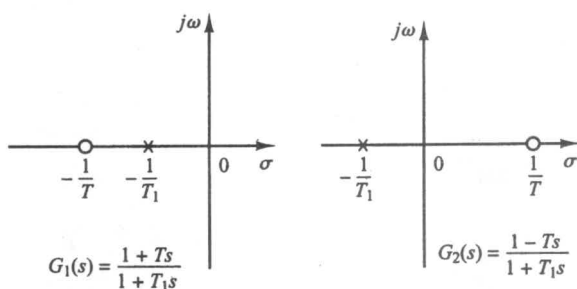
$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T_1}, \quad 0 < T < T_1$$

آرایش قطب - صفر این سیستم‌ها در شکل ۷-۱۲ نشان داده شده است. دو تابع تبدیل سینوسی مشخصه دامنه یکسانی دارند. ولی چنانچه شکل ۷-۱۳ نشان می‌دهد مشخصات زاویه فازشان متفاوت است. این دو سیستم در عوامل زیر با هم تفاوت دارند

$$G(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$$

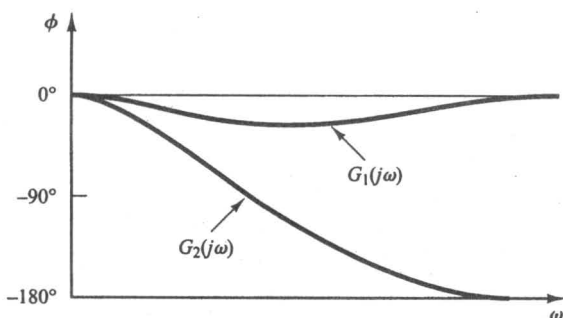
دامنه عامل $(1-j\omega T)/(1+j\omega T)$ همواره یک است. ولی زاویه فاز آن $-2 \tan^{-1} \omega T$ است و با تغییر ω از صفر تا بینهایت، از 0° تا -180° تغییر می‌کند.

همانطور که قبلاً گفتیم برای سیستم‌های می‌نیم فاز رابطه یکتایی بین مشخصه‌های دامنه و فاز وجود دارد.



شکل ۷-۱۲

آرایش قطب - صفر سیستم می‌نیم فاز $G_1(s)$ و سیستم غیر می‌نیم فاز $G_2(s)$.



شکل ۷-۱۳

مشخصه‌های زاویه فاز سیستمهای

 $G_1(s)$ و $G_2(s)$ شکل ۷-۱۲.

یعنی اگر منحنی دامنه یک سیستم می‌نیم فاز در تمام گستره فرکانسی از صفر تا بینهایت مشخص باشد، منحنی فاز نیز به طور یکتا مشخص می‌شود و برعکس. این مطلب برای سیستمهای غیرمی‌نیم فاز صادق نیست.

وضعیت می‌نیم نبودن فاز به دو صورت ممکن است پیش بیاید. یکی وقتی سیستم یک عنصر یا چند عنصر غیرمی‌نیم فاز داشته باشد، و یکی وقتی سیستم حلقه‌های داخلی ناپایدار داشته باشد.

در یک سیستم می‌نیم فاز، زاویه فاز در $\omega = \infty$ به $90^\circ(q-p)$ می‌رسد که در آن p و q به ترتیب درجه چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج است. در سیستمهای غیرمی‌نیم فاز، زاویه فاز در $\omega = \infty$ با $90^\circ(q-p)$ تفاوت دارد. هر دو نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم دامنه در $\omega = \infty$ برابر $20^\circ(q-p)$ دسیبل بر دهه است. بنابراین می‌توان می‌نیم فاز بودن یک سیستم را با بررسی شیب مجانب فرکانس بالای منحنی دامنه و زاویه فاز در $\omega = \infty$ تشخیص داد. اگر با میل ω به بی‌نهایت شیب منحنی لگاریتم دامنه $20^\circ(q-p)$ dB/dec باشد و فاز در $\omega = \infty$ به $90^\circ(q-p)$ برسد، آنگاه سیستم می‌نیم فاز است.

پاسخ سیستمهای غیرمی‌نیم فاز کند است، زیرا در شروع پاسخ رفتاری ناقص دارند. در بسیاری از سیستمهای کنترل عملی باید از پهنای بیش از حد به دقت اجتناب کرد. در طراحی یک سیستم اگر سرعت پاسخ در درجه اول اهمیت باشد، نباید از عناصر غیرمی‌نیم فاز استفاده کرد. (در سیستمهای کنترل، تأخیر انتقالی یک نمونه متداول از عناصر غیرمی‌نیم فاز است.)

متذکر می‌شویم که روشهای تحلیل و طراحی براساس پاسخ فرکانسی، که در این فصل و فصل بعد معرفی می‌شوند، هم برای سیستمهای می‌نیم فاز و هم برای سیستمهای غیرمی‌نیم فاز معتبرند.

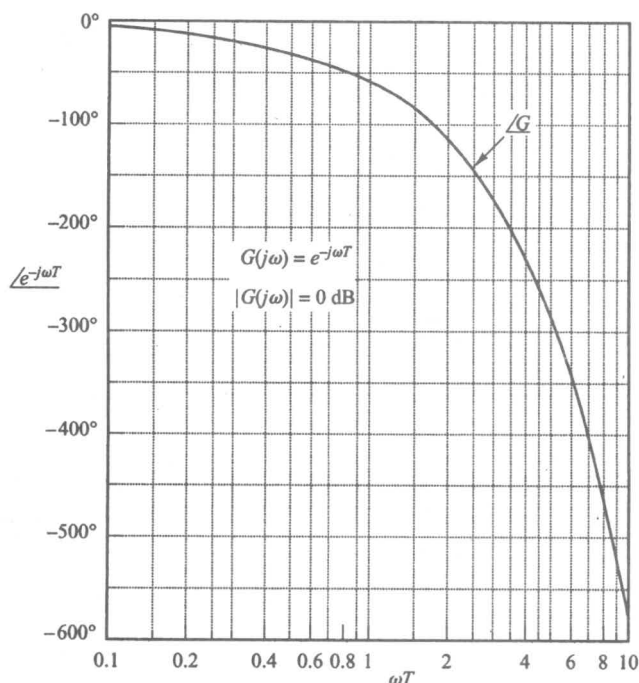
تأخیر انتقالی. تأخیر انتقالی یک رفتار غیرمی‌نیم فاز است که در فرکانسهای بالا پهنای زیادی ایجاد می‌کند، ولی باعث تضعیف دامنه نمی‌شود. تأخیر انتقالی معمولاً در سیستمهای حرارتی، هیدرولیکی، و نیوماتیکی وجود دارد.

تأخیر انتقالی بیان شده در زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

دامنه همواره برابر یک است، زیرا

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$



شکل ۱۴-۷

مشخصه فاز تأخیر انتقالی.

بنابراین لگاریتم دامنه تأخیر انتقالی $e^{-j\omega T}$ برابر ۰ dB است. فاز تأخیر انتقالی برابرست با

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= -\omega T & (\text{رادیان}) \\ &= -57.3 \omega T & (\text{درجه}) \end{aligned}$$

زاویه فاز با افزایش ω به طور خطی تغییر می‌کند. مشخصه زاویه فاز تأخیر انتقالی در شکل ۱۴-۷ نشان

داده شده است.

نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید:

مثال ۴-۷

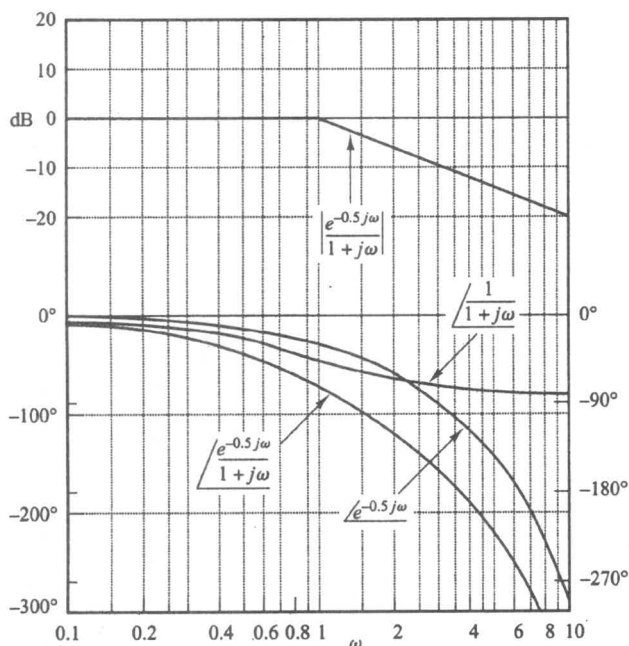
$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

لگاریتم دامنه عبارت است از:

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |e^{-j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ &= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \end{aligned}$$

فاز $G(j\omega)$ برابر است با

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} \\ &= -\omega L - \tan^{-1} \omega T \end{aligned}$$



شکل ۱۵-۷

نمودار بوده تابع تبدیل

$$e^{-j\omega L} / (1 + j\omega T)$$

به ازای $L=0.5$ و $T=1$.

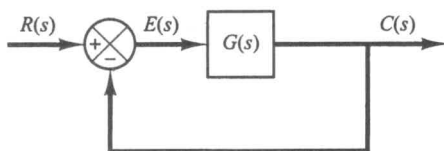
منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز این تابع تبدیل به ازای $L=0.5$ و $T=1$ در شکل ۱۵-۷ نشان داده شده است.

رابطه بین نوع سیستم و منحنی لگاریتم دامنه. سیستم با فیدبک واحد شکل ۱۶-۷ را در نظر بگیرید. خطاهای ایستای وضعیت، سرعت، و شتاب به ترتیب رفتار فرکانس پایین سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ را توصیف می‌کنند. برای هر سیستم تنها یکی از خطاهای ایستا محدود و مهم است. (هر چه مقدار خطای ایستای محدود بزرگتر باشد، بهره حلقه به ازای $\omega \rightarrow 0$ بزرگتر است).

نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین را تعیین می‌کند. بنابراین اطلاعات مربوط به وجود و دامنه خطای حالت ماندگار یک سیستم کنترل به یک ورودی خاص را می‌توان با مشاهده رفتار منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین تعیین کرد.

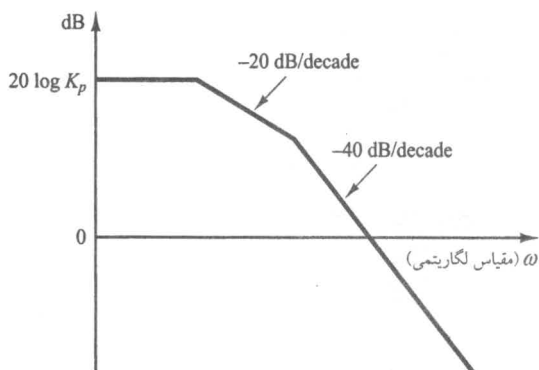
تعیین ثابت خطای ایستای وضعیت. سیستم کنترل با فیدبک واحد شکل ۱۶-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_r s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$



شکل ۱۶-۷

سیستم کنترل با فیدبک واحد.



شکل ۱۷-۷
منحنی لگاریتم دامنه یک
سیستم نوع صفر.

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \dots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \dots (T_p j\omega + 1)} \quad \text{یا}$$

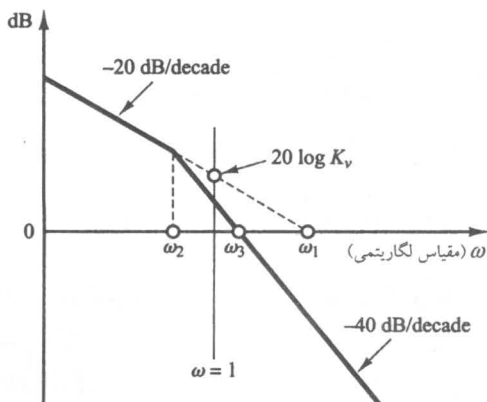
شکل ۱۷-۷ نمونه‌ای از منحنی‌های لگاریتم دامنه سیستم‌های نوع ۰ را نشان می‌دهد. در چنین سیستمی دامنه $G(j\omega)$ در فرکانسهای پایین K_p است، یا

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p$$

پس مجانب فرکانس پایین یک خط افقی در $20 \log K_p$ dB است.

تعیین ثابت خطای ایستای سرعت. سیستم کنترل با فیدبک واحد شکل ۱۶-۷ را در نظر بگیرید. شکل ۱۸-۷ نمونه‌ای از منحنی‌های لگاریتم دامنه سیستم‌های نوع ۱ را نشان می‌دهد. محل برخورد پاره‌خط ابتدایی دارای شیب -20 dB/dec (یا امتداد آن) با خط $\omega = 1$ ، دامنه $20 \log K_v$ را نشان می‌دهد. درستی مطلب را می‌توان به این شکل نشان داد: برای سیستم نوع ۱:

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}, \quad \omega \ll 1$$



شکل ۱۸-۷
منحنی لگاریتم دامنه
یک سیستم نوع ۱.

پس

$$20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_v$$

محل برخورد پاره خط اول دارای شیب -20 dB/dec (یا امتداد آن) با خط 0 dB فرکانسی است که از لحاظ عددی با K_v برابر است. برای پی بردن به این مطلب این فرکانس را ω_1 می نامیم؛ پس

$$\left| \frac{K_v}{j\omega} \right| = 1$$

یا

$$K_v = \omega_1$$

به عنوان مثال یک سیستم نوع ۱ با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

اگر فرکانس گوشه ای را ω_2 و فرکانس برخورد خط با شیب -40 dB/dec (یا امتداد آن) با خط 0 dB را ω_3 بنامیم، داریم

$$\omega_2 = \frac{F}{J}, \quad \omega_3 = \frac{K}{J}$$

چون

$$\omega_1 = K_v = \frac{K}{F}$$

نتیجه می گیریم

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_3$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

یا

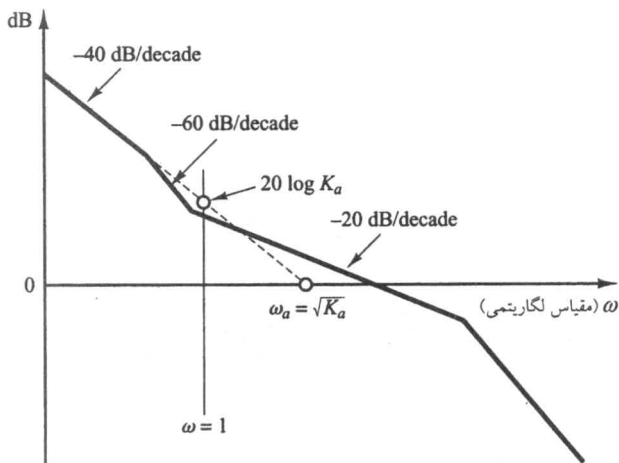
روی نمودار بوده

$$\log \omega_1 - \log \omega_3 = \log \omega_2 - \log \omega_1$$

پس نقطه ω_3 درست بین نقاط ω_1 و ω_2 است. نسبت میرایی ζ سیستم عبارت است از

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

تعیین ثابت خطای ایستای شتاب. سیستم کنترل با فیدبک واحد شکل ۷-۱۶ را در نظر بگیرید. شکل ۷-۱۹ نمونه ای از منحنی های لگاریتمی سیستمهای نوع ۲ را نشان می دهد. محل برخورد خط اولیه با شیب -40 dB/dec (یا امتداد آن) با خط $\omega=1$ دامنه $20 \log K_a$ را نشان می دهد. چون در فرکانسهای پایین



شکل ۱۹-۷
منحنی لگاریتم دامنه یک
سیستم نوع ۲.

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}, \quad \text{برای } \omega \ll 1$$

نتیجه می شود که

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_a$$

فرکانس ω_a ، محل برخورد خط اولیه دارای شیب -۴۰ dB/dec (یا امتداد آن) با خط ۰ dB از لحاظ عددی با جذر K_a برابر است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20 \log 1 = 0$$

که نتیجه می دهد

$$\omega_a = \sqrt{K_a}$$

رسم نمودارهای بوده با MATLAB. دستور bode دامنه و زاویه فاز پاسخ فرکانسی سیستمهای خطی پیوسته مستقل از زمان را حساب کنید.

اگر دستور bode بدون آرگومان سمت چپ به کامپیوتر داده شود، MATLAB نمودار بوده را روی صفحه رسم می کند. شکلهای متداول دستور bode عبارتند

```
bode(num,den)
bode(num,den,w)
bode(A,B,C,D)
bode(A,B,C,D,w)
bode(A,B,C,D,iu,w)
bode(sys)
```

دستور bode با آرگومانهای سمت چپ، به صورت زیر

$$[mag, phase, w] = bode(num, den, w)$$

پاسخ فرکانسی را در ماتریسهای mag، phase، و w ثبت می‌کند. نموداری روی صفحه رسم نمی‌شود. ماتریسهای mag و phase دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم، محاسبه شده در فرکانسهای قید شده در بردار w را دربر دارند. زاویه فاز برحسب درجه داده می‌شود. دامنه را می‌توان با دستور زیر به دسیبل تبدیل کرد

$$magdB = 20 * \log_{10}(mag)$$

دیگر دستورهایی bode دارای آرگومان سمت چپ به صورت زیرند

$$[mag, phase, w] = bode(num, den)$$

$$[mag, phase, w] = bode(num, den, w)$$

$$[mag, phase, w] = bode(A, B, C, D)$$

$$[mag, phase, w] = bode(A, B, C, D, w)$$

$$[mag, phase, w] = bode(A, B, C, D, iu, w)$$

$$[mag, phase, w] = bode(sys)$$

برای تعیین گستره فرکانسی دستور logspace(d1,d2) یا logspace(d1,d2,n) را به کار برید. logspace(d1,d2) برداری شامل ۵۰ درایه تولید می‌کند، هر درایه فرکانسی در فاصله 10^{d1} تا 10^{d2} است و فرکانس‌ها روی مقیاس لگاریتمی هم‌فاصله‌اند. (نقاط ابتدایی و نقاط انتهایی نیز جزء این ۵۰ نقطه هستند و بیشان ۴۸ نقطه ایجاد می‌شود). پس برای ایجاد ۵۰ نقطه هم‌فاصله بین 1 rad/sec و 100 rad/s دستور زیر را به کار می‌بریم

$$w = \text{logspace}(-1, 2)$$

$\text{logspace}(d1, d2, n)$ ، n نقطه هم‌فاصله لگاریتمی بین 10^{d1} تا 10^{d2} ایجاد می‌کند. مثلاً برای ایجاد ۱۰۰ نقطه هم‌فاصله بین 1 rad/s و 1000 rad/s دستور زیر را به کار می‌بریم

$$w = \text{logspace}(0, 3, 100)$$

برای استفاده از این فرکانسها در رسم نمودار بوده دستورهایی bode(num, den, w) یا bode(A, B, C, D, w) را به کار می‌بریم. این دستورها بردار فرکانسی w تولید شده توسط استفاده کننده را به کار می‌برند.

مثال ۵-۷

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

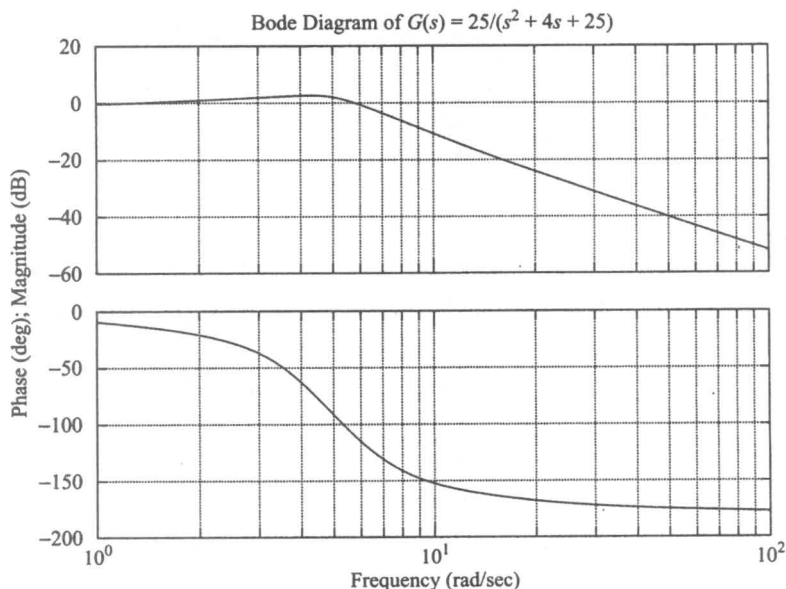
نمودار بوده این تابع تبدیل را رسم کنید.

وقتی سیستم به شکل زیر تعریف شده است

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

MATLAB Program 7-1

```
num = [25];
den = [1 4 25];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')
```



شکل ۲۰-۷

نمودار بوده $G(s) = 25 / (s^2 + 4s + 25)$.

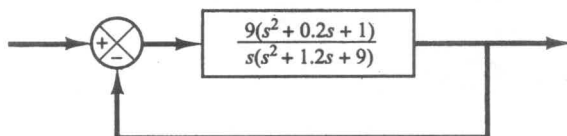
برای رسم نمودار بوده از دستور `bode(num,den)` استفاده می‌کنیم [اگر `num` و `den` ضرایب چندجمله‌ایهای صورت و مخرج را برحسب توانهای نزولی s دربر داشته باشند، دستور `bode(num,den)` نمودار بوده را رسم می‌کند.]. برنامه ۱-۷ برای رسم نمودار بوده این سیستم است. نمودار بوده در شکل ۲۰-۷ دیده می‌شود.

سیستم شکل ۲۱-۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

نمودار بوده را رسم کنید.

مثال ۶-۷



شکل ۲۱-۷

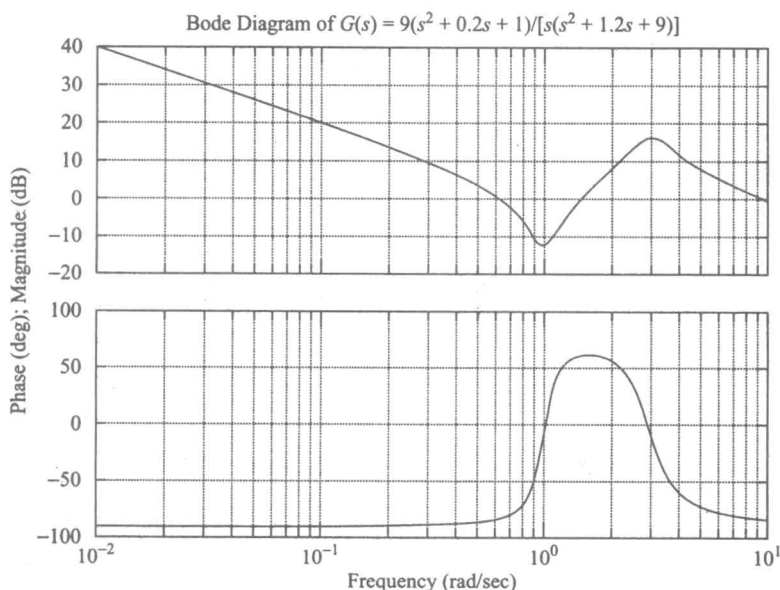
سیستم کنترل.

MATLAB Program 7-2

```

num = [9 1.8 9];
den = [1 1.2 9 0];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')

```



شکل ۷-۲۲

نمودار بوده $G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$.

برنامه ۷-۲ نمودار بوده این سیستم را رسم می‌کند. نمودار حاصل در شکل ۷-۲۲ نشان داده شده است. در این حالت گستره فرکانسی به طور خودکار از 0.01 rad/sec تا 100 rad/sec تعیین شده است. اگر بخواهیم نمودار بوده را در گستره 0.01 rad/sec تا 1000 rad/sec رسم کنیم، دستور زیر را می‌دهیم

$$w = \text{logspace}(-2,3,100)$$

این دستور ۱۰۰ نقطه همفاصله لگاریتمی بین 0.01 rad/sec و 100 rad/sec ایجاد می‌کند. (این بردار w فرکانس‌هایی را، برحسب رادیان بر ثانیه، دربر دارد که پاسخ فرکانسی در آنها حساب می‌شود.) با استفاده از دستور زیر

$$\text{bode}(\text{num}, \text{den}, w)$$

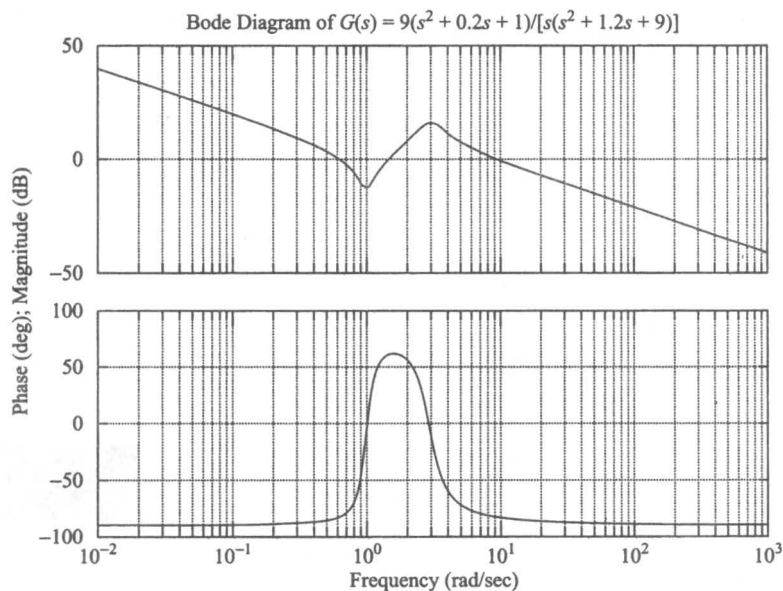
گستره فرکانسی توسط کاربر تعیین می‌شود. ولی گستره دامنه و گستره زاویه فاز به طور خودکار تعیین می‌شود. برنامه ۷-۳ و نمودار حاصل نشان داده شده در شکل ۷-۲۳ را ببینید.

MATLAB Program 7-3

```

num = [9 1.8 9];
den = [1 1.2 9 0];
w = logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')

```



شکل ۲۳-۷

نمودار بوده $G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1) / s(s^2 + 1.2s + 9)$.

نمودار بوده سیستم تعریف شده در فضای حالت. سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

که در آن $\mathbf{x}$ = بردار حالت (بردار $n \times 1$)

$\mathbf{y}$ = بردار خروجی (بردار $m \times 1$)

$\mathbf{u}$ = بردار کنترل (بردار $r \times 1$)

$\mathbf{A}$ = ماتریس حالت (ماتریس $n \times n$)

$\mathbf{B}$ = ماتریس کنترل (ماتریس $r \times n$)

$\mathbf{C}$ = ماتریس خروجی (ماتریس $n \times m$)

$\mathbf{D}$ = ماتریس انتقال مستقیم (ماتریس $r \times m$)

نمودار بوده این سیستم را می توان با دستور زیر به دست آورد

bode(A,B,C,D)

یا از دستورهای بیان شده در ابتدای این بخش استفاده کرد.

دستور $\text{bode}(A,B,C,D)$ یک دسته نمودار بوده، برای هر ورودی یکی، ایجاد می‌کند و گستره فرکانسی هر یک را به طور خودکار تعیین می‌کند. (در مکانهایی که پاسخ تغییر سریعی دارد، تعداد نقاط بیشتری به کار می‌رود.)

دستور $\text{bode}(A,B,C,D,iu)$ که در آن iu ورودی i ام سیستم است، یک دسته نمودار بوده برای تابع تبدیل‌هایی از ورودی iu به تمام خروجی‌ها $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ به دست می‌دهد، گستره فرکانسی هر یک از نمودارها به طور خودکار تعیین می‌شود. (مقدار اسکالر iu شماره ورودی‌یی را که باید برای رسم نمودارهای بوده به کار رود تعیین می‌کند.) اگر بردار کنترل u شامل سه ورودی باشد، به نحوی که

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

iu باید ۱، ۲، یا ۳ باشد.

اگر سیستم تنها یک ورودی داشته باشد، دو دستور زیر یکسان هستند.

$\text{bode}(A,B,C,D)$

$\text{bode}(A,B,C,D,1)$

سیستم زیر را در نظر بگیرید

مثال ۷-۷

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

نمودار بودی سیستم را به دست آورید.

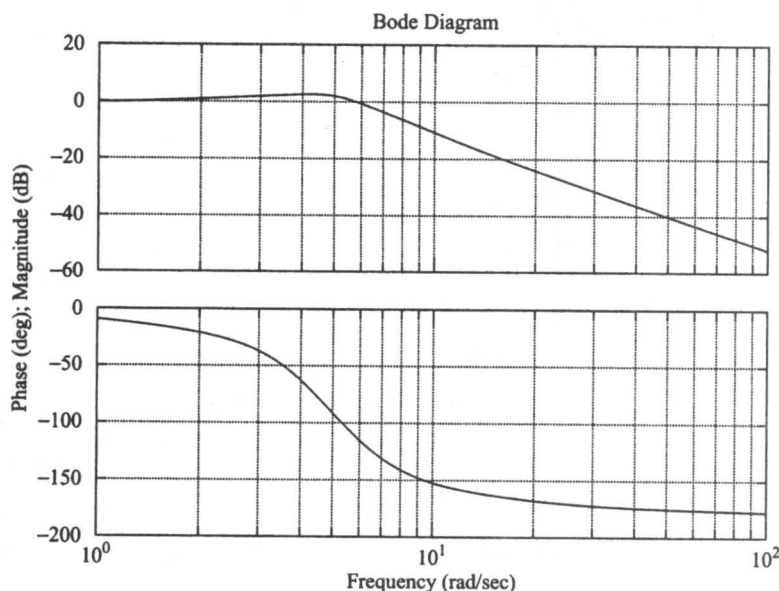
این سیستم یک ورودی u و یک خروجی y دارد. با استفاده از دستور

$\text{bode}(A,B,C,D)$

و دادن برنامه ۷-۴ به کامپیوتر، نمودار بوده شکل ۷-۲۴ را به دست می‌آوریم.

MATLAB Program 7-4

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;25];
C = [1 0];
D = [0];
bode(A,B,C,D)
title('Bode Diagram')
```



شکل ۲۴-۷

نمودار بوده سیستم

مثال ۷-۷.

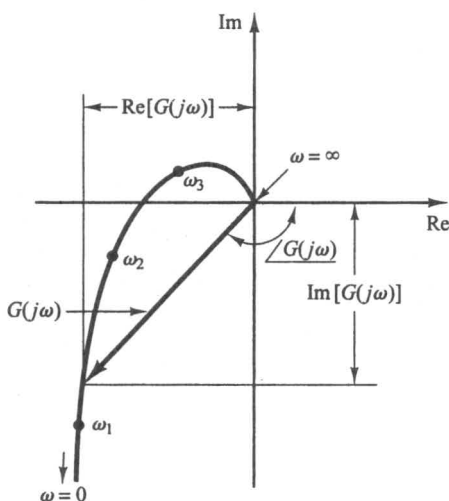
اگر به جای دستور $\text{bode}(A,B,C,D)$ برنامه ۴-۷، دستور زیر را به کار ببریم
 $\text{bode}(A,B,C,D,1)$

نمودار بوده حاصل با نمودار بوده شکل ۲۴-۷ تفاوتی نمی‌کند.

۳-۷ نمودارهای قطبی

نمودار قطبی تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ نمودار دامنه $G(j\omega)$ برحسب زاویه $G(j\omega)$ در مختصات قطبی است، وقتی که ω از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند. پس نمودار قطبی، مکان هندسی بردارهای $|G(j\omega)|$ با تغییر ω از ۰ تا ∞ است. توجه کنید که در نمودار قطبی زاویه مثبت (منفی) در جهت پادساعتگرد (ساعتگرد) و نسبت به محور حقیقی سنجیده می‌شود. نمودار قطبی غالباً نمودار نایکویست نامیده می‌شود. شکل ۲۵-۷ نمونه‌ای از این نمودارها را نشان می‌دهد. هر نقطه این منحنی سر یک بردار به ازای مقدار خاصی از ω است. در نمودار قطبی مقدارگذاری منحنی برحسب فرکانس امری مهم است. تصویر $G(j\omega)$ روی محورهای حقیقی و موهومی مولفه‌های حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ را به دست می‌دهد. برای رسم نمودار قطبی $G(j\omega)$ یا یافتن $|G(j\omega)|$ به ازای مقادیر مختلف ω در گستره فرکانسی مورد نظر، می‌توان از MATLAB هم استفاده کرد.

یک مزیت نمودار قطبی این است که مشخصات پاسخ فرکانسی سیستم در تمام گستره فرکانسی روی یک نمودار نشان داده می‌شود. یک عیب این نمودار این است که اثر هر عامل تشکیل دهنده تابع تبدیل حلقه باز را به وضوح نشان نمی‌دهد.



شکل ۷-۲۵

نمودار قطبی.

عواملهای انتگرالگیری و مشتقگیری $(j\omega)^{\pm 1}$. نمودار قطبی $G(j\omega) = 1/j\omega$ بخش منفی محور موهومی است، زیرا

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

نمودار $G(j\omega) = j\omega$ بخش مثبت محور موهومی است.

عواملهای مرتبه اول $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$. برای تابع تبدیل سینوسی زیر

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

مقادیر $G(j\omega)$ در $\omega = 0$ و $\omega = 1/T$ به ترتیب عبارت‌اند

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ, \quad G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

با میل ω به بی‌نهایت، دامنه $G(j\omega)$ به صفر و زاویه آن به -90° میل می‌کند. نمودار قطبی این تابع تبدیل، با تغییر فرکانس از صفر تا بینهایت، نیم‌دایره‌ای مطابق شکل ۷-۲۶ (الف) است. مرکز نیم‌دایره در 0.5 روی محور حقیقی قرار دارد و شعاع آن 0.5 است.

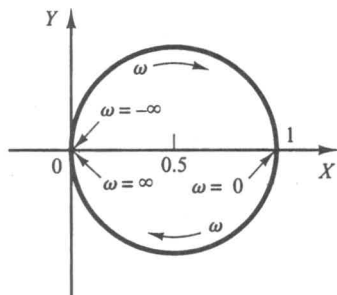
برای اثبات نیم‌دایره بودن نمودار قطبی عامل $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$ فرض کنید

$$G(j\omega) = X + jY$$

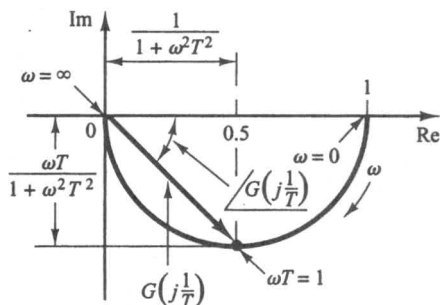
که در آن

$$X = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = G(j\omega) \text{ بخش حقیقی}$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = G(j\omega) \text{ بخش موهومی}$$



(ب)



(الف)

شکل ۳-۷

(الف) نمودار قطبی $1/(1+j\omega T)$; (ب) نمودار $G(j\omega)$ در صفحه $X-Y$.

حال به دست می‌آوریم

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

پس در صفحه $X-Y$ ، $G(j\omega)$ دایره‌ای به مرکز $X = \frac{1}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است؛ این دایره در شکل ۳-۷ (ب) نشان داده شده است، نیم‌دایره پایینی $0 \leq \omega \leq \infty$ و نیم‌دایره بالایی با $-\infty \leq \omega \leq 0$ متناظر است.

نمودار قطبی تابع تبدیل $1+j\omega T$ نیم‌خطی است که مطابق شکل ۳-۷ (ب) در صفحه مختلط از نقطه $(1, 0)$ به موازات محور $j\omega$ رسم می‌شود. نمودار قطبی $1+j\omega T$ کاملاً متفاوت با نمودار قطبی $1/(1+j\omega T)$ دارد.

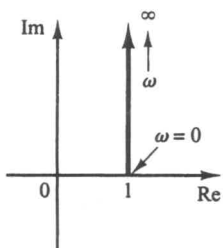
عوامل مرتبه دوم $[1 + \zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$. تابع تبدیل سینوسی زیر را در نظر بگیرید

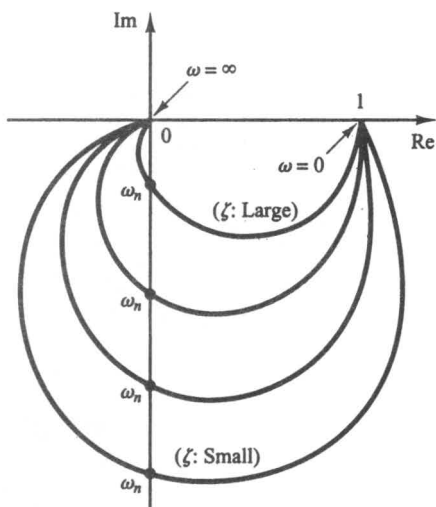
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad \text{به ازای } \zeta > 0$$

بخشهای فرکانسی پایین و فرکانس بالای نمودار قطبی این تابع به ترتیب عبارت‌اند از

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

با تغییر ω از صفر تا بینهایت نمودار قطبی این تابع تبدیل سینوسی از $1 \angle 0^\circ$ شروع می‌شود و به $0 \angle -180^\circ$ می‌رسد. پس بخشهای فرکانس بالای $G(j\omega)$ بر بخش منفی محور حقیقی مماس است.

شکل ۳-۷ نمودار قطبی $1+j\omega T$.



شکل ۷-۲۸

نمودار قطبی

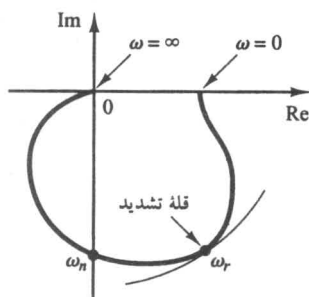
$$1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$$

به ازای $\zeta > 0$.

شکل ۷-۲۸ نمونه‌هایی از نمودارهای قطبی تابع تبدیل در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد. شکل دقیق نمودار قطبی به مقدار ضریب میرایی ζ بستگی دارد، ولی شکل عمومی آن برای حالت‌های زیر میرا ($\zeta > 0$) و فرامیرا ($\zeta > 1$) یکی است.

برای حالت فرومیرا در $\omega = \omega_n$ داریم $G(j\omega_n) = 1/(j^2\zeta)$ ، و زاویه فاز در $\omega = \omega_n$ برابر 90° است. پس فرکانسی که به ازای آن مکان هندسی $G(j\omega)$ محور موهومی را قطع می‌کند، فرکانس طبیعی نامیرا ω_n است. در نمودار قطبی فرکانسی که به ازای آن فاصله نمودار قطبی از مبدأ ماکزیمم می‌شود، فرکانس تشدید ω_r است. مقدار ماکزیمم $G(j\omega)$ نسبت اندازه بردار در فرکانس تشدید ω_r به اندازه بردار در $\omega = 0$ است. در نمودار قطبی شکل ۷-۲۹ فرکانس تشدید ω_r مشخص شده است.

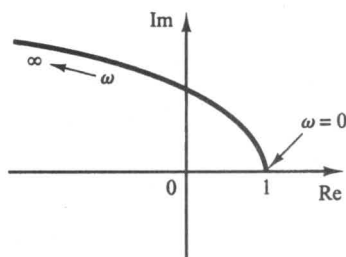
برای حالت فرامیرا ζ از یک بزرگتر است و مکان هندسی $G(j\omega)$ به نیم‌دایره نزدیک می‌شود. صحت این مطلب را می‌توان با توجه به این نکته نشان داد که برای سیستم‌های دارای میرایی شدید ریشه‌های مشخصه سیستم حقیقی‌اند و یکی از آنها بسیار کوچکتر از دیگری است. چون به ازای ζ خیلی بزرگ اثر قطب بزرگتر (بزرگتر از لحاظ قدر مطلق) بر پاسخ بسیار اندک است، سیستم مانند یک سیستم مرتبه اول عمل می‌کند. حال تابع تبدیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید



شکل ۷-۲۹

نمودار قطبی نشان دهنده

قله تشدید و فرکانس تشدید ω_r .



شکل ۳۰-۷

نمودار قطبی

$1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2$
به ازای $\omega > 0$.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left(\frac{2\zeta \omega}{\omega_n} \right) \end{aligned}$$

بخش فرکانس پایین منحنی عبارت است از

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$$

و بخش فرکانس بالای آن عبارت است از

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle -180^\circ$$

چون بخش موهومی $G(j\omega)$ به ازای $\omega > 0$ مثبت است و به طور یکنوا زیاد می‌شود و بخش حقیقی آن به طور یکنوا از مقدار اولیه یک رو به کاهش می‌گذارد، نمودار قطبی $G(j\omega)$ شکل کلی نشان داده شده در شکل ۳۰-۷ را دارد. زاویه فاز بین 0° و 180° است.

تابع تبدیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۸-۷

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

نمودار قطبی این تابع تبدیل را رسم کنید.

تابع تبدیل سینوسی را می‌توان به شکل زیر نوشت

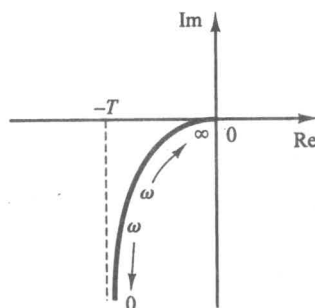
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

بخش فرکانس پایین نمودار قطبی عبارت است از

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty$$

و بخش فرکانس بالای آن

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j0$$



شکل ۷-۳۱

نمودار قطبی $1/[j\omega(1+j\omega T)]$.

شکل کلی نمودار قطبی $G(j\omega)$ به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۳۱ است. نمودار $G(j\omega)$ یک مجانب قائم دارد که از نقطه $(-T, 0)$ می‌گذرد. چون این تابع تبدیل یک انتگرالگیر دارد $(1/s)$ شکل عمومی نمودار قطبی آن با شکل عمومی توابع مرتبه دوم فاقد انتگرالگیر تفاوت اساسی دارد.

نمودار قطبی تابع تبدیل زیر را بیابید:

مثال ۷-۹

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1+j\omega T}$$

پس $G(j\omega)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = \left(e^{-j\omega L} \right) \left(\frac{1}{1+j\omega T} \right)$$

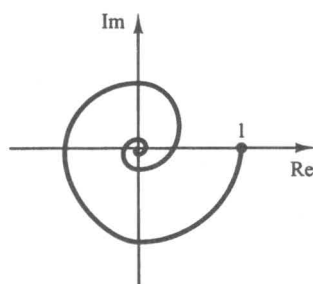
پس دامنه و زاویه فاز به ترتیب عبارت‌اند از

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

و

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1+j\omega T} = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

دامنه به طور یکنوا از یک به سمت صفر کاهش می‌یابد و فاز نیز به طور یکنوا و بدون کران کاهش می‌یابد، پس نمودار قطبی این تابع تبدیل یک مارپیچ است که در شکل ۷-۳۲ نشان داده شده است.



شکل ۷-۳۲

نمودار قطبی $e^{-j\omega L} / (1+j\omega T)$.

شکل کلی نمودارهای قطبی. تابع تبدیلی به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\dots}{(j\omega)^l(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\dots}$$

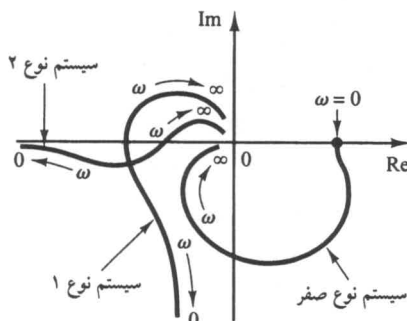
$$= \frac{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots}$$

که در آن $n > m$ یعنی درجه چندجمله‌ای مخرج بزرگتر از درجه چندجمله‌ای صورت است. نمودار قطبی این تابع تبدیل شکلهای کلی زیر را دارد:

۱. $\lambda = 0$ یا سیستم نوع ۰: نقطه شروع نمودار قطبی (که با $\omega = 0$ متناظر است) محدود و روی بخش مثبت محور حقیقی است. مماس بر نمودار قطبی در $\omega = 0$ بر محور حقیقی عمود است. نقطه نهایی، که با $\omega = \infty$ متناظر است، در مبدأ قرار دارد و منحنی در آن بر یکی از محورها مماس است.
۲. $\lambda = 1$ یا سیستم نوع ۱: جمله $j\omega$ موجود در مخرج در تمام فاصله $0 \leq \omega \leq \infty$ ، -90° به زاویه $G(j\omega)$ اضافه می‌کند. در $\omega = 0$ اندازه $G(j\omega)$ بینهایت، و زاویه فاز -90° است. در فرکانسهای پایین نمودار قطبی بر خطی موازی با بخش منفی محور موهومی مجانب است. در $\omega = \infty$ دامنه صفر می‌شود، منحنی به مبدأ می‌رسد و بر یکی از محورها مماس می‌شود.
۳. $\lambda = 2$ یا سیستم نوع ۲: جمله $(j\omega)^2$ موجود در مخرج در تمام فاصله $0 \leq \omega \leq \infty$ ، -180° به زاویه $G(j\omega)$ اضافه می‌کند. در $\omega = 0$ دامنه $G(j\omega)$ بینهایت و زاویه فاز -180° است. در فرکانسهای پایین، نمودار قطبی با خطی موازی با بخش منفی محور حقیقی مجانب است. در $\omega = \infty$ دامنه صفر می‌شود و منحنی بر یکی از محورها مماس است.

شکل کلی بخشهای فرکانس پایین نمودارهای قطبی سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ در شکلهای ۷-۳۳ نشان داده شده است. می‌توان دید که اگر درجه چندجمله‌ای مخرج $G(j\omega)$ از درجه چندجمله‌ای صورت بزرگتر باشد، مکان هندسی $G(j\omega)$ به صورت ساعتگرد، به مبدأ همگرا می‌شود. در $\omega = \infty$ مکان هندسی به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۳۴ بر یکی از محورها مماس می‌شود.

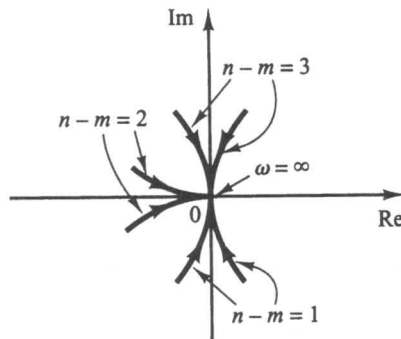
رفتار دینامیکی صورت، یعنی ثابت زمانی‌های صورت تابع تبدیل، می‌تواند هر شکل پیچیده‌ای به نمودار قطبی سیستم بدهد. شکل ۷-۳۵ نمونه‌هایی از نمودارهای قطبی دارای رفتار دینامیکی در صورت تابع تبدیل را



شکل ۷-۳۳

نمودارهای قطبی سیستمهای

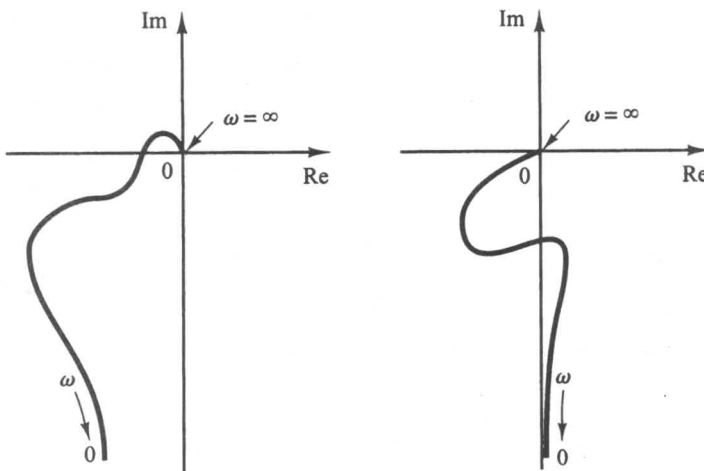
نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲.



$$G(j\omega) = \frac{b_s(j\omega)^m + \dots}{a_s(j\omega)^n + \dots}$$

شکل ۷-۳۴

نمودارهای قطبی در گستره فرکانس بالا.



شکل ۷-۳۵

نمودارهای قطبی توابع تبدیل دارای رفتار دینامیکی در صورت.

نشان می‌دهد. در تحلیل سیستمهای کنترل باید نمودار قطبی $G(j\omega)$ در گستره فرکانسی مورد نظر به طور دقیق مشخص شود.

جدول ۷-۱ نمودارهای قطبی چند تابع تبدیل را نشان می‌دهد.

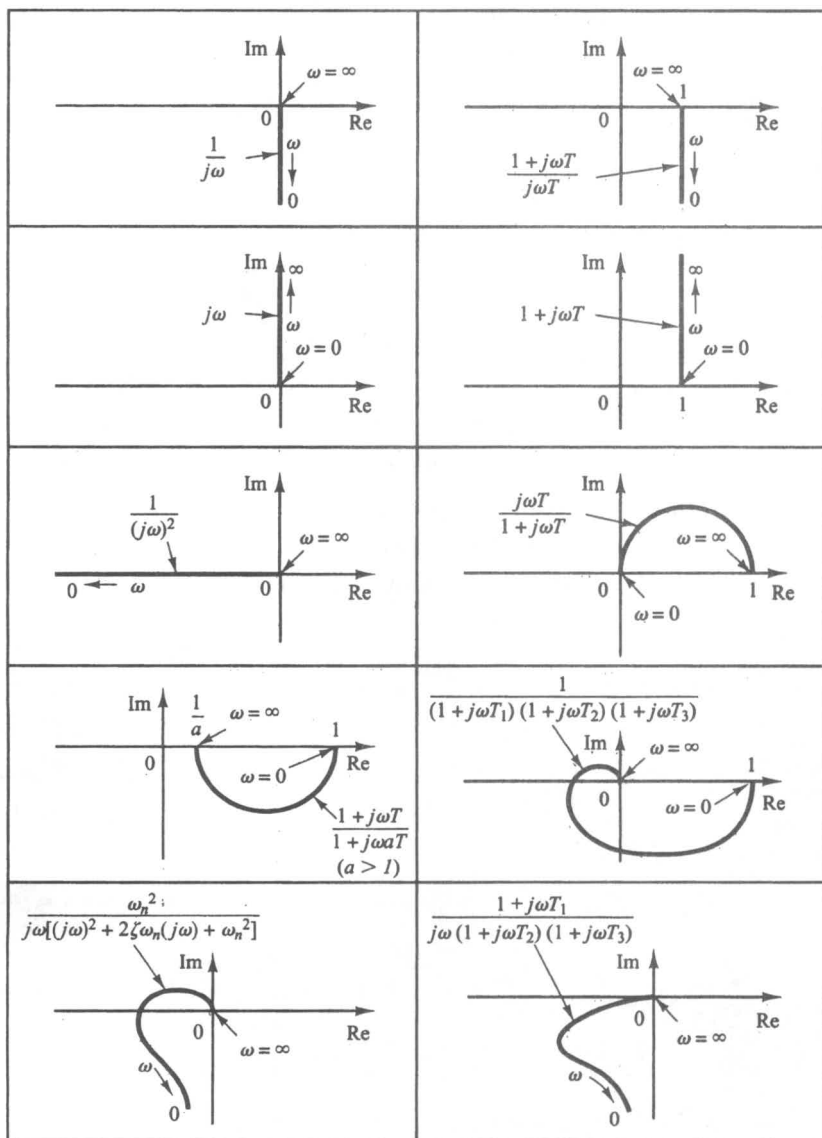
ترسیم نمودارهای نایکویست با MATLAB. نمودارهای نایکویست نیز مانند نمودارهای بوده برای نمایش پاسخ فرکانسی سیستمهای کنترل پایدار، خطی، و مستقل از زمان بسیار به کار می‌رود. نمودارهای نایکویست نمودارهای قطبی هستند، حال آن که نمودارهای بوده نمودارهای قائم‌اند. برای هر منظور خاص یکی از این دو نوع نمودار مناسبتر است، ولی معمولاً هر دو را می‌توان برای هر منظوری به کار برد.

دستور nyquist پاسخ فرکانسی سیستمهای پیوسته خطی مستقل از زمان پایدار را محاسبه می‌کند. وقتی این دستور بدون آرگومان سمت چپ به کار رود، نمودار نایکویست روی صفحه ترسیم می‌شود

دستور

Nyquist(num,den)

جدول ۱-۷ نمودارهای قطبی توابع تبدیل ساده.



نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر را رسم می‌کند

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

که در آن num و den ضرایب چندجمله‌ای را بر حسب توانهای نزولی s دربر دارند. دیگر شکلهای متداول دستور nyquist عبارت است از

```
nyquist(num,den,w)
nyquist(A,B,C,D)
nyquist(A,B,C,D,w)
nyquist(A,B,C,D,iu,w)
nyquist(sys)
```

در دستورهای که بردار فرکانس توسط کاربر تعیین می‌شود، مثل

```
nyquist(num,den,w)
```

از فرکانسهایی که توسط کاربر در بردار w مشخص شده است، استفاده می‌شود. بردار w فرکانس‌هایی را که در آنها پاسخ فرکانسی محاسبه می‌شود، برحسب رادیان بر ثانیه، دربر دارد.

هنگام استفاده با آرگومانهای سمت چپ، به صورت

```
[re,im,w] = nyquist(num,den)
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,iu,w)
[re,im,w] = nyquist(sys)
```

MATLAB پاسخ فرکانسی را در ماتریسهای re و im برمی‌گرداند و نموداری روی صفحه رسم نمی‌شود. ماتریسهای re و im به ترتیب بخشهای حقیقی و موهومی پاسخ فرکانسی سیستم، محاسبه شده در فرکانسهای قید شده در w را دربر دارند. تعداد ستونهای ماتریسهای re و im با تعداد خروجی‌ها و تعداد ردیفهای آنها با تعداد درایه‌های w برابر است.

تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۷-۱۰

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

نمودار نایکویست را با MATLAB رسم کنید.

چون سیستم به صورت یک تابع تبدیل بیان شده است برای رسم نمودار نایکویست می‌توان دستور زیر را به کار برد

```
nyquist(num,den)
```

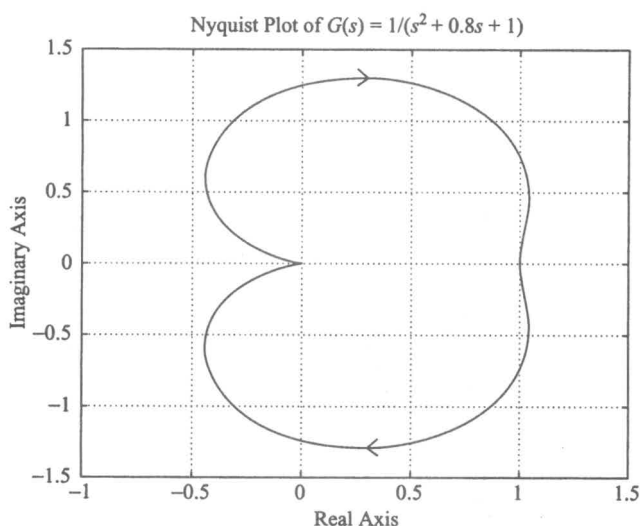
برنامه ۷-۵ نمودار نایکویست شکل ۷-۳۶ را به دست می‌دهد. در این نمودار گستره محور حقیقی و محور موهومی به طور خودکار تعیین شده است.

MATLAB Program 7-5

```

num = [1];
den = [1 0.8 1];
nyquist(num,den)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')

```



شکل ۳۶-۷

نمودار نایکویست

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

اگر بخواهیم نمودار نایکویست را به نحوی رسم کنیم که بتوانیم گستره‌ها را خودمان تعیین کنیم، مثلاً -۲ تا +۲ برای محور حقیقی و -۲ تا +۲ برای محور موهومی؛ دستور زیر را به کامپیوتر می‌دهیم

```

v = [-2 2 -2 2];
axis(v);

```

یا این دستورها را در دستور زیر ادغام می‌کنیم

```

Axis([-2 2 -2 2])

```

برنامه ۶-۷ و شکل ۳۷-۷ را ببینید.

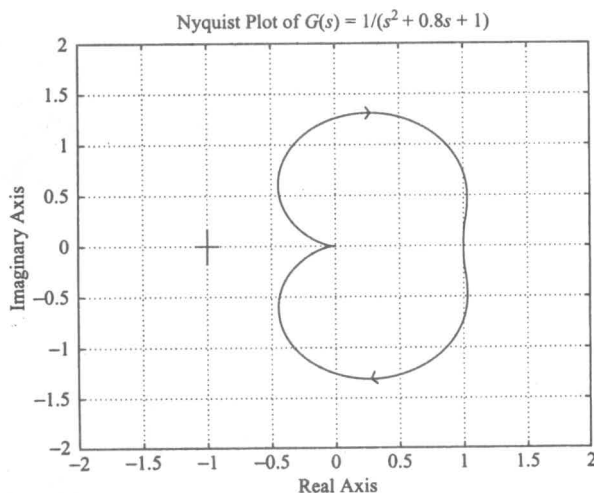
MATLAB Program 7-6

```
% ----- Nyquist plot -----
```

```

num = [1];
den = [1 0.8 1];
nyquist(num,den)
v = [-2 2 -2 2]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')

```



شکل ۷-۳۷

نمودار نایکویست

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

احتیاط. اگر MATLAB در هنگام کار برای ترسیم نمودار نایکویست پیغام "Divide by zero" (تقسیم بر صفر) بدهد، نمودار نایکویست حاصل ممکن است اشتباه باشد. برای مثال تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

دستورهای

```
num = [ 1 ];
den = [ 1 1 0 ];
nyquist(num,den)
```

یک نمودار نایکویست اشتباه رسم می‌کند. نمونه‌ای از این نمودار اشتباه در شکل ۷-۳۸ نشان داده شده است. در صورت بروز چنین اشتباهی می‌توان آن را با استفاده از دستور `axis(v)` تصحیح کرد. برای مثال دادن دستور زیر

```
v=[ -2 2 -5 5 ];axis(v)
```

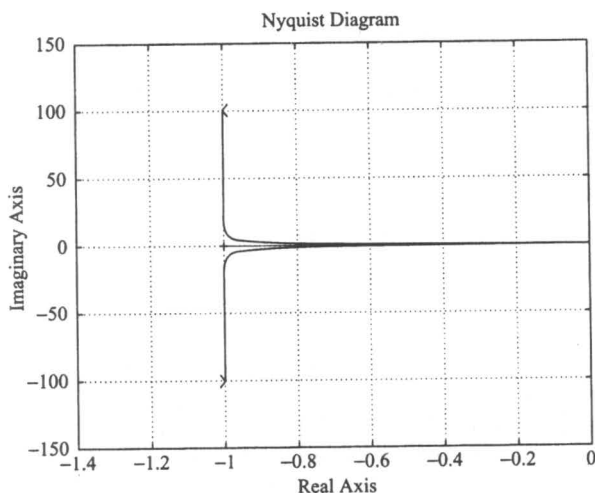
می‌تواند نمودار نایکویست صحیحی به دست دهد. مثال ۷-۱۱ را ببینید.

نمودار نایکویست $G(s)$ زیر را رسم کنید:

مثال ۷-۱۱

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

برنامه ۷-۷ نمودار نایکویست صحیح را به دست می‌دهد، گرچه پیغام "Devide by zero" نیز ممکن است ظاهر شود. نمودار نایکویست حاصل در شکل ۷-۳۹ نشان داده شده است.



شکل ۳۸-۷

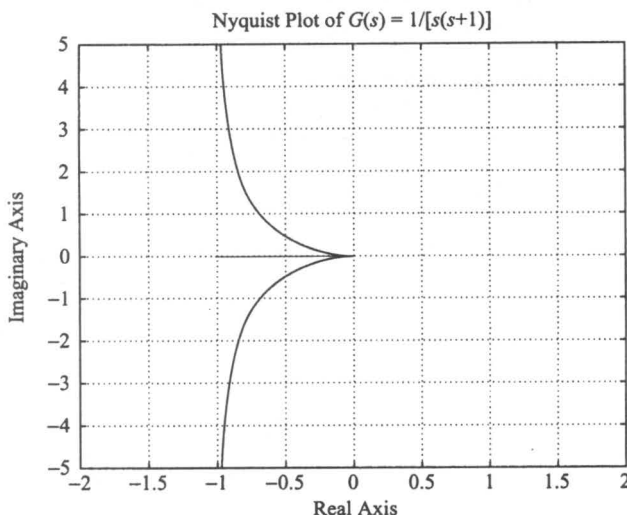
نمودار نایکوئیست اشتباه.

MATLAB Program 7-7

```
% ----- Nyquist plot-----
num = [1];
den = [1 1 0];
nyquist(num,den)
v = [-2 2 -5 5]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/[s(s + 1)]')
```

توجه کنید که نمودار نایکوئیست نشان داده شده در شکل ۳۹-۷، مکان هندسی به ازای $\omega > 0$ و $\omega < 0$ است. اگر بخواهیم نمودار نایکوئیست تنها به ازای $\omega > 0$ رسم شود باید دستور nyquist را به صورت زیر به

کار ببریم



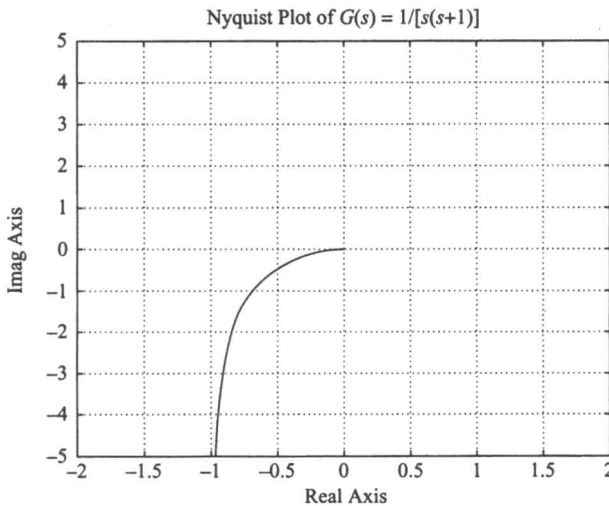
شکل ۳۹-۷

نمودار نایکوئیست

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

MATLAB Program 7-8

```
% ----- Nyquist plot-----
num = [1];
den = [1 1 0];
w = 0.1:0.1:100;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [-2 2 -5 5]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/[s(s + 1)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۷-۴۰

نمودار نایکویست

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

در $\omega > 0$.

```
[re,im,w]=nyquist(num,den,w)
```

برنامه ۷-۸ یک برنامه MATLAB برای این منظور را نشان می‌دهد. نمودار نایکویست حاصل در شکل ۷-۴۰ نشان داده شده است.

ترسیم نمودار نایکویست سیستم تعریف شده در فضای حالت. سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

که در آن $\mathbf{x}$ = بردار حالت (بردار $n \times 1$)

$\mathbf{y}$ = بردار خروجی (بردار $m \times 1$)

$$u = \text{بردار کنترل (بردار } r \times 1)$$

$$A = \text{ماتریس حالت (ماتریس } n \times n)$$

$$B = \text{ماتریس کنترل (ماتریس } r \times n)$$

$$C = \text{ماتریس خروجی (ماتریس } n \times m)$$

$$D = \text{ماتریس انتقال مستقیم (ماتریس } r \times m)$$

برای رسم نمودارهای نایکویست این سیستم دستور زیر را به کار می‌بریم

$$\text{nyquist}(A,B,C,D)$$

این دستور مجموعه‌ای از نمودارهای نایکویست، به ازای هر ترکیب ورودی و خروجی ممکن یک نمودار، به دست می‌دهد. گستره فرکانسی به طور خودکار تعیین می‌شود.

دستور

$$\text{nyquist}(A,B,C,D,iu)$$

تنها یک ورودی را برای رسم نمودارهای نایکویست سیستم انتخاب می‌کند، گستره فرکانسی باز هم به طور خودکار تعیین می‌شود. کمیت اسکالر iu شماره ورودی مورد نظر را به برنامه معرفی می‌کند.

دستور

$$\text{nyquist}(A,B,C,D,iu,w)$$

بردار فرکانس w تعریف شده توسط کاربر را نیز به برنامه می‌دهد. بردار w فرکانس‌هایی را که پاسخ فرکانسی در آنها باید حساب شود، برحسب رادیان بر ثانیه در بر دارد.

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

مثال ۷-۱۲

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

نمودار نایکویست سیستم را رسم کنید.

این سیستم یک ورودی u و یک خروجی y دارد. نمودار نایکویست را می‌توان با هر یک از دستورهای زیر به دست آورد

$$\text{nyquist}(A,B,C,D)$$

$$\text{nyquist}(A,B,C,D,1)$$

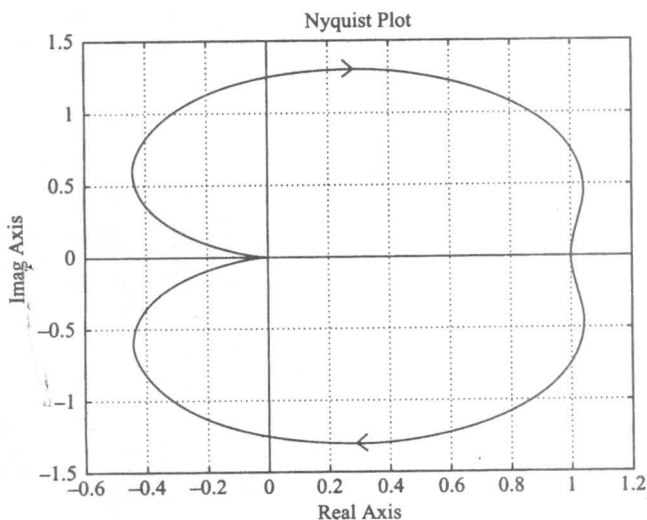
برنامه ۷-۹ نمودار نایکویست سیستم را به دست می‌دهد. (توجه کنید که هر یک از دستورهای بالا به کار رود، نتیجه یکسانی دارد) شکل ۷-۴۱ نمودار نایکویست حاصل از برنامه ۷-۹ را نشان می‌دهد.

MATLAB Program 7-9

```

A = [0 1;-25 -4];
B = [0;25];
C = [1 0];
D = [0];
nyquist(A,B,C,D)
grid
title('Nyquist Plot')

```



شکل ۴۱-۷

نمودار نایکوئیست

سیستم مثال ۷-۱۲.

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

مثال ۷-۱۳

این سیستم دو ورودی و دو خروجی دارد. چهار رابطه خروجی - ورودی سینوسی این سیستم عبارتند از $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ ، $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ ، $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$. نمودارهای نایکوئیست سیستم را رسم کنید. (هنگام در نظر گرفتن ورودی u_1 ، ورودی u_2 صفر در نظر گرفته می شود و برعکس).

دستور زیر چهار نمودار نایکوئیست را به دست می دهد

nyquist(A,B,C,D)

برنامه ۷-۱۰ نمودار نایکوئیست شکل ۴۲-۷ را به دست داده است.

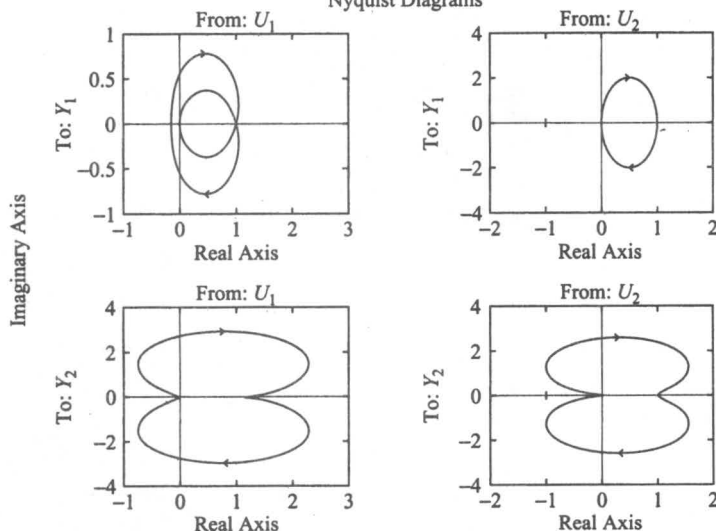
MATLAB Program 7-10

```

A = [-1 -1; 6.5 0];
B = [1 1; 1 0];
C = [1 0; 0 1];
D = [0 0; 0 0];
nyquist(A,B,C,D)

```

Nyquist Diagrams



شکل ۴۲-۷

نمودارهای نایکوئیست
سیستم مثال ۷-۱۳.

۴-۷ نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز

راه دیگر نمایش ترسیمی مشخصات پاسخ فرکانسی استفاده از نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز است. در این نمودار لگاریتم دامنه برحسب دسیبل، برحسب زاویه فاز یا حاشیه فاز، در گستره فرکانسی مورد نظر رسم می‌شود. [حاشیه فاز تفاضل بین زاویه فاز واقعی و -180° است؛ یعنی $\phi + 180^\circ = \phi - (-180^\circ)$ منحنی حاصل برحسب ω مقدارگذاری می‌شود. این گونه نمودار لگاریتم دامنه برحسب زاویه فاز را معمولاً نمودار نیکولس می‌نامند.

در نمودار بوده مشخصات پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ توسط دو منحنی مختلف روی کاغذ نیم‌لگاریتمی نشان داده می‌شود؛ این منحنی‌ها منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز هستند. در نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز این دو منحنی در هم ادغام می‌شوند. نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز را می‌توان با خواندن دامنه و فاز از نمودار بوده به راحتی رسم کرد. توجه کنید که در نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز تغییر بهره ثابت $G(j\omega)$ تنها منحنی را بالا (بهره زیادتر) یا پایین (بهره کمتر) می‌برد، ولی شکل منحنی تغییر نمی‌کند.

مزیت نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز این است که می‌توان پایداری نسبی سیستم حلقه بسته را به سرعت تعیین و مشخصات جبران کننده لازم را به سهولت به دست آورد.

منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز توابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ و $1/G(j\omega)$ نسبت به مبدأ تقارن دارند، زیرا

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \text{dB} = - \left| G(j\omega) \right| \text{dB}$$

$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = - \angle G(j\omega)$$

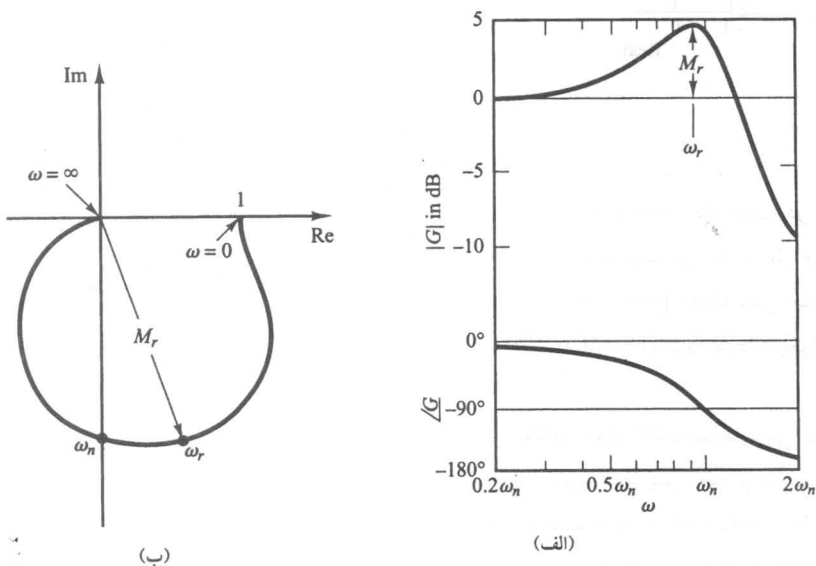
و

تابع تبدیل فرکانسی زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

در شکل ۷-۴۳ سه نمایش پاسخ فرکانسی این تابع تبدیل مقایسه شده است. در منحنی لگاریتم دامنه برحسب فاز، فاصله قائم بین نقاط $\omega = 0$ و $\omega = \omega_r$ که در آن فرکانس تشدید است، مقدار اوج $G(j\omega)$ برحسب دسیبل را به دست می‌دهد.

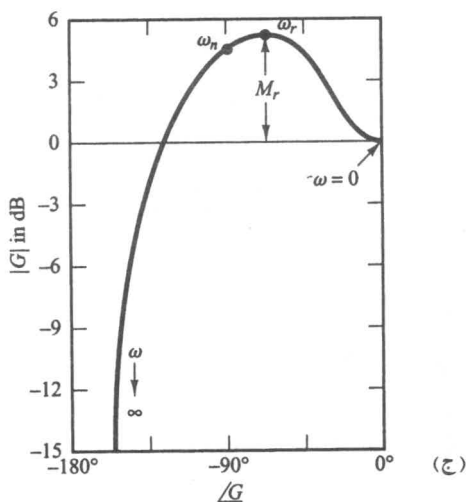
چون مشخصات لگاریتم دامنه و زاویه فاز توابع تبدیل پایه در بخشهای ۷-۲ و ۷-۳ به تفصیل مورد بحث قرار گرفت، در اینجا کافی است چند مثال از نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز ارائه دهیم. جدول ۷-۲ این مثالها را نشان می‌دهد. (البته در بخش ۷-۶ در مورد نمودار نیکولس بیشتر صحبت خواهیم کرد.)



شکل ۷-۴۳

سه نمایش پاسخ فرکانسی $\frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$ به ازای $\zeta > 0$:

(الف) نمودار بوده؛ (ب) نمودار قطبی.



شکل ۴۳-۷

(ج) نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز.

۵-۷ معیار پایداری نایکویست

معیار پایداری نایکویست سیستم حلقه بسته را برحسب پاسخ فرکانسی حلقه باز و قطبهای حلقه باز تعیین می‌کند.

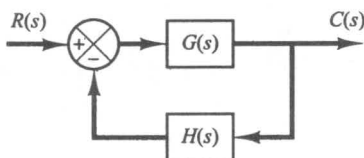
در این بخش معیار پایداری نایکویست و مطالب ریاضی مربوط و پشتیبان آن مورد بحث قرار می‌گیرد. سیستم حلقه بسته شکل ۴۴-۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

برای پایداری تمام ریشه‌های معادله مشخصه زیر باید در نیمه چپ صفحه s باشند

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

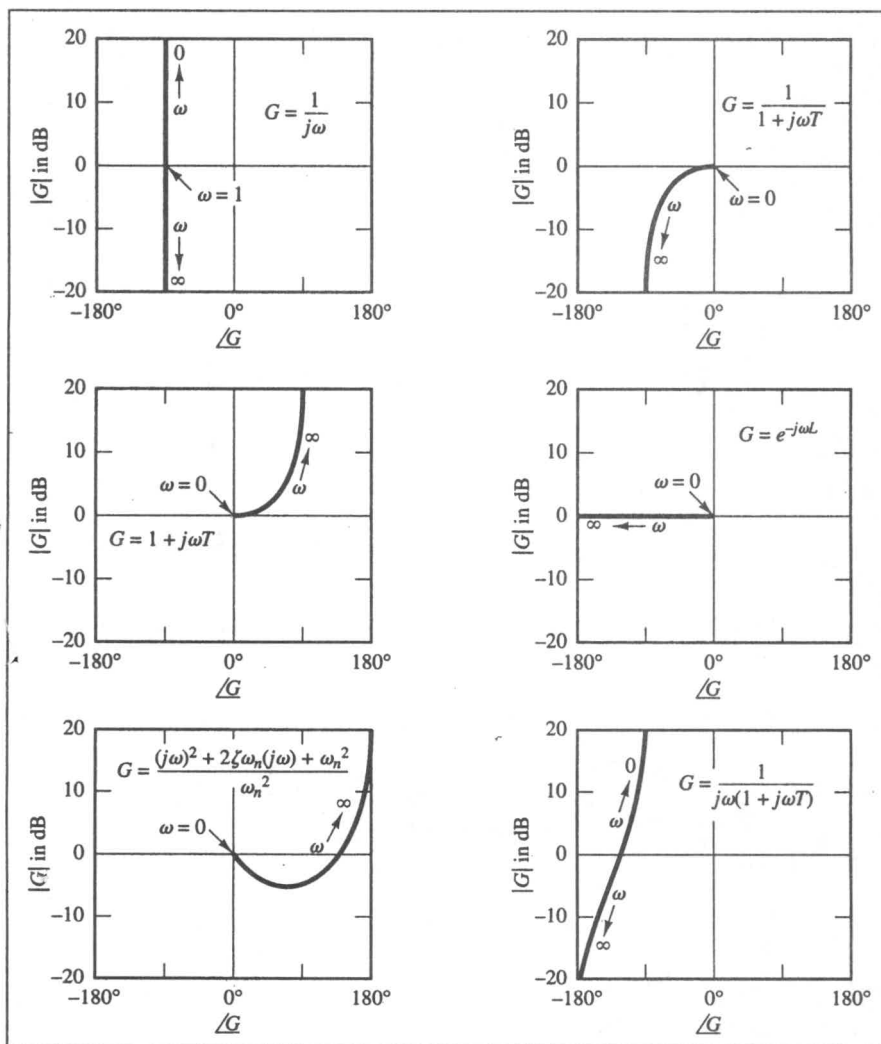
[قبلاً تاکنون داده‌ایم که حتی اگر صفرها و قطبهای تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s باشند، در صورت وجود تمام قطبهای تابع تبدیل حلقه بسته (یعنی ریشه‌های معادله مشخصه) در نیمه چپ صفحه s ، سیستم پایدار است.] معیار پایداری نایکویست رابطه پاسخ فرکانسی حلقه باز $G(j\omega)H(j\omega)$ با تعداد صفرها و قطبهای موجود در نیمه راست صفحه s معادله $1 + G(s)H(s)$ را مشخص می‌کند. این معیار، که توسط نایکویست ابداع شده، در مهندسی کنترل بسیار به کار می‌رود، زیرا به کمک آن پایداری مطلق سیستم حلقه بسته را می‌توان به روش ترسیمی و با توجه به منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز تعیین کرد، بدون این



شکل ۴۴-۷

سیستم حلقه بسته.

جدول ۷-۲ لگاریتم دامنه برحسب فاز توابع تبدیل ساده.



که تعیین قطبهای حلقه بسته واقعاً لازم باشد. برای تحلیل پایداری می‌توان هم از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز به دست آمده از روش تحلیلی و هم از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز به دست آمده از روش تجربی استفاده کرد. این امر بسیار کارساز است، زیرا در طراحی یک سیستم کنترل غالباً عبارتهای ریاضی بعضی اجزاء معلوم نیست، بلکه تنها مشخصات فرکانسی آنها در دسترس است.

معیار پایداری نایکویست براساس یکی از قضایای نظریه متغیرهای مختلط استوار است. برای درک این معیار ابتدا نداشت مسیرها در صفحه مختلط را مورد بحث قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ را می‌توان به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s نشان داد. برای یک سیستم قابل ساخت درجه چندجمله‌ای مخرج باید بزرگتر یا مساوی درجه چندجمله‌ای صورت باشد. یعنی برای سیستمهای واقعی قابل ساخت حد $G(s)H(s)$ هنگام میل s به بینهایت برابر صفر است.

مطالعات اولیه. معادله مشخصه سیستم شکل ۷-۴ عبارت است از

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

نشان خواهیم داد که برای هر مسیر پیوسته بسته‌ای در صفحه s که از هیچ نقطهٔ تکیه‌ای نگذرد، منحنی بسته‌ای در صفحه $F(s)$ وجود دارد. این که این منحنی بسته به چه تعداد و در چه جهتی مبدأ صفحه $F(s)$ را دور می‌زند در ادامه بحث نقش مهمی دارد، زیرا بعداً نشان خواهیم داد که تعداد و جهت دورها با پایداری سیستم ارتباط دارد.

برای مثال تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s-1}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$\begin{aligned} F(s) &= 1 + G(s)H(s) \\ &= 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1} = 0 \end{aligned} \quad (15-7)$$

تابع $F(s)$ در تمام نقاط صفحه s ، بجز نقاط تکیه $F(s)$ تحلیلی[†] است. به ازای هر نقطه‌ای از صفحه s که $F(s)$ در آن تحلیلی است، نقطه متناظری در صفحه $F(s)$ وجود دارد. برای مثال اگر $s = 2 + j1$ ، آنگاه $F(s)$ عبارت است از

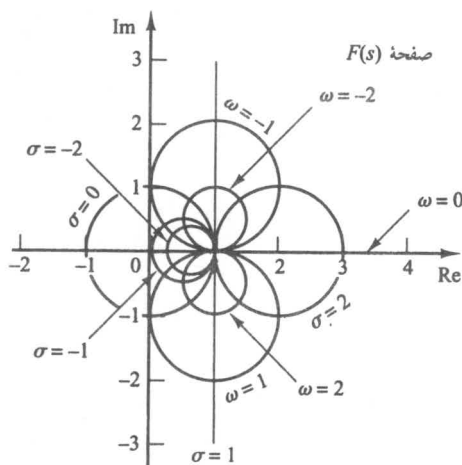
$$F(2 + j1) = \frac{2 + j1 + 1}{2 + j1 - 1} = 2 - j1$$

پس نقطه $2 + j1$ از صفحه s با نقطه $2 - j1$ صفحه $F(s)$ متناظر است.

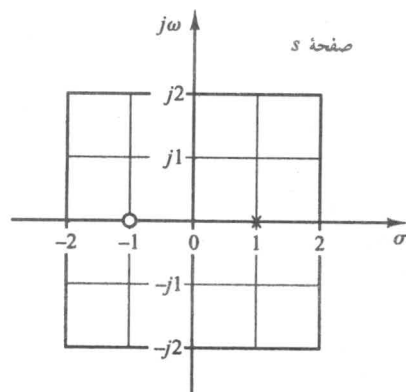
پس همانطور که قبلاً گفته شد برای هر منحنی بسته صفحه s که از هیچ نقطهٔ تکیه‌ای نمی‌گذرد، منحنی بسته متناظری در صفحه $F(s)$ وجود دارد.

به ازای معادله مشخصه $F(s)$ معادله (۷-۱۵)، نگاشت هم‌دیس خطوط $\omega = 0, \pm 1, \pm 2$ و خطوط $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2$ [شکل ۷-۴۵ (الف)] دایره‌های شکل ۷-۴۵ (ب) را در صفحه $F(s)$ به دست می‌دهد. فرض کنید که نقطه نمونه s مسیری در صفحه s را در جهت ساعتگرد طی می‌کند. اگر مسیر صفحه s قطب $F(s)$ را دور بزند، مسیر نگاشته شده به صفحه $F(s)$ مبدأ صفحه $F(s)$ را در جهت پاد ساعتگرد دور می‌زند. [شکل ۷-۴۶ (الف) را ببینید.] اگر مسیر صفحه s صفر $F(s)$ را دور بزند، مسیر نگاشته شده به صفحه $F(s)$ مبدأ صفحه $F(s)$ را در جهت ساعتگرد دور می‌زند. [شکل ۷-۴۶ (ب) را ببینید.] اگر مسیر صفحه s هم صفر و هم

[†] تابع مختلط $F(s)$ در یک ناحیه به شرطی تحلیلی است که در آن ناحیه خود $F(s)$ و تمام مشتقهای آن وجود داشته باشد.



(ب)



(الف)

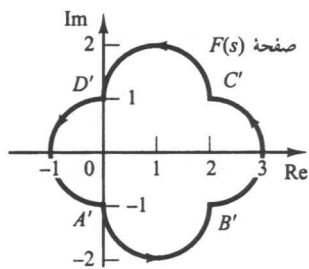
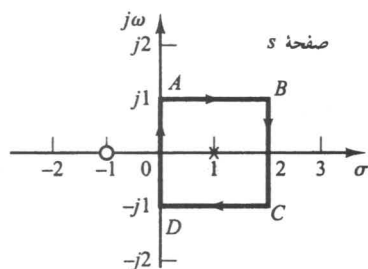
شکل ۷-۴۵ نگاشت همدیس از صفحه s به صفحه $F(s)$ به ازای $F(s) = (s+1)/(s-1)$.

قطب $F(s)$ را دور بزنند، مسیر نگاشته شده به صفحه $F(s)$ مبدأ صفحه $F(s)$ را اصلاً دور نمی‌زند. [شکلهای ۷-۴۶ (ج) و (د) را ببینید.]

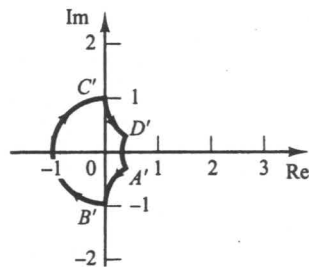
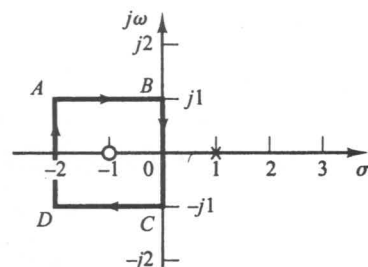
با توجه به تحلیل بالا می‌توان گفت که جهت دور زدن مبدأ صفحه $F(s)$ توسط میسر نگاشته شده به صفحه $F(s)$ ، به این بستگی دارد که مسیر صفحه s قطب یا صفری را دور بزند یا نه. توجه کنید که محل قطب و صفر در صفحه s چه نیم‌صفحه راست و چه چپ، در این امر تأثیری ندارد؛ تنها دور زده شدن صفرها و قطبها مهم است. اگر مسیر صفحه s تعداد یکسانی قطب و صفر را دور بزند، مسیر بسته متناظر در صفحه $F(s)$ مبدأ صفحه $F(s)$ را دور نمی‌زند. مباحث بالا توضیح ترسیمی قضیه نگاشت است، که اساس معیار پایداری نایکویست را تشکیل می‌دهد.

قضیه نگاشت. $F(s)$ را نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s فرض کنید. P تعداد قطبها و Z تعداد صفرهای $F(s)$ در مسیر بسته‌ای واقع در صفحه s است. در شمارش صفرها و قطبها چندگانه بودن یک قطب یا صفر نیز منظور شده است. این مسیر در صفحه s به مسیر بسته‌ای در صفحه $F(s)$ نگاشته می‌شود. اگر نقطه‌ای روی مسیر بسته $F(s)$ در جهت ساعتگرد یک دور کامل حرکت کند، مبدأ را به تعداد $N = Z - P$ دور می‌زند. (توجه کنید که با این روش تعداد قطبها و صفرها تعیین نمی‌شود. بلکه تنها تفاضلشان به دست می‌آید.)

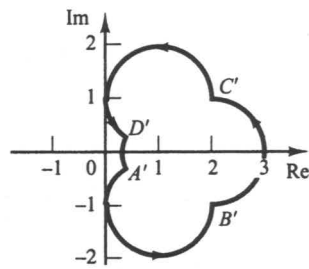
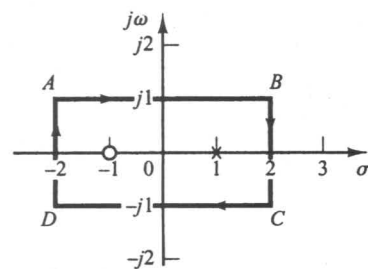
در اینجا به اثبات این قضیه نمی‌پردازیم، بلکه آن را به مسئله الف-۷-۶ واگذار می‌کنیم. توجه کنید که مثبت بودن N به معنی این است که تعداد صفرهای $F(s)$ از تعداد قطبهای آن بیشتر است و منفی بودن آن به معنی بیشتر بودن تعداد قطبهاست. در کاربردهای کنترلی عدد P برای $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ را به سادگی و با توجه به تابع $G(s)H(s)$ می‌توان تعیین کرد. بنابراین اگر N با توجه به نمودار $F(s)$ تعیین شود، تعداد صفرهای داخل مسیر بسته صفحه s را می‌توان به سادگی تعیین کرد. توجه کنید که شکل دقیق مسیر در صفحه s و مکان هندسی در صفحه $F(s)$ مهم نیست، بلکه تنها تعداد دورهایی که حول مبدأ زده می‌شود مهم است، زیرا این تعداد تنها به تعداد صفرها و قطبهای بستگی دارد که داخل مسیر صفحه s است.



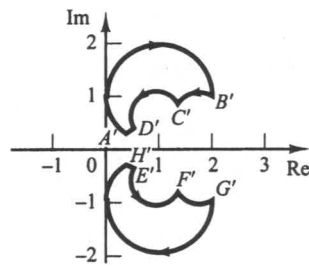
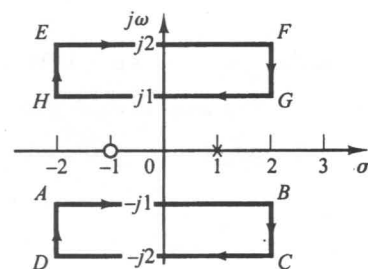
(الف)



(ب)



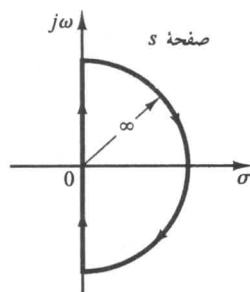
(ج)



(د)

شکل ۴۶-۷ مسیره‌های بسته در صفحه s و مسیره‌های متناظر در صفحه $F(s)$ به ازای $F(s) = (s+1)/(s-1)$.

کاربرد قضیه نگاشت در تحلیل پایداری سیستم‌های حلقه بسته. برای تحلیل پایداری سیستم‌های کنترل خطی، مسیر بسته صفحه s را به نحوی برمی‌گزینیم که تمام نیمه راست صفحه s را دربر داشته باشد. این مسیر از محور $j\omega$ ، از $\omega = -\infty$ تا $\omega = +\infty$ و نیمدایره‌ای به شعاع بینهایت در نیم صفحه راست تشکیل می‌شود. این مسیر را مسیر نایکویست می‌نامند. (جهت مسیر ساعتگرد است.) مسیر نایکویست تمام نیم صفحه راست



شکل ۷-۴۷

مسیر بسته در صفحه s .

را دربر داشته، تمام صفرها و قطبهای دارای بخش حقیقی مثبت تابع $1 + G(s)H(s)$ در داخل آن قرار دارند. [اگر $1 + G(s)H(s)$ در نیم صفحه راست صفر نداشته باشد، سیستم حلقه بسته در نیم صفحه راست قطب ندارد و سیستم پایدار است.] مسیر نایکویست نباید از هیچ صفر یا قطبی از $1 + G(s)H(s)$ بگذرد. اگر $G(s)H(s)$ در مبدأ صفحه s صفر یا قطب داشته باشد، نگاشت نقطه $s=0$ نامعین می شود. در چنین مواردی باید مسیر را به نحوی اصلاح کرد که از کنار مبدأ بگذرد. (بعداً راجع به این اصلاح به تفصیل صحبت می کنیم).

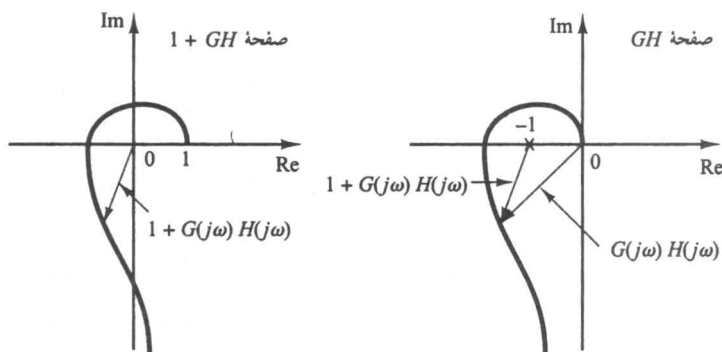
با اعمال قضیه نگاشت به حالت خاصی که $F(s)$ برابر $1 + G(s)H(s)$ است می توان گزاره زیر را بیان کرد: اگر مسیر بسته، به صورت شکل ۷-۴۷ تمام نیم صفحه راست را دربر داشته باشد، تعداد صفرهای تابع تبدیل $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ برابر است با مجموع تعداد قطبهای واقع در نیمه راست صفحه s تابع $1 + G(s)H(s)$ و تعداد باری که منحنی متناظر در صفحه $F(s)$ مبدأ این صفحه را در جهت ساعتگرد دور می زند.

چون فرض کرده ایم که

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + G(s)H(s)] = \text{ثابت}$$

تابع $1 + G(s)H(s)$ در هنگامی که نیمدایره به شعاع بینهایت را می پیماید، ثابت می ماند. بنابراین تعداد دورهای زده شده حول مبدأ توسط مکان هندسی $1 + G(s)H(s)$ را تنها می توان با در نظر گرفتن بخشی از مسیر بسته صفحه s ، یعنی محور $j\omega$ تعیین کرد. تنها هنگامی مسیر متناظر در صفحه $1 + G(s)H(s)$ می تواند مبدأ این صفحه را دور بزند که s در امتداد محور $j\omega$ تا $j\omega$ تغییر می کند، به شرطی که روی محور $j\omega$ هیچ قطب یا صفری وجود نداشته باشد.

بخش متناظر با محور $j\omega$ تابع $1 + G(s)H(s)$ چیزی جز $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ نیست. چون $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ جمع برداری بردار ۱ و بردار $G(j\omega)H(j\omega)$ است، مطابق شکل ۷-۴۸ برداری که از نقطه $j\omega$ به انتهای بردار $G(j\omega)H(j\omega)$ رسم می شود برابر است. تعداد باری که $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ مبدأ را دور می زند با تعداد باری که $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $j\omega$ را دور می زند، برابر است. پس پایداری یک سیستم حلقه بسته را می توان با یافتن تعداد باری که مکان هندسی تابع تبدیل حلقه $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $j\omega$ را دور می زند تعیین کرد. برای این که ببینیم منحنی $G(j\omega)H(j\omega)$ چند بار نقطه $j\omega$ را دور می زند، می توانیم برداری از نقطه $j\omega$ به مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ رسم کنیم،



شکل ۴۸-۷

منحنی‌های $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ در صفحه $1 + GH$ و صفحه GH .

با تغییر ω از $-\infty$ ، رسیدن آن به 0 و رفتن آن به $+\infty$ نوک این بردار تغییر می‌کند، تعداد چرخشهای ساعتگرد این بردار تعداد دورهای خواسته شده را به دست می‌دهد.

رسم $G(j\omega)H(j\omega)$ برای مسیر نایکویست کار سراسری است. نگاشت بخش منفی محور $j\omega$ تصویر آینه‌ای نگاشت بخش مثبت محور $j\omega$ ، نسبت به محور حقیقی است. یعنی $G(j\omega)H(j\omega)$ و نمودار $G(-j\omega)H(-j\omega)$ نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند. نیم‌دایره به شعاع بینهایت یا به مبدأ صفحه GH یا به نقطه‌ای واقع بر محور حقیقی این صفحه نگاشته می‌شود.

در بحث بالا $G(s)H(s)$ را نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s فرض کردیم. بنابراین تأخیر انتقالی e^{-Ts} در بحث ما راه نداشت. البته متذکر می‌شویم که در مورد سیستمهای دارای تأخیر انتقالی نیز همین مطالب صادق است، ولی به اثبات آن نمی‌پردازیم. پایداری سیستم دارای تأخیر انتقالی را می‌توان با توجه به پاسخ فرکانسی حلقه باز و بررسی تعداد دورهای پیموده شده حول نقطه $0 + j-1$ ، درست همانند سیستمی که تابع تبدیل حلقه بازش نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s است، تعیین کرد.

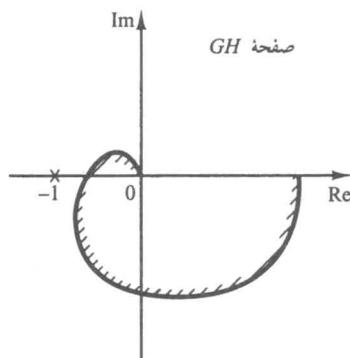
معیار پایداری نایکویست. تحلیل بالا، مبتنی بر تعداد دورهایی که مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ حول نقطه $0 + j-1$ می‌زند، در معیار پایداری نایکویست خلاصه می‌شود.

معیار پایداری نایکویست [برای حالت خاصی که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ نه صفر دارد و نه قطب]: در سیستم شکل ۴۴-۷ اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s ، k قطب داشته باشد و ثابت $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = 0$ ، برای پایداری باید مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ ، با تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$ ، نقطه $0 + j-1$ را k بار در جهت پاد ساعتگرد دور بزند.

ملاحظات در مورد معیار پایداری نایکویست

۱. این معیار را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$Z = N + P$$



شکل ۷-۴۹

ناحیه محصور در نمودار نایکویست.

که در آن $Z = \text{تعداد صفرهای } 1 + G(s)H(s) \text{ در نیمه راست صفحه } s$

$N = \text{تعداد دور حول نقطه } -1 + j0 \text{ در جهت ساعتگرد}$

$P = \text{تعداد قطبهای } G(s)H(s) \text{ در نیمه راست صفحه } s$

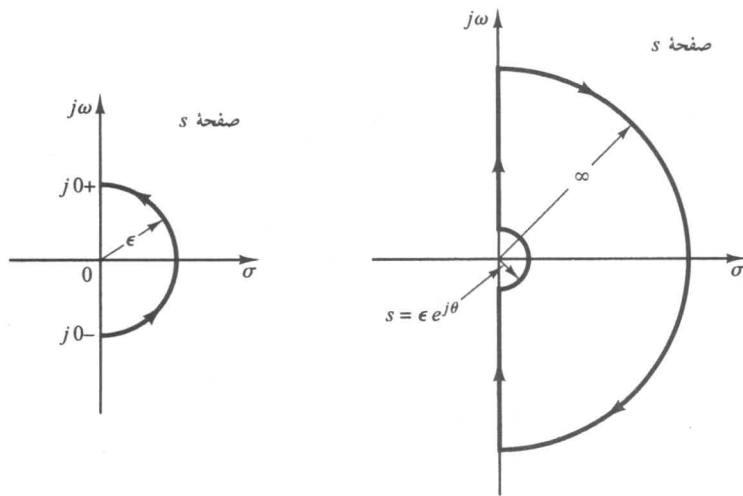
اگر P صفر نباشد، برای داشتن سیستمی پایدار باید داشته باشیم $Z=0$ یا $N=-P$ ؛ یعنی نقطه $-1 + j0$ باید P بار در جهت پاد ساعتگرد دور زده شود.

اگر $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب نداشته باشد، $Z=N$ ؛ یعنی برای پایداری مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ نباید نقطه $-1 + j0$ را دور بزند. در این حالت لازم نیست مکان هندسی به ازای تمام محور $j\omega$ در نظر گرفته شود، بلکه تنها بخش فرکانسهای مثبت کافی است. پایداری چنین سیستمی از اینجا تعیین می‌شود که آیا $-1 + j0$ داخل نمودار نایکویست $G(j\omega)H(j\omega)$ قرار می‌گیرد یا نه. شکل ۷-۴۹ ناحیه‌ای را که نمودار نایکویست دربر می‌گیرد نشان می‌دهد. برای پایداری نقطه $-1 + j0$ باید خارج ناحیه هاشورزده قرار بگیرد.

۲. هنگام بررسی پایداری سیستمهای چندحلقه‌ای باید دقت کنیم، زیرا این سیستمها ممکن است در نیمه راست صفحه s قطب داشته باشند. (توجه کنید که ممکن است حلقه‌های داخلی ناپایدار باشند، ولی کل سیستم حلقه بسته با طراحی مناسب پایدار شده باشد). بررسی ساده دوره‌های حول $-1 + j0$ توسط نمودارهای $G(j\omega)H(j\omega)$ برای تشخیص پایداری یا ناپایداری سیستمهای چندحلقه‌ای کافی نیست. البته برای این موارد می‌توان با اعمال معیار پایداری روث به مخرج $G(s)H(s)$ تعیین کرد که $1 + G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب دارد یا نه.

اگر $G(s)H(s)$ شامل توابع عالی، مانند تأخیر انتقالی e^{-Ts} باشد، می‌توان قبل از اعمال معیار پایداری روث این توابع را با یک بسط سری تقریب زد.

۳. اگر مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ از نقطه $-1 + j0$ بگذرد، صفرهای معادله مشخصه، یا قطبهای حلقه بسته، روی محور $j\omega$ قرار دارند. چنین وضعیتی برای سیستمهای کنترل عملی مطلوب نیست. در یک سیستم حلقه بسته دارای طراحی خوب، هیچکدام از ریشه‌های معادله مشخصه نباید روی محور $j\omega$ باشد.



شکل ۵-۷

مسیرهای بسته در صفحه s
برای پرهیز از صفرها و
قطبهای واقع در مبدأ.

حالت خاصی که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ صفر و / یا قطب دارد. در بحث بالا فرض کردیم تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در مبدأ نه صفر دارد و نه قطب. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ صفر و - یا قطب دارد.

چون مسیر نایکویست نباید از قطبها و صفرهای $G(s)H(s)$ بگذرد، در صورتی که $G(s)H(s)$ در مبدأ (یا نقطه‌ای غیر از مبدأ ولی روی محور $j\omega$) صفر و / یا قطب داشته باشد، مسیر صفحه s باید اصلاح شود. روش معمول اصلاح مسیر در نزدیک مبدأ این است که نیمدایره‌ای به شعاع بینهایت کوچک ϵ به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۷ به کار برده شود. [توجه کنید که این نیمدایره می‌تواند در نیمه چپ یا نیمه راست صفحه s قرار داشته باشد؛ در اینجا ما نیمدایره را در نیمه راست صفحه s فرض می‌کنیم]. نقطه s روی محور $j\omega$ از $j\omega$ تا $j\omega^-$ حرکت می‌کند، در فاصله $s = j\omega^-$ تا $s = j\omega^+$ نقطه روی نیمدایره به شعاع کوچک ϵ حرکت می‌کند، سرانجام این نقطه بخش مثبت محور $j\omega$ ، از $j\omega^+$ تا $j\omega$ را می‌پیماید. مسیر در $s = j\omega$ نیمدایره به شعاع بینهایت را پیموده به نقطه شروع می‌رسد. مسیر بسته اصلاح شده سطح بسیار کوچکی از نیمصفحه راست را دربر ندارد، و این سطح حذف شده با میل ϵ به صفر، به صفر می‌رسد. بنابراین اگر قطب یا صفری در نیمه راست صفحه s وجود داشته باشد، داخل مسیر قرار می‌گیرد.

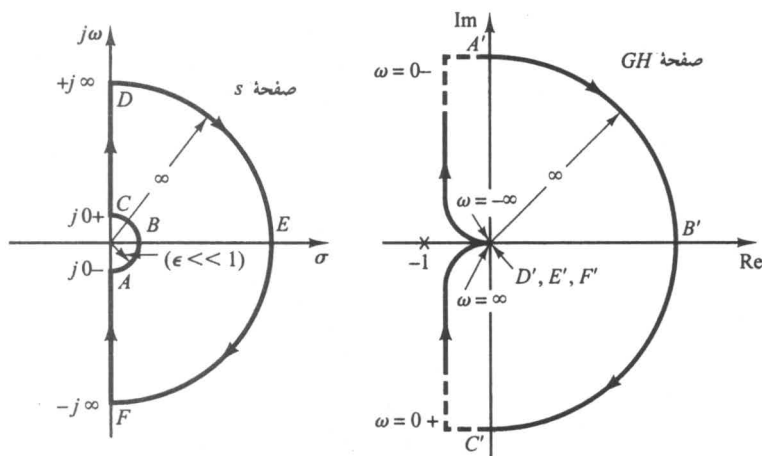
برای مثال سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

نقاط متناظر با $s = j\omega^+$ و $s = j\omega^-$ در مکان هندسی $G(s)H(s)$ به ترتیب $j\omega$ و $j\omega$ است. روی مسیر نیمدایره دارای شعاع ϵ ($\epsilon \ll 1$) متغیر مختلط s را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$s = \epsilon e^{j\theta}$$

که در آن θ بین -90° و $+90^\circ$ تغییر می‌کند. پس $G(s)H(s)$ عبارت است از



شکل ۵۱-۷

مسیر صفحه s و مکان هندسی درصفحه GH ، به ازای $G(s)H(s) = K / [s(Ts+1)]$.

$$G(\varepsilon e^{j\theta}) H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon} e^{-j\theta}$$

با میل ε به صفر، K/ε به بینهایت میل می‌کند و با حرکت s روی نیمدایره θ از 90° و -90° تغییر می‌کند. پس نقاط $G(j0^+)H(j0^+) = -j\infty$ و $G(j0^-)H(j0^-) = j\infty$ توسط نیمدایره‌ای به شعاع ∞ ، واقع در نیمه راست صفحه s به هم وصل می‌شوند. مسیر نیمدایره بینهایت کوچک صفحه s به نیمدایره‌ای به شعاع بینهایت در صفحه GH نگاشته می‌شود. شکل ۵۱-۷ مسیر صفحه s و مکان هندسی $G(s)H(s)$ در صفحه GH را نشان می‌دهد. نقاط A ، B ، C و واقع بر مسیر صفحه $G(s)H(s)$ به ترتیب به نقاط A' ، B' ، و C' صفحه s نگاشته می‌شوند. همانطور که شکل ۵۱-۷ نشان می‌دهد نقاط D ، E ، و F نیمدایره با شعاع بینهایت صفحه s به مبدأ مختصات GH نگاشته می‌شوند. چون در نیمه راست صفحه s قطبی وجود ندارد و مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $j0^-$ را دور نمی‌زند، تابع $1+G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s صفر ندارد. بنابراین سیستم پایدار است.

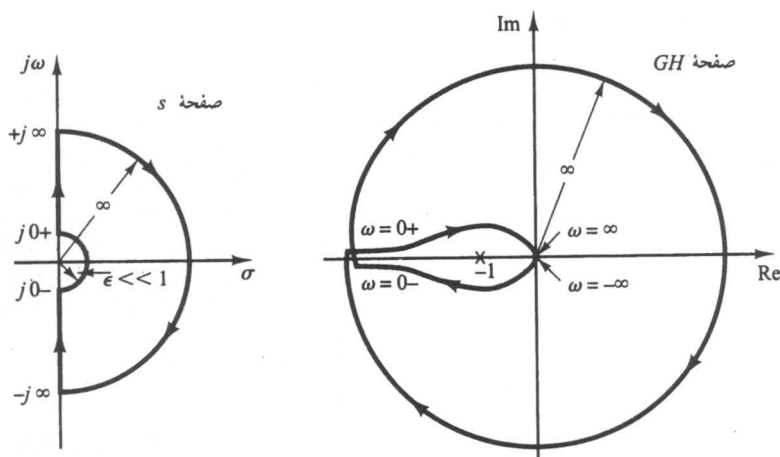
برای توابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ دارای عوامل $1/s^n$ ($n=2,3,\dots$) با حرکت نقطه s روی نیمدایره به شعاع ε ($\varepsilon \ll 1$)، منحنی $G(s)H(s)$ در جهت ساعتگرد، روی دایره‌ای به شعاع بینهایت n نیمدایره را در جهت ساعتگرد طی می‌کند. مثلاً تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + (Ts+1)}$$

پس

$$\lim_{s \rightarrow \varepsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\varepsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-2j\theta}$$

با تغییر θ از -90° تا 90° در صفحه s زاویه $G(s)H(s)$ مطابق شکل ۵۲-۷ از 180° تا -180° تغییر می‌کند.



شکل ۷-۵۲

مسیر صفحه s و مکان هندسی $G(s)H(s)$ در صفحه GH به ازای $G(s)H(s) = K/[s^2(Ts+1)]$.

چون در نیمه راست صفحه s قطبی وجود ندارد و مکان هندسی نقطه $j\omega$ را به ازای هر مقدار مثبت K دو بار در جهت ساعتگرد دور می‌زند، $1+G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s دو صفر دارد. پس این سیستم هم ناپایدار است.

در صورتی که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ قطب و / یا صفر داشته باشد، نیز تحلیل مشابهی می‌توان انجام داد. اکنون معیار پایداری نایکویست را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

معیار پایداری نایکویست [برای حالت عمومی که $G(s)H(s)$ روی محور $j\omega$ قطب و / یا صفر دارد]: در سیستم شکل ۷-۴۴ اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s ، k قطب داشته باشد، برای پایدار بودن سیستم باید مکان هندسی $G(s)H(s)$ ، هنگامی که نقطه s روی مسیر اصلاح شده نایکویست در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند، نقطه $j\omega$ را در جهت پاد ساعتگرد k بار دور بزند.

۶-۷ تحلیل پایداری

در این بخش چند مثال روشنگر از تحلیل پایداری سیستمهای کنترل با استفاده از معیار پایداری نایکویست ارائه می‌دهیم.

اگر مسیر نایکویست در صفحه s ، Z صفر و P قطب تابع $1+G(s)H(s)$ را در جهت ساعتگرد دور بزند و از هیچ یک از صفرها و قطبهای تابع $1+G(s)H(s)$ نگذرد، مسیر متناظر در صفحه $G(s)H(s)$ نقطه $j\omega$ را $N=Z-P$ بار در جهت ساعتگرد دور می‌زند. N منفی به معنی دور زدن در جهت پاد ساعتگرد است.

- در بررسی پایداری سیستمهای کنترل خطی با استفاده از معیار پایداری نایکویست سه امکان پیش رو داریم
۱. نقطه $1+j0$ دور زده نمی‌شود. این به آن معنی است که اگر $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب نداشته باشد سیستم پایدار است؛ در غیر این صورت سیستم ناپایدار است.
 ۲. نقطه $1+j0$ در جهت پاد ساعتگرد یک یا چند بار دور زده می‌شود. در این صورت اگر تعداد دورها با تعداد قطبهای $G(s)H(s)$ واقع در نیمه راست صفحه s برابر باشد، سیستم پایدار است وگرنه سیستم پایدار نیست.
 ۳. نقطه $1+j0$ در جهت پاد ساعتگرد دور زده می‌شود. در این صورت سیستم ناپایدار است.
- در مثالهای زیر فرض می‌کنیم مقادیر بهره K و ثابت زمانی‌ها (مثل T ، T_1 ، T_2 و غیره) همگی مثبت‌اند.

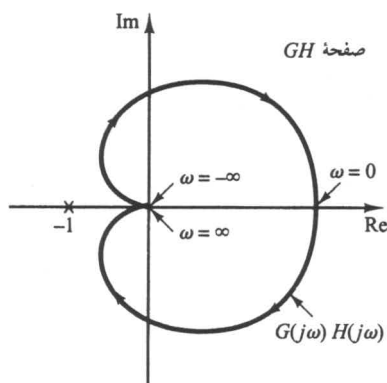
سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

مثال ۷-۱۴

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

پایداری سیستم را بررسی کنید.

شکل ۷-۵۳ نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ را نشان می‌دهد. چون $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب ندارد و مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $1+j0$ را دور نمی‌زند، این سیستم به ازای تمام مقادیر K ، T_1 ، و T_2 پایدار است.



شکل ۷-۵۳

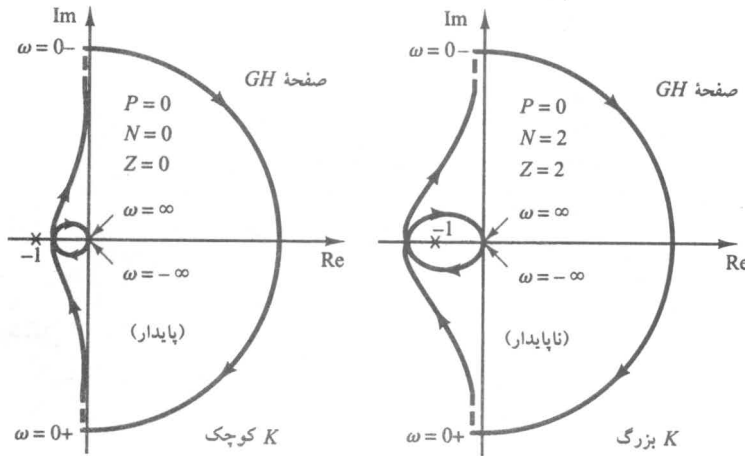
نمودار قطبی $G(j\omega)H(j\omega)$ مثال ۷-۱۴.

سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

مثال ۷-۱۵

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

پایداری سیستم را به ازای (۱) K های کوچک و (۲) K های بزرگ بررسی کنید.



شکل ۷-۵۴
نمودار قطبی سیستم
مثال ۷-۱۵.

شکل ۷-۵۴ نمودار نایکویست تابع تبدیل حلقه باز را به ازای مقادیر کوچک K و مقادیر بزرگ K نشان می‌دهد. تعداد قطبهای $G(s)H(s)$ در نیمه راست صفحه s صفر است. پس برای پایدار بودن سیستم باید داشته باشیم $N = Z = 0$ ، یا $G(s)H(s)$ نقطه $0 + j-1$ را دور نزنند.

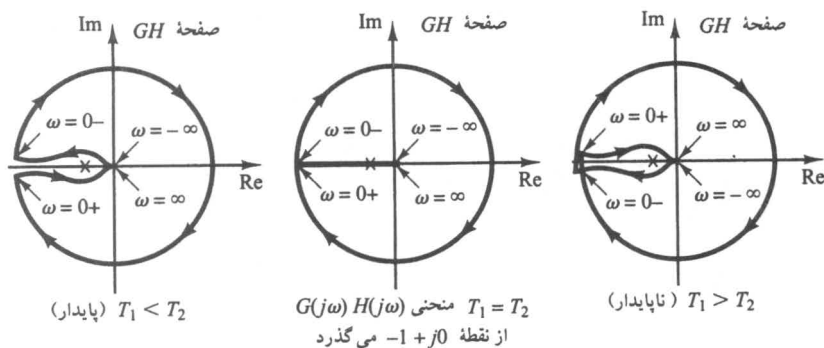
به ازای مقادیر کوچک K نقطه $z = -1$ دور زده نمی‌شود. پس سیستم به ازای مقادیر کوچک K پایدار است. به ازای مقادیر بزرگ K مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $z = -1$ را دوبار در جهت ساعتگرد دور می‌زند، که نشان می‌دهد سیستم دو قطب حلقه بسته در نیمه راست صفحه s دارد و ناپایدار است. (این سیستم برای داشتن دقت خوب باید K بزرگی داشته باشد، ولی از دیدگاه پایداری K بزرگ باعث می‌شود سیستم پایداری ضعیفی داشته باشد و حتی ناپایدار شود. برای ایجاد مصالحه بین دقت و پایداری لازم است یک شبکه جبران‌ساز به سیستم افزوده شود. روشهای جبران‌سازی در حوزه فرکانس در بخشهای ۷-۱۱ تا ۷-۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرد).

پایداری سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر به مقادیر نسبی T_1 و T_2 بستگی دارد

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_1 s + 1)}{s^r (T_2 s + 1)}$$

نمودار نایکویست را براساس مقادیر نسبی T_1 و T_2 رسم کرده، پایداری سیستم را بررسی کنید.

شکل ۷-۵۵ نمودار نایکویست $G(s)H(s)$ را در سه حالت $T_1 < T_2$ ، $T_1 = T_2$ ، و $T_1 > T_2$ نشان می‌دهد. به ازای $T_1 < T_2$ مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $j\omega - 1$ را دور نمی‌زند و سیستم حلقه بسته پایدار است. به ازای $T_1 = T_2$ مکان هندسی $G(s)H(s)$ از نقطه $j\omega - 1$ می‌گذرد که نشان می‌دهد قطبهای حلقه باز



شکل ۷-۵۵

نمودارهای قطبی سیستم مثال ۷-۱۶.

روی محور $j\omega$ قرار دارند. به ازای $T_1 > T_2$ مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $0 + j-1$ را در جهت ساعتگرد دوبار دور می‌زند. پس سیستم حلقه بسته دو قطب در نیم‌صفحه راست دارد و ناپایدار است.

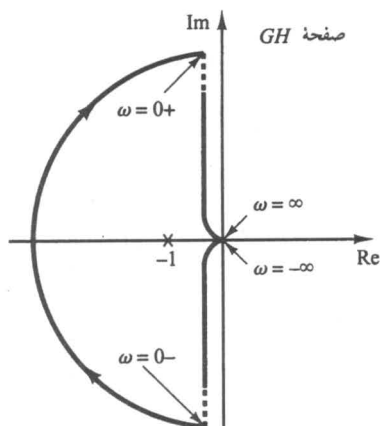
سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید:

مثال ۷-۱۷

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$$

پایداری سیستم را بررسی کنید.

تابع $G(s)H(s)$ در نیم‌صفحه راست یک قطب (در $s=1/T$) دارد، پس $P=1$. شکل ۷-۵۶ نمودار نایکویست را نشان می‌دهد و مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $0 + j-1$ را در جهت ساعتگرد یک بار دور می‌زند، پس $N=1$. چون $Z=N+P$ ، $Z=2$ ، یعنی سیستم حلقه بسته در نیم‌صفحه راست ۲ قطب دارد و ناپایدار است.



شکل ۷-۵۶

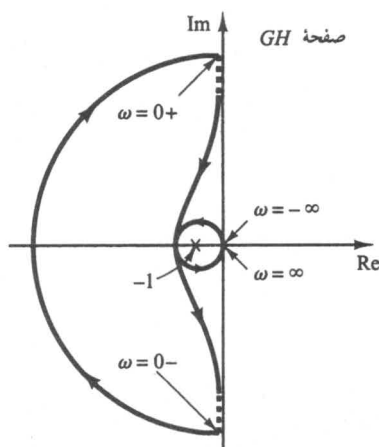
نمودار قطبی سیستم مثال ۷-۱۷.

مثال ۷-۱۸

پایداری سیستم حلقه بسته دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر را بررسی کنید:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \quad (K > 1)$$

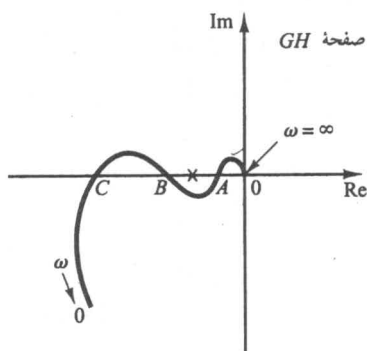
تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست یک قطب (در $s=1$) دارد، پس $P=1$ و سیستم حلقه باز ناپایدار است. نمودار نایکوویست شکل ۷-۵۷ نشان می دهد که مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $0-1+j$ را در جهت پاد ساعتگرد یکبار دور می زند، $N=-1$. پس طبق رابطه $Z=N+P$ صفر است که نشان می دهد $1+G(s)H(s)$ در طرف راست صفحه s صفر ندارد و سیستم حلقه بسته پایدار است. این نمونه ای از سیستم هایی است که به صورت حلقه باز ناپایدارند، ولی با بسته شدن حلقه پایدار می شوند.



شکل ۷-۵۷

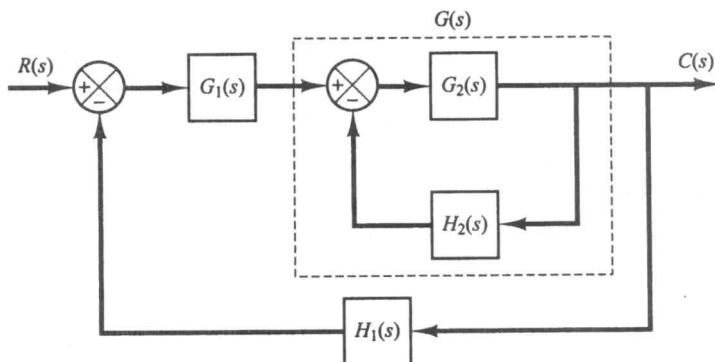
نمودار قطبی سیستم مثال ۷-۱۸.

سیستم های با پایداری مشروط. شکل ۷-۵۸ یک نمونه $G(j\omega)H(j\omega)$ را نشان می دهد که به ازای آن سیستم حلقه بسته با تغییر بهره حلقه باز می تواند ناپایدار شود. اگر بهره حلقه باز به حد کافی بزرگ شود، مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $0-1+j$ را دو بار دربر می گیرد و سیستم ناپایدار می شود. اگر بهره حلقه باز به حد کافی کوچک شود نیز مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ نقطه $0-1+j$ را دو بار دور می زند. برای پایداری



شکل ۷-۵۸

نمودار قطبی یک سیستم دارای پایداری مشروط.



شکل ۷-۵۹

سیستم چندحلقه‌ای.

سیستم در نظر گرفته شده، نقطه بحرانی $0 + j\omega$ نباید در نواحی بین OA و BC شکل ۷-۵۸ باشد. سیستمی که تنها به ازای گستره محدودی از مقادیر بهره حلقه باز پایدار است و نقطه $0 + j\omega$ کاملاً خارج از مکان هندسی $G(j\omega)H(j\omega)$ آن قرار می‌گیرد، سیستم دارای پایداری مشروط نامیده می‌شود.

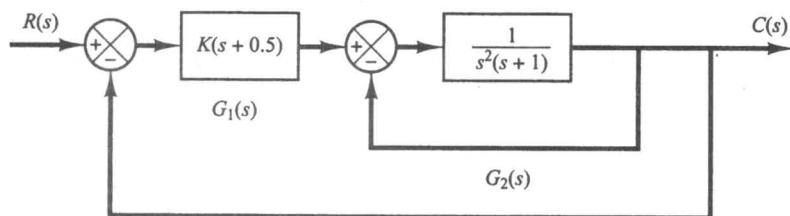
یک سیستم دارای پایداری مشروط به ازای بهره حلقه باز واقع بین مقادیر بحرانی بهره پایدار است، ولی اگر بهره حلقه باز به حد کافی بزرگ یا کوچک شود، ناپایدار می‌شود. چنین سیستمی به ازای ورودی بزرگ ممکن است ناپایدار شود، زیرا ورودی بزرگ می‌تواند باعث اشباع شود که به نوبه خود بهره حلقه باز را کم می‌کند. توصیه می‌کنیم از ایجاد چنین شرایطی اجتناب شود.

سیستم چندحلقه‌ای. سیستم شکل ۷-۵۹ را در نظر بگیرید. این سیستم چندحلقه‌ای است. تابع تبدیل حلقه داخلی عبارت است از:

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

اگر $G(s)$ ناپایدار باشد، اثر ناپایداری آن ایجاد قطب یا قطبهایی در نیمه راست صفحه s است. پس معادله مشخصه حلقه داخلی $1 + G_2(s)H_2(s)$ صفر یا صفرهایی در این ناحیه صفحه s دارد. اگر $G_2(s)$ و $H_2(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب داشته باشند، تعداد صفرهای $1 + G_2(s)H_2(s)$ در نیمه صفحه راست را می‌توان از رابطه $Z_1 = N_1 + P_1$ یافت، که در آن N_1 تعداد دورهایی است که مکان هندسی $G_2(s)H_2(s)$ در جهت ساعتگرد حول نقطه $0 + j\omega$ می‌زند. چون تابع تبدیل حلقه باز سیستم $G_1(s)G(s)H_1(s)$ است، پایداری این سیستم را می‌توان با توجه به نمودار نایکویست $G_1(s)G(s)H_1(s)$ و با دانستن قطبهای نیمه صفحه راست $G_1(s)G(s)H_1(s)$ تعیین کرد.

دقت کنید که اگر با ساده کردن نمودار بلوکی یک حلقه فیدبک حذف شود، امکان دارد قطبهای ناپایدار حاصل شود. اگر در اثر ساده کردن نمودار بلوکی یک شاخه پیشخورد حذف شود، امکان دارد در نیمه صفحه راست صفرهایی ایجاد شود. پس باید تمام قطبها و صفرهای نیمه صفحه راست حاصل از ساده کردن نمودار بلوکی در نظر گرفته شود. داشتن این اطلاعات برای تعیین پایداری سیستمهای چندحلقه‌ای ضروری است.



شکل ۶-۷
سیستم کنترل.

سیستم کنترل شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید. این سیستم دو حلقه دارد. با استفاده از معیار پایداری نایکویست گسترده بهره K برای پایداری سیستم را تعیین کنید. (بهره K مثبت است.)

مثال ۱۹-۷

برای بررسی پایداری سیستم کنترل باید نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کنیم؛ $G(s)$ عبارت است از:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s)$$

ولی فعلاً قطبهای $G(s)$ را نمی‌دانیم. پس باید بینیم حلقه داخلی قطب نیم‌صفحه راست دارد یا نه. این کار با استفاده از معیار پایداری روث به سادگی انجام می‌شود. چون

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

آرایه روث به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & -1 & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

توجه کنید که در ستون اول دو تغییر علامت وجود دارد. پس $G_2(s)$ در نیمه راست صفحه s دو قطب دارد. پس از تعیین تعداد قطبهای نیم‌صفحه راست $G_2(s)$ ، به رسم نمودار نایکویست $G(s)$ می‌پردازیم. داریم

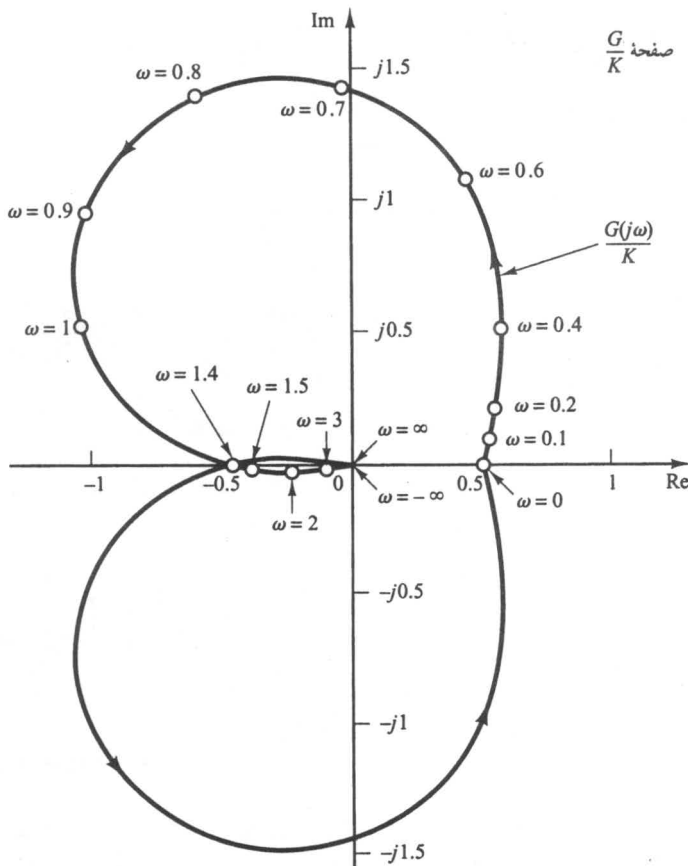
$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

هدف ما تعیین گستره K برای عملکرد پایدار سیستم است. پس به جای رسم نمودار نایکویست $G(j\omega)$ به ازای مقادیر مختلف K ، نمودار نایکویست $G(j\omega)/K$ را رسم می‌کنیم. شکل ۶-۱۱ نمودار نایکویست یا نمودار قطبی $G(j\omega)/K$ را نشان می‌دهد.

چون $G(s)$ در نیم‌صفحه راست دو قطب دارد، $P=2$ ، با توجه به این که

$$Z = P + N$$

برای پایداری باید داشته باشیم $Z=0$ یا $N=-2$ ؛ یعنی نمودار نایکویست $G(j\omega)$ باید نقطه $0.5 + j-1$ را در جهت پادساعتگرد دوبار دور بزند. شکل ۶-۱۱ نشان می‌دهد که اگر نقطه بحرانی بین $0.5 - j$ قرار داشته



شکل ۶۱-۷

نمودار قطبی $G(j\omega)/K$.

باشد، $G(j\omega)/K$ نقطه بحرانی را در جهت پاد ساعتگرد دوبار دور می‌زند. پس باید داشته باشیم

$$-0.5K < -1$$

پس گستره پایداری برای بهره K عبارت است از

$$2 < K$$

اعمال معیار پایداری نایکویست به نمودار قطبی وارون. در تحلیل‌های بالا معیار پایداری نایکویست به نمودارهای قطبی تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ اعمال شد.

در تحلیل سیستمهای چند حلقه‌ای گاهی می‌توان برای فراهم کردن شرایط تحلیل ترسیمی از تابع تبدیل وارون استفاده کرد. (معیار پایداری نایکویست را می‌توان به نمودارهای قطبی وارون نیز اعمال کرد. اثبات ریاضی معیار پایداری نایکویست برای نمودارهای قطبی وارون همانند اثبات برای نمودارهای قطبی غیر وارون است.)

نمودار قطبی وارون $G(j\omega)H(j\omega)$ عبارت است از $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$ بر حسب ω . برای مثال اگر

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T}$$

آنگاه

$$\frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} + 1$$

نمودار قطبی وارون به ازای $\omega \geq 0$ نیمه پایینی خط قائمی است که از نقطه $(0, 1)$ محور حقیقی شروع می‌شود. معیار پایداری نایکویست برای اعمال به نمودار قطبی وارون را می‌توان به این صورت بیان کرد: برای پایدار بودن یک سیستم حلقه بسته، با حرکت s روی مسیر نایکویست، منحنی $1/[G(s)H(s)]$ باید یا نقطه $0 + j-1$ را دور نزند، یا تعداد دورها در جهت پادساعتگرد با تعداد قطبهای $1/[G(s)H(s)]$ [یعنی صفرهای $G(s)H(s)$] در نیمه راست صفحه s برابر باشد. [تعداد صفرهای نیم صفحه راست $G(s)H(s)$ را می‌توان با استفاده از معیار پایداری روث تعیین کرد]. اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نیم صفحه راست صفر نداشته باشد، برای پایدار بودن سیستم حلقه بسته باید منحنی $1/[G(s)H(s)]$ نقطه $0 + j-1$ را دور نزند.

هر چند معیار پایداری نایکویست را می‌توان به نمودارهای قطبی وارون اعمال کرد، ولی اگر اطلاعات پاسخ فرکانسی به صورت تجربی در اختیار باشد، شمارش تعداد دورهای مکان هندسی $1/[G(s)H(s)]$ می‌تواند به خاطر دشواری اندازه‌گیری تغییر فاز ناشی از مسیر نیمدایره بینهایت صفحه s مشکل باشد. برای مثال اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ به صورت زیر تاخیر انتقالی داشته باشد

$$G(s)H(s) = \frac{K e^{-j\omega L}}{s(Ts+1)}$$

منحنی $1/[G(s)H(s)]$ نقطه $0 + j-1$ را بینهایت بار دور می‌زند و نمی‌توان معیار پایداری نایکویست را به نمودار قطبی وارون چنین تابع تبدیل حلقه بازی اعمال کرد.

در حالت کلی اگر اطلاعات پاسخ فرکانسی به دست آمده به روش تجربی را نتوان به صورت تحلیلی درآورد، هم نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ و هم نمودار $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$ را باید رسم کرد. به علاوه تعداد صفرهای نیم صفحه راست $G(s)H(s)$ نیز باید مشخص شود. تعیین صفرهای نیم صفحه راست $G(s)H(s)$ (یا به عبارت دیگر تعیین می‌نیم فاز بودن اجزاء داده شده) از تعیین قطبهای نیم صفحه راست $G(s)H(s)$ (یا به عبارت دیگر تعیین پایدار بودن اجزاء داده شده) سخت تر است.

آزمون مناسب پایداری برای سیستمهای چندحلقه‌ای را باید با توجه به این نکات برگزید که اطلاعات به صورت ترسیمی داده شده‌اند یا تحلیلی، و اجزاء غیرمی‌نیم فاز وجود دارند یا نه. اگر اطلاعات داده شده تحلیلی باشند، یا عبارتهای ریاضی تمام اجزاء مشخص باشند، اعمال معیار پایداری نایکویست به نمودارهای قطبی وارون هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کند، و سیستمهای چندحلقه‌ای را می‌توان در صفحه GH وارون تحلیل و طراحی کرد. (مسئله الف-۷-۱۵ را ببینید.)

۷-۷ پایداری نسبی

پایداری نسبی. در طراحی سیستم کنترل، پایدار بودن سیستم شرطی است که باید مراعات شود. به علاوه پایداری نسبی سیستم هم باید کافی باشد.

در این بخش نشان خواهیم داد که نمودار نایکویست علاوه بر تعیین پایدار بودن یا نبودن سیستم، میزان پایداری آن را نیز نشان می‌دهد. نمودار نایکویست همچنان نشان می‌دهد که چگونه می‌توان میزان پایداری را، در صورت لزوم، بهبود داد.

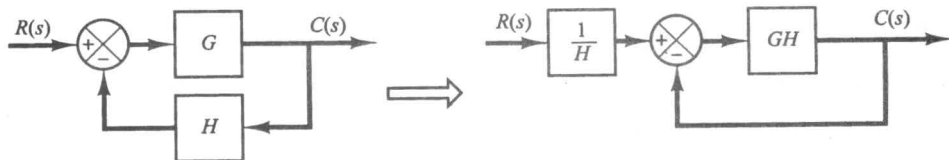
در مباحث زیر فرض می‌کنیم سیستمهای در نظر گرفته شده فیدبک واحد دارند. توجه کنید که همیشه می‌توان یک سیستم را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۶۲، به سیستمی با فیدبک واحد تبدیل کرد. پس می‌توان تحلیل پایداری نسبی سیستمهای با فیدبک واحد را به سیستمهای با فیدبک غیرواحد تعمیم داد.

همچنین فرض می‌کنیم سیستمها می‌نیم فاز هستند، مگر خلاف آن ذکر شود؛ یعنی سیستمها در نیم‌صفحه راست نه صفر دارند و نه قطب.

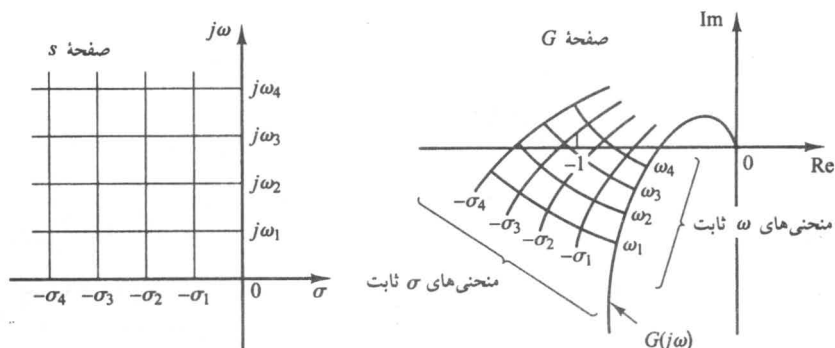
تحلیل پایداری نسبی با نگاشت همدیس. یکی از مسائل مهم در تحلیل سیستمهای کنترل یافتن تمام قطبهای حلقه بسته یا حداقل قطبهای نزدیک محور $j\omega$ (یا قطبهای حلقه بسته غالب) است. اگر مشخصات فرکانسی حلقه باز یک سیستم معلوم باشد می‌توان نزدیکترین قطبهای حلقه بسته به محور $j\omega$ را تخمین زد. گفتیم که لازم نیست مکان هندسی $G(j\omega)$ به صورت تابعی تحلیلی از ω معلوم باشد. تمام نمودار نایکویست را می‌توان به صورت تجربی به دست آورد. روشی که در اینجا بیان می‌کنیم اساساً یک روش ترسیمی مبتنی بر یک نگاشت از صفحه s به صفحه $G(s)$ است.

نگاشت همدیس خطوط σ ثابت (خطوط $s = \sigma + j\omega$ که در آن ω ثابت و σ متغیر است) و خطوط ω ثابت (خطوط $s = \sigma + j\omega$ که در آن σ ثابت و ω متغیر است) را در نظر بگیرید. خط $\sigma = 0$ (محور $j\omega$) صفحه s به نمودار نایکویست صفحه $G(s)$ نگاشته می‌شود. خطوط σ ثابت صفحه s به خمهایی مشابه نمودار نایکویست نگاشته می‌شوند، که مطابق شکل ۷-۶۳ به نوعی با نمودار نایکویست موازی‌اند. در شکل ۷-۶۳ نشان داده شده است که خطوط ω ثابت نیز به خمهایی نگاشته می‌شود.

شکل مکانهای هندسی σ ثابت و ω ثابت در صفحه s و نزدیکی خمها در حوالی نقطه $0 + j\omega$ به تابع $G(s)$ بستگی دارد، و این نزدیکی نشانی از پایداری نسبی یک سیستم پایدار است. در حالت کلی هر چه



شکل ۷-۶۲ تبدیل سیستمی با عنصر فیدبک به یک سیستم با فیدبک واحد.

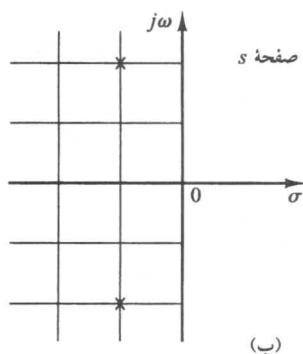


شکل ۶۳-۷

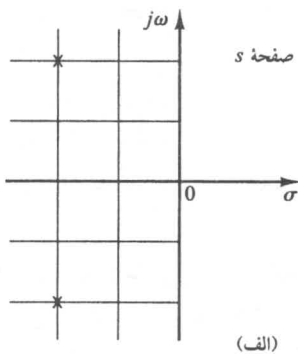
نگاشت همدیس شبکه‌ای از صفحه s به صفحه $G(s)$.

مکانهای هندسی $G(j\omega)$ به نقطه $j\omega = -1$ نزدیکتر باشد، پاسخ پله فراجشش ماکزیمم بزرگتری داشته، دیرتر میرا می‌شود.

دو سیستم شکلهای ۶۴-۷ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. (در این شکل قطبهای حلقه بسته با علامت $\times$ مشخص شده‌اند). واضح است که سیستم (الف) پایدارتر از سیستم (ب) است، زیرا قطبهای حلقه بسته سیستم (الف)، نسبت به سیستم (ب) دورتر از محور $j\omega$ قرار دارد. شکلهای ۶۵-۷ (الف) و (ب) نگاشت همدیس



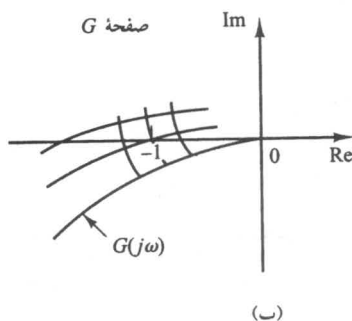
(ب)



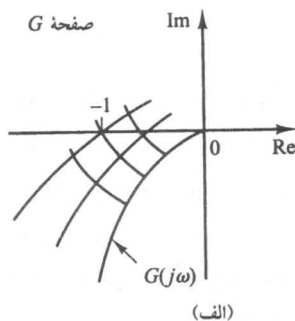
(الف)

شکل ۶۴-۷

دو سیستم با دو قطب حلقه بسته.



(ب)



(الف)

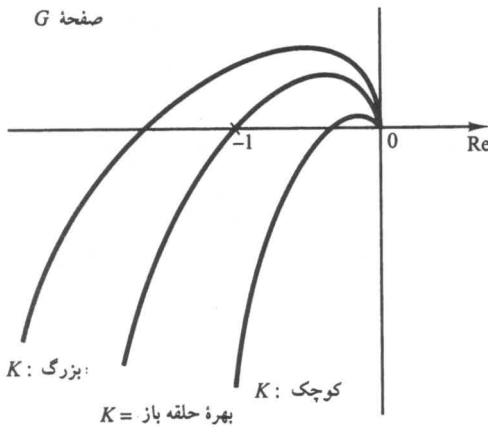
شکل ۶۵-۷

نگاشت همدیس شبکه

صفحه s سیستمهای

شکل ۶۴-۷ به

صفحه $G(s)$.



شکل ۶۶-۷

نمودارهای قطبی

$$\frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots}$$

به ازای مقادیر مختلف K .

شبکه صفحه s به صفحه $G(s)$ را نشان می‌دهد. هر چه قطبهای حلقه بسته به محور $j\omega$ نزدیکتر باشند، مکان هندسی $G(j\omega)$ به نقطه $-1+j0$ نزدیکتر است.

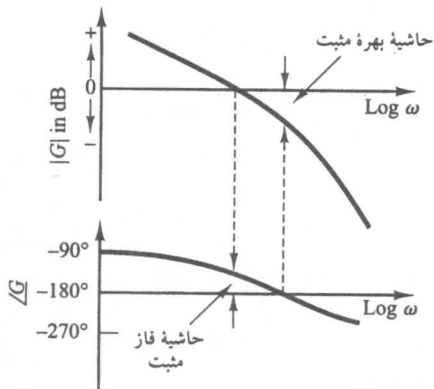
حاشیه‌های فاز و بهره. شکل ۶۶-۷ نمودارهای قطبی $G(j\omega)$ را به ازای سه مقدار متفاوت بهره حلقه باز K نشان می‌دهد. به ازای K بزرگ سیستم ناپایدار است. با کاهش بهره به یک حد خاص، مکان هندسی $G(j\omega)$ از نقطه $-1+j0$ می‌گذرد. یعنی سیستم به ازای این مقدار بهره در آستانه ناپایداری است و نوسانات نامیرا دارد. به ازای بهره کوچک سیستم پایدار است.

در حالت کلی هر چه مکان هندسی $G(j\omega)$ برای دور زدن نقطه $-1+j0$ به آن نزدیکتر شود، پاسخ سیستم نوسانی‌تر می‌شود. نزدیکی نمودار $G(j\omega)$ به نقطه $-1+j0$ می‌تواند معیاری از حاشیه پایداری باشد. (این مطلب در مورد سیستمهای دارای پایداری مشروط صادق نیست.) معمولاً میزان نزدیکی را برحسب حاشیه فاز و حاشیه بهره بیان می‌کنند.

حاشیه فاز: حاشیه فاز عبارت است از مقدار پسفازی لازم در فرکانس عبور بهره، برای قرار دادن سیستم در مرز ناپایداری. فرکانس عبور بهره فرکانسی است که در آن $|G(j\omega)|$ یعنی دامنه تابع تبدیل حلقه باز برابر یک می‌شود. حاشیه فاز γ حاصل جمع 180° و فاز ϕ تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس عبور بهره است، یا

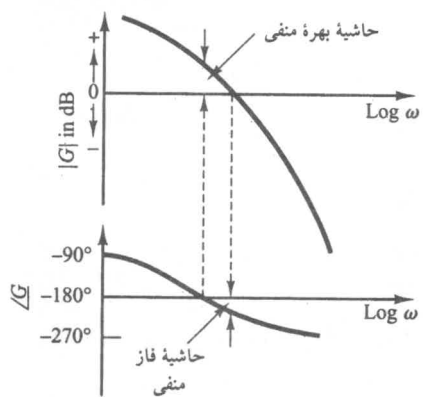
$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

شکلهای ۶۷-۷ (الف)، (ب) و (ج) حاشیه فاز یک سیستم پایدار و یک سیستم ناپایدار را روی نمودارهای بوده، قطبی، و لگاریتم دامنه برحسب فاز نشان می‌دهد. در نمودار قطبی می‌توان خطی از مبدأ به محل برخورد دایره واحد با مکان هندسی $G(j\omega)$ رسم کرد. زاویه بین این خط و بخش منفی محور حقیقی با حاشیه فاز برابر است. به ازای $\gamma > 0^\circ$ (خط بالای بخش منفی محور حقیقی) حاشیه فاز مثبت و به ازای $\gamma < 0^\circ$ (خط زیر محور حقیقی) حاشیه فاز منفی است. برای این که یک سیستم می‌نیم فاز پایدار باشد، باید حاشیه فاز آن مثبت باشد. در منحنی‌های لگاریتمی نقطه بحرانی صفحه مختلط محل برخورد خط dB و خط -180° است.

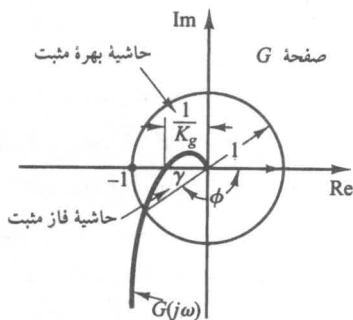


سیستم پایدار

(الف)

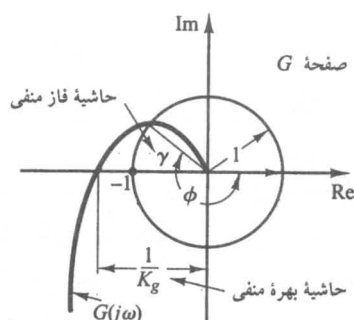


سیستم ناپایدار

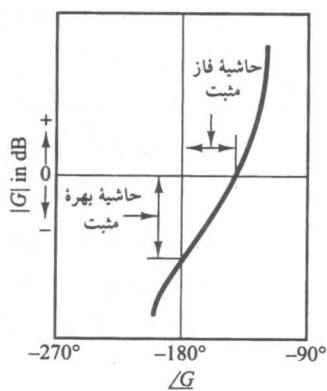


سیستم پایدار

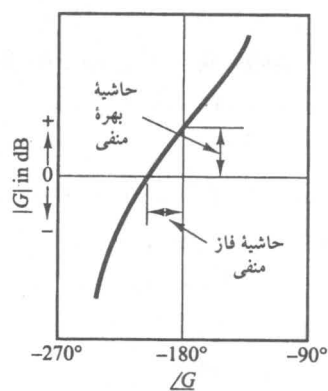
(ب)



سیستم ناپایدار



سیستم پایدار



سیستم ناپایدار

(ج)

شکل ۶۷-۷ حاشیه‌های فاز و بهره سیستم‌های پایدار و ناپایدار. (الف) نمودار بوده؛ (ب) نمودار قطبی؛ (ج) نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز.

حاشیه بهره: حاشیه بهره عکس دامنه $|G(j\omega)|$ در فرکانسی است که زاویه فاز -180° می شود. اگر فرکانس عبور زاویه فاز ω_1 را فرکانسی تعریف کنیم که در آن زاویه تابع تبدیل حلقه باز -180° می شود، حاشیه بهره K_g عبارت است از:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

برحسب دسیبل

$$K_g \text{ dB} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

حاشیه بهره برحسب دسیبل مثبت است، اگر K_g از یک بزرگتر باشد، و منفی است اگر K_g از یک کوچکتر باشد. پس حاشیه بهره مثبت (برحسب دسیبل) به معنی پایدار بودن سیستم است و حاشیه بهره منفی (برحسب دسیبل) به معنی ناپایدار بودن سیستم است. حاشیه بهره در شکلهای ۶۷-۷ (الف)، (ب)، و (ج) نشان داده شده است.

برای یک سیستم می نیمم فاز پایدار، حاشیه بهره نشان می دهد که بهره را چقدر می توان زیاد کرد، بدون این که سیستم ناپایدار شود. برای سیستمهای ناپایدار حاشیه بهره نشان می دهد که برای پایدار شدن سیستم باید بهره را چقدر کم کرد.

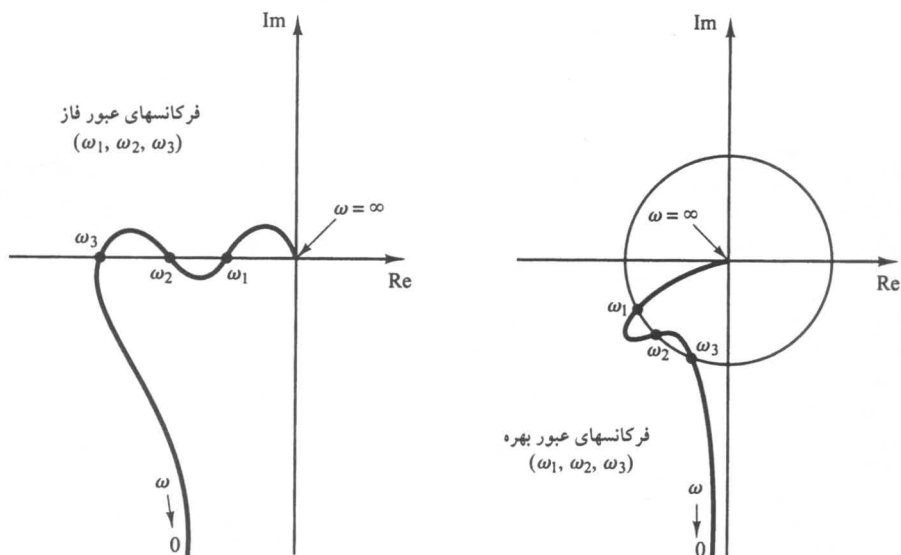
حاشیه بهره سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم بینهایت است، زیرا برای چنین سیستمهایی نمودار قطبی بخش منفی محور حقیقی را قطع نمی کند. پس از لحاظ نظری سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم نمی توانند ناپایدار باشند. (البته توجه کنید که سیستمهای موسوم به سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم تقریبی اند، از این جهت که در اشتقاق معادلات سیستم تأخیرهای زمانی کوچک ندیده گرفته می شود، پس اینها واقعاً مرتبه اول و مرتبه دوم نیستند؛ با در نظر گرفتن این تأخیرهای زمانی کوچک، سیستمهای موسوم به سیستمهای مرتبه اول و مرتبه دوم نیز می توانند ناپایدار شوند.)

گفته شد که برای یک سیستم غیرمی نیمم فاز دارای تابع تبدیل حلقه باز ناپایدار، برای ارضای شرط پایداری نمودار $G(j\omega)$ باید حتماً نقطه $1+j0$ را دور بزند. بنابراین حاشیه فاز و حاشیه بهره این سیستم غیرمی نیمم فاز پایدار، منفی است.

توجه به این نکته نیز مهم است که سیستمهای دارای پایداری مشروط بیش از یک فرکانس عبور فاز دارند، همچنین بعضی سیستمهای مرتبه بالای دارای صفر نیز ممکن است مطابق شکل ۶۸-۷ چند فرکانس عبور بهره داشته باشند. برای سیستمهای پایداری که چند فرکانس عبور بهره دارند، حاشیه فاز در فرکانس عبوری که بالاترین بهره را دارد حساب می شود.

چند توضیح راجع به حاشیه فاز و حاشیه بهره. حاشیه های فاز و بهره یک سیستم کنترل معیاری و از نزدیکی نمودار قطبی آن به نقطه $1+j0$ است. بنابراین از این حاشیه ها می توان به عنوان معیارهای طراحی استفاده کرد.

باید گوشزد کرد که نه حاشیه فاز نه حاشیه بهره، هیچکدام به تنهایی نمی توانند پایداری نسبی را به حد کافی مشخص کنند. برای تعیین پایداری نسبی باید هر دو مشخص باشد.



شکل ۷-۶۸

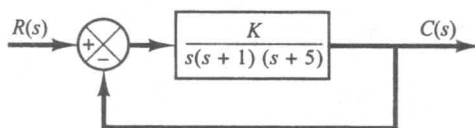
نمودارهای قطبی که وجود بیش از یک فرکانس عبور بهره یا فاز را نشان می‌دهد.

در سیستمهای می‌نیم فاز برای پایداری هم حاشیه فاز و هم حاشیه بهره باید مثبت باشد. منفی بودن حاشیه‌ها نشانه ناپایداری است.

حاشیه‌های فاز و بهره مناسب تضمین می‌کنند که سیستم به رغم تغییرات عناصر پایدار می‌ماند، و برای فرکانسهای خاصی مشخص می‌شوند. مقادیر حاشیه فاز و حاشیه بهره رفتار سیستم حلقه بسته نزدیک فرکانس تشدید را در محدوده خاصی قرار می‌دهد. برای عملکرد مطلوب حاشیه فاز باید بین 30° و 60° بوده، حاشیه بهره از ۶ dB بزرگتر باشد. به ازای این مقادیر پایداری سیستم می‌نیم فاز تضمین می‌شود، حتی اگر بهره حلقه باز و ثابت زمانی‌های اجزاء سیستم تا حد معینی تغییر کند. گرچه حاشیه‌های فاز و بهره تنها تخمینی از میرایی نسبی سیستم حلقه بسته به دست می‌دهند، ولی راه مناسبی برای طراحی سیستمهای کنترل یا تنظیم بهره‌های اجزاء سیستم ایجاد می‌کند.

در سیستمهای می‌نیم فاز مشخصات دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه بسته کاملاً به هم وابسته‌اند. لازمه بین 30° و 60° بودن حاشیه فاز این است که شیب منحنی لگاریتم دامنه فاز نمودار بوده در فرکانس عبور بهره کمتر از ۴۰ dB/dec باشد. در اغلب موارد عملی برای پایداری سیستم بهتر است شیب منحنی در فرکانس عبور بهره ۲۰ dB/dec باشد. در صورت ۴۰ dB/dec بودن شیب، سیستم می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. (حتی اگر سیستم پایدار باشد، حاشیه فاز کوچکی دارد). اگر شیب در فرکانس عبور بهره ۶۰ dB/dec یا بیشتر باشد، سیستم به احتمال زیاد ناپایدار است.

در سیستمهای غیر می‌نیم فاز تعبیر درست حاشیه‌های پایداری مستلزم بررسی دقیق است. برای تعیین پایداری سیستمهای غیر می‌نیم فاز بهتر است به جای نمودار بوده از نمودار نایکویست استفاده شود.



شکل ۶۹-۷

سیستم کنترل.

حاشیه فاز و بهره سیستم شکل ۶۹-۷ را برای دو حالت $K=10$ و $K=100$ به دست آورید.

مثال ۲۰-۷

حاشیه‌های فاز و بهره را می‌توان به سادگی از نمودار بوده تعیین کرد. شکل ۷۰-۷ (الف) نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز را به ازای $K=10$ نشان می‌دهد. حاشیه‌های فاز و بهره به ازای $K=10$ عبارت‌اند از:

$$\text{حاشیه بهره} = 8 \text{ dB} \quad \text{حاشیه فاز} = 21^\circ$$

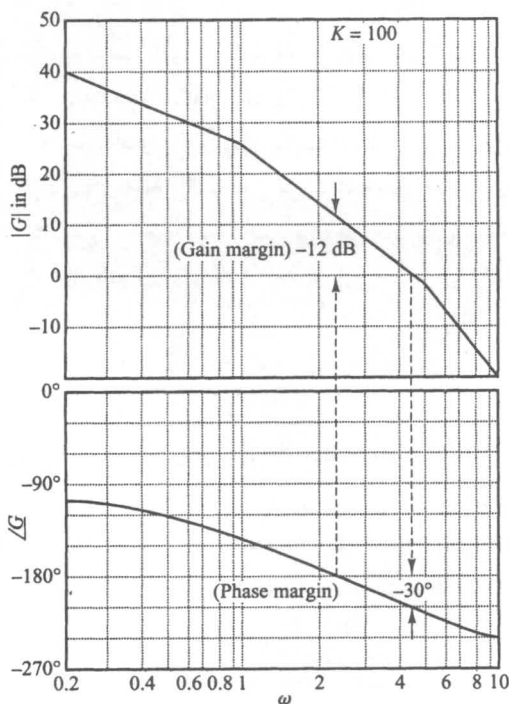
بنابراین می‌توان بهره سیستم را تا ۸ dB زیاد کرد، بدون این که سیستم ناپایدار شود.

افزایش بهره از $K=10$ به $K=100$ باعث می‌شود محور dB مطابق شکل ۷۰-۷ (ب) ۲۰ dB پایین

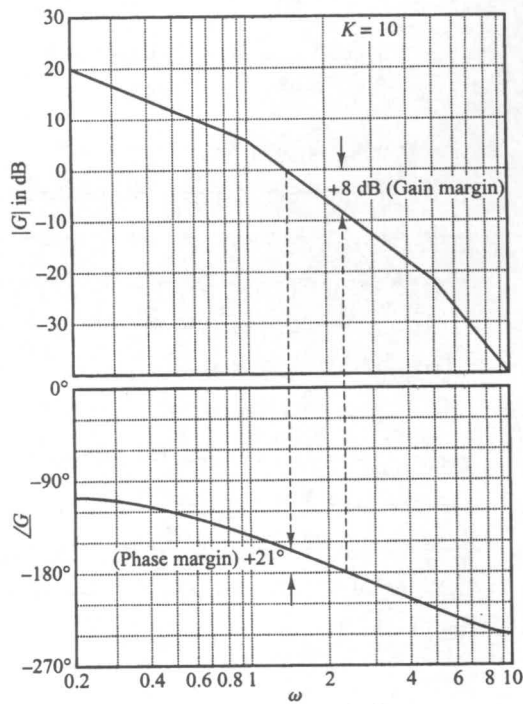
رود. حاشیه‌های فاز و بهره عبارت‌اند از:

$$\text{حاشیه بهره} = -12 \text{ dB} \quad \text{حاشیه فاز} = -30^\circ$$

پس سیستم به ازای $K=10$ پایدار و به ازای $K=100$ ناپایدار است.



(ب)



(الف)

شکل ۷۰-۷ نمودارهای بوده سیستم شکل ۶۹-۷ به ازای: (الف) $K=10$ و (ب) $K=100$.

دقت کنید که یکی از جنبه‌های بسیار خوب نمودار بوده سادگی بررسی اثرات تغییر بهره است. برای دستیابی به عملکرد مطلوب باید حاشیه فاز را به 30° تا 60° برسانیم. این کار با کاهش بهره K انجام می‌شود. ولی کاهش K مطلوب نیست، زیرا کوچکی K باعث می‌شود خطای ورودی شیب بزرگ باشد. پس تغییر شکل منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز با افزودن شبکه جبران‌ساز ضروری است. روشهای جبران‌سازی در بخشهای ۱۱-۷ تا ۱۳-۷ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

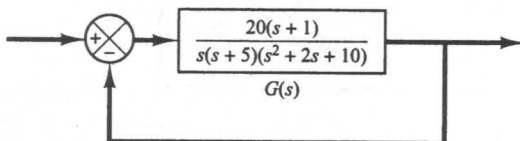
یافتن حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره به کمک MATLAB. حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را می‌توان به کمک MATLAB به راحتی به دست آورد. به این منظور باید دستور زیر را به کار برد

$$[Gm, pm, wcp, wcg] = \text{margin}(sys)$$

که در آن pm حاشیه فاز، Gm حاشیه بهره، wcp فرکانس عبور فاز، و wcg فرکانس عبور بهره است. برای جزییات این دستور مثال ۷-۲۱ را ببینید.

نمودار بوده سیستم حلقه بسته نشان داده شده در شکل ۷-۷۱ را رسم کنید. حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را به کمک MATLAB بیابید.

مثال ۷-۲۱



شکل ۷-۷۱

سیستم حلقه بسته.

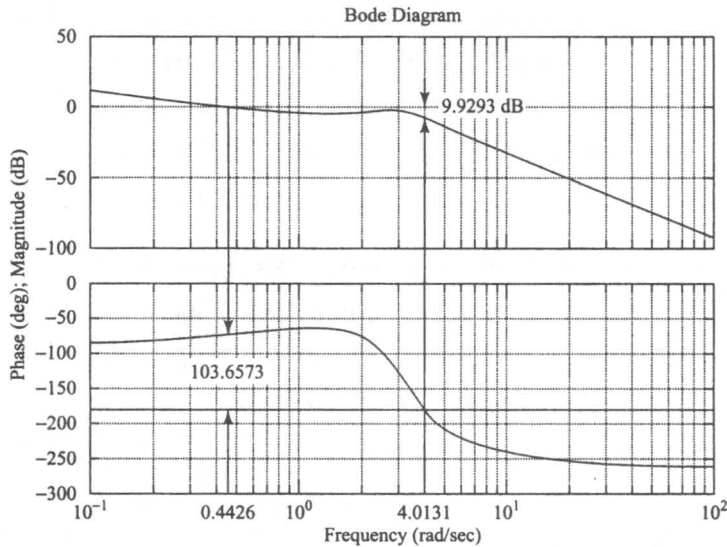
برنامه ۷-۱۱ روش رسم نمودار بوده، و یافتن حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را نشان می‌دهد. نمودار بوده در شکل ۷-۷۲ نشان داده شده است.

MATLAB Program 7-11

```
num = [20 20];
den = conv([1 5 0],[1 2 10]);
sys = tf(num,den);
w = logspace(-1,2,100);
bode(sys,w)
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
GmdB = 20*log10(Gm);
[GmdB pm wcp wcg]
```

ans =

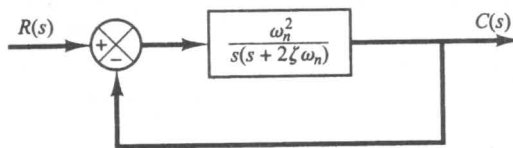
9.9293 103.6573 4.0131 0.4426



شکل ۷-۷۲

نمودار بوده $G(s)$

سیستم شکل ۷-۷۱.



شکل ۷-۷۳

سیستم کنترل.

دامنه قله تشدید M_r و فرکانس تشدید ω_r . سیستم شکل ۷-۷۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (۱۶-۷)$$

که در آن ζ و ω_n به ترتیب نسبت میرایی و فرکانس طبیعی نامیراست. پاسخ فرکانسی حلقه بسته عبارت است از:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = M e^{j\alpha}$$

که در آن

$$M = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad , \quad \alpha = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

چنانچه معادله (۷-۱۲) نشان می‌دهد، به ازای $0 \leq \zeta \leq 0.707$ ماکزیمم مقدار M در فرکانس ω_r رخ می‌دهد و

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (۷-۱۷)$$

فرکانس ω_r فرکانس تشدید است. در فرکانس تشدید مقدار M ماکزیمم می‌شود و مقدار آن طبق معادله (۷-۱۳) عبارت است از:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (۷-۱۸)$$

M_r را **دامنه قله تشدید** می‌نامند. دامنه قله تشدید با میرایی سیستم مرتبط است.

دامنه قله تشدید پایداری نسبی سیستم را نشان می‌دهد. بزرگ بودن دامنه قله تشدید نشان می‌دهد که یک زوج قطب حلقه بسته با نسبت میرایی کوچک وجود دارد که پاسخ گذرای نامطلوبی ایجاد می‌کند. ولی کوچک بودن قله تشدید نبودن چنین قطبهای با میرایی کوچک را نشان می‌دهد، که به معنی وجود سیستمی با میرایی خوب است.

توجه کنید که ω_r تنها هنگامی حقیقی است که $0.707 < \zeta$. پس به ازای $0.707 < \zeta$ تابع تبدیل حلقه بسته تشدید ندارد. [M_r تنها به ازای $0.707 < \zeta$ یک می‌شود. معادله (۷-۱۴) را ببینید.] چون در سیستمهای فیزیکی مقادیر M_r و ω_r را به راحتی می‌توان اندازه گرفت، این مقادیر برای بررسی همخوانی تحلیلهای نظری و تجربی بسیار مفیدند.

البته باید بگوییم که در مسائل عملی طراحی برای بیان درجه میرایی سیستم از حاشیه فاز و حاشیه بهره بیشتر از دامنه قله تشدید استفاده می‌شود.

همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای استاندارد مرتبه دوم. فراجش ماکزیمم پاسخ گذاری پله واحد سیستم استاندارد مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ با دامنه قله تشدید پاسخ فرکانسی همبستگی کاملی دارد. پس در پاسخ فرکانسی و پاسخ گذرا اطلاعات یکسانی راجع به رفتار دینامیکی سیستم وجود دارد. به ازای ورودی پله واحد، خروجی سیستم شکل ۷-۷۳ طبق معادله (۵-۱۲) عبارت است از:

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad \text{در } t \geq 0$$

که در آن

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (۷-۱۹)$$

فراجش ماکزیمم M_p پاسخ پله نیز طبق معادله (۵-۲۱) عبارت است از:

$$M_p = e^{-\left(\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \pi} \quad (۷-۲۰)$$

این فراجش ماکزیمم در پاسخ گذرای با فرکانس طبیعی میرای $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ رخ می‌دهد. فراجش ماکزیمم به ازای $0.4 < \zeta$ مقداری بزرگ است.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ عبارت است از:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

به ازای ورودی سینوسی دامنه $G(j\omega)$ هنگامی یک است که داشته باشیم

$$\omega = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

این رابطه با برابر یک قرار دادن $|G(j\omega)|$ و حل معادله حاصل به دست می‌آید. در این فرکانس زاویه فاز عبارت است از:

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle j\omega + 2\zeta\omega_n = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}{2\zeta}$$

پس حاشیه فاز برابرست با

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega) \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}{2\zeta} \quad (21-7) \\ &= \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2} \end{aligned}$$

معادله (۲۱-۷) رابطه بین نسبت میرایی ζ و حاشیه فاز γ را به دست می‌دهد. (توجه کنید که حاشیه فاز γ تنها تابعی از نسبت میرایی ζ است.)

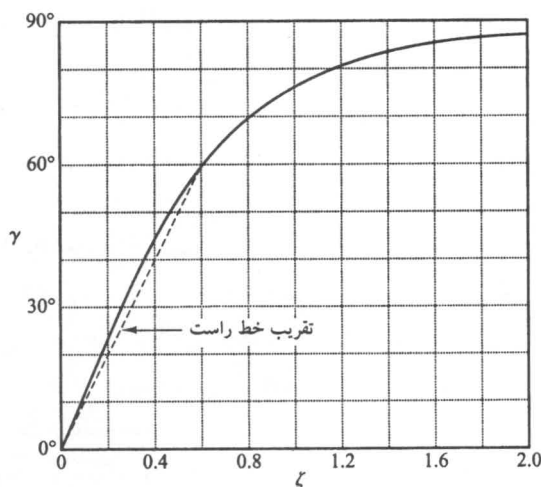
در زیر همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم توصیف شده با معادله (۷-۱۶) خلاصه شده است:

۱. حاشیه فاز و نسبت میرایی مستقیماً به هم مرتبط‌اند. شکل ۷-۷۴ نمودار حاشیه فاز γ را به صورت تابعی از نسبت میرایی ζ نشان می‌دهد. در شکل مشخص شده است که برای سیستم مرتبه دوم استاندارد شکل ۷-۷۳ حاشیه فاز γ و نسبت میرایی به ازای $0 \leq \zeta \leq 0.6$ تقریباً با خط راستی دارای رابطه زیر به هم مرتبط‌اند

$$\zeta = \frac{\gamma}{100}$$

پس حاشیه فاز 60° با نسبت میرایی 0.6 متناظر است. برای سیستمهای مرتبه بالاتری که یک زوج قطب حلقه بسته غالب دارند می‌توان این رابطه را به عنوان قاعده‌ای سرانگشتی در محاسبه پایداری نسبی پاسخ گذرا (یعنی نسبت میرایی) از پاسخ فرکانسی به کار برد.

۲. معادلات (۷-۱۷) و (۷-۱۹) نشان می‌دهند که به ازای مقادیر کوچک ζ مقادیر ω_d و ω_r تقریباً برابرند. پس به ازای ζ کوچک مقدار ω_r سرعت پاسخ گذرای سیستم را نشان می‌دهد.



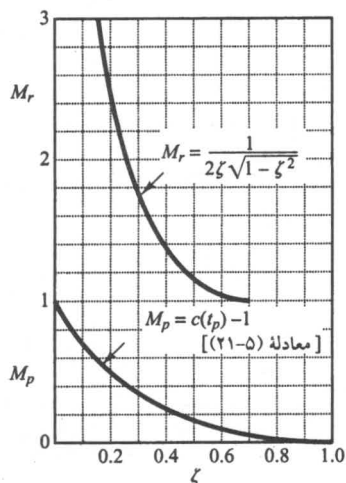
شکل ۷-۷۴

منحنی γ (حاشیه فاز)برحسب ζ برای سیستم

شکل ۷-۷۳.

۳. معادلات (۷-۱۸) و (۷-۲۰) نشان می‌دهند که هر چه ζ کوچکتر باشد، مقادیر M_p و M_r بزرگتر می‌شود. شکل ۷-۷۵ رابطه بین M_p و M_r را به صورت تابعی از ζ نشان می‌دهد. می‌توان دید که به ازای $\zeta > 0.4$ رابطه نزدیکی بین M_p و M_r برقرار است. برای مقادیر کوچک ζ ، M_r خیلی بزرگ می‌شود ($M_r \gg 1$) ولی M_p از یک تجاوز نمی‌کند.

همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی در یک سیستم عمومی. طراحی سیستمهای کنترل غالباً براساس پاسخ فرکانسی صورت می‌گیرد. علت اصلی این امر سهولت نسبی این رهیافت در مقایسه با رهیافتهای دیگر است. چون در بسیاری از کاربردها پاسخ گذاری سیستم به یک ورودی نامتناوب از درجه اول اهمیت برخوردار



شکل ۷-۷۵

منحنی‌های M_p و M_r برحسب ζ برای سیستم

شکل ۷-۷۳.

است نه پاسخ حالت ماندگار به ورودی سینوسی، مسئله همبستگی بین پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی پیش می‌آید.

برای سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ روابط ریاضی بین پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی را می‌توان به راحتی به دست آورد. پاسخ زمانی یک سیستم مرتبه دوم را می‌توان با داشتن M_r و ω_r پاسخ فرکانسی حلقه بسته دقیقاً پیش‌بینی کرد.

در سیستمهای مرتبه بالاتر همبستگی پیچیده‌تری وجود دارد و ممکن است نتوان پاسخ گذرا را به سادگی از روی پاسخ فرکانسی پیش‌بینی کرد، زیرا قطبهای اضافی می‌توانند رابطه‌ای را که بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای مرتبه دوم وجود دارد تغییر دهند. روشهای ریاضی خاصی برای یافتن رابطه دقیق پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی وجود دارند، ولی بسیار طولانی هستند و ارزش عملی چندانی ندارند.

امکان اعمال رابطه پاسخ گذرا - پاسخ فرکانسی موجود در سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ به سیستمهای مرتبه بالاتر، به وجود یک زوج قطب غالب حلقه بسته در این سیستمها بستگی دارد. واضح است که اگر پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه بالا عمده‌تاً توسط یک زوج قطب مزدوج مختلط حلقه بسته تعیین شود، رابطه پاسخ گذرا - پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم را می‌توان به آن سیستم تعمیم داد.

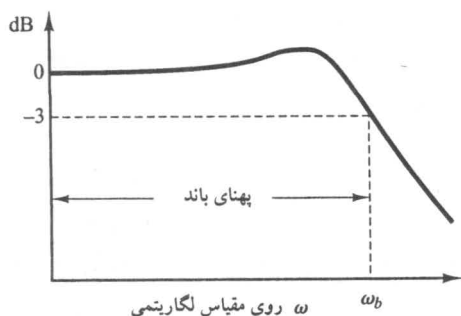
برای سیستمهای خطی مستقل از زمان مرتبه بالایی که یک زوج قطب حلقه بسته غالب دارند، روابط زیر عموماً بین پاسخ گذرای پله و پاسخ فرکانسی برقرار است.

۱. مقدار M_r پایداری نسبی را نشان می‌دهد. عملکرد گذرای مطلوب معمولاً به ازای M_r واقع در گستره $1/4 < M_r < 1/0$ ($0\text{dB} < M_r < 3\text{dB}$) که با نسبت میرایی $0.7 < \zeta < 0.4$ متناظر است، به دست می‌آید. به ازای $M_r > 1/5$ پاسخ گذرا ممکن است چند فراجش داشته باشد. (در حالت کلی M_r بزرگ با فراجش بزرگ در پاسخ گذرا متناظر است. اگر سیستم در معرض نویزی با فرکانسهای حول و حوش ω_r قرار داشته باشد، نویز تقویت می‌شود و در خروجی مشکلاتی جدی بروز می‌کند).

۲. مقدار فرکانس تشدید ω_r سرعت پاسخ گذاری سیستم را نشان می‌دهد. هر چه ω_r بزرگتر باشد، پاسخ زمانی سریعتر است. به عبارت دیگر زمان صعود با ω_r نسبت عکس دارد. برحسب پاسخ فرکانسی حلقه باز، فرکانس طبیعی میرای پاسخ گذرا بین فرکانس عبور بهره و فرکانس عبور فاز است.

۳. در سیستمهای با میرایی کم، فرکانس تشدید ω_r و فرکانس طبیعی میرا ω_d پاسخ پله بسیار به هم نزدیک‌اند.

سه رابطه مذکور در بالا برای ایجاد ارتباط بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای مرتبه بالا بسیار مفیدند، به شرطی که بتوان سیستم را با یک سیستم مرتبه دوم یا یک زوج قطب حلقه بسته مزدوج مختلط تقریب زد. اگر یک سیستم مرتبه بالا دارای این شرایط باشد، می‌توان مشخصات حوزه زمان آن را به زبان مشخصات حوزه فرکانس بیان کرد. به این ترتیب کار طراحی یا جبرانسازی سیستمهای مرتبه بالا بسیار ساده می‌شود.



شکل ۷-۷۶

یک نمودار پاسخ فرکانسی که فرکانس قطع ω_b و پهنای باند را نشان می‌دهد.

علاوه بر حاشیه فاز، حاشیه بهره، قله تشدید، M_r و فرکانس تشدید ω_r کمیات حوزه فرکانس دیگری نیز برای بیان مشخصات کاری سیستمها به کار می‌رود. این کمیات عبارت‌اند از فرکانس قطع، پهنای باند، و آهنگ قطع، که در زیر به تعریف آنها می‌پردازیم.

فرکانس قطع و پهنای باند. شکل ۷-۷۶ را ببینید. فرکانس ω_b که در آن دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته ۳ dB کمتر از دامنه پاسخ فرکانسی در فرکانس صفر است، **فرکانس قطع** نامیده می‌شود. پس

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < \left| \frac{C(j^0)}{R(j^0)} \right| - 3 \text{ dB} \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

برای سیستمی با $|C(j^0)/R(j^0)| = 0 \text{ dB}$

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < -3 \text{ dB} \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

سیستم حلقه بسته مولفه‌های سیگنال دارای فرکانس بالاتر از فرکانس قطع را فیلتر کرده، مولفه‌هایی را عبور می‌دهد که فرکانسهای پایین تر از فرکانس قطع داشته باشند.

گستره فرکانسی $\omega_b \leq \omega \leq 0$ که در آن اندازه $C(j\omega)/R(j\omega)$ بالاتر از -۳ dB است، **پهنای باند** سیستم نامیده می‌شود. پهنای باند فرکانسی را مشخص می‌کند که در آن افت بهره نسبت به مقدار فرکانس پایین شروع می‌شود. پس پهنای باند نشان می‌دهد که سیستم در دنبال کردن ورودی سینوسی چقدر خوب عمل می‌کند. توجه کنید که به ازای ω_n معین، هر چه نسبت میرایی ζ بزرگتر باشد، زمان صعود نیز بزرگتر می‌شود. از طرف دیگر با افزایش ζ پهنای باند کم می‌شود. پس زمان صعود و پهنای باند با هم نسبت عکس دارند. مشخصات پهنای باند را می‌توان با عوامل زیر تعیین کرد:

۱. توانایی سیستم در بازسازی سیگنال ورودی. پهنای باند بزرگ با زمان صعود کوچک، یا پاسخ سریع متناظرست. تقریباً می‌توان گفت که پهنای باند با سرعت پاسخ متناسب است. (مثلاً برای کاهش زمان صعود پاسخ پله با ضریب ۲ باید پهنای باند نیز تقریباً با ضریب ۲ افزایش یابد).
۲. مشخصات فیلتر لازم برای حذف نویز فرکانس بالا.

برای این که سیستم یک ورودی دلخواه را به خوبی دنبال کند باید پهنای باند بزرگی داشته باشد. ولی از

دید نویر پهنای باند سیستم نباید خیلی بزرگ باشد. پس پهنای باند باید دو خواسته متناقض را برآورده کند، و بنابراین برای طراحی خوب معمولاً باید مصالحه‌ای صورت بگیرد. دقت کنید که برای بزرگ بودن پهنای باند باید اجزاء سیستم کیفیت خوبی داشته باشند. بنابراین معمولاً هزینه سیستم با افزایش پهنای باند زیادتر می‌شود.

آهنگ قطع. آهنگ قطع شیب منحنی لگاریتم دامنه در نزدیک فرکانس قطع است. آهنگ قطع توانایی سیستم برای جداسازی سیگنال از نویز را نشان می‌دهد.

توجه کنید که یک منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته با شیب قطع تند ممکن است دامنه قلّه تشدید بزرگی داشته باشد، که نشان می‌دهد حاشیه پایداری سیستم نسبتاً کم است.

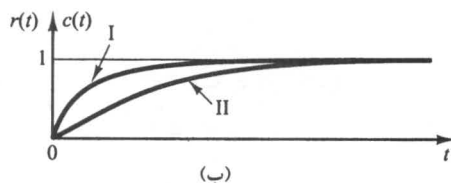
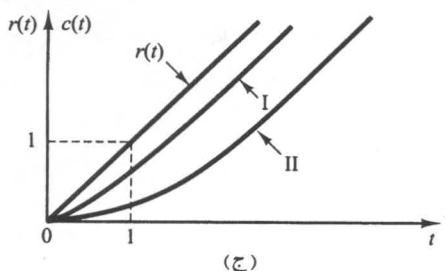
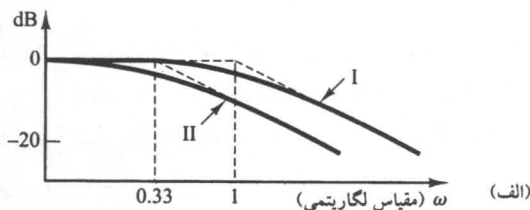
مثال ۷-۲۲

دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{سیستم I: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1} \quad \text{و} \quad \text{سیستم II: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+1}$$

پهنای باند دو سیستم را مقایسه کرده، نشان دهید سیستم با پهنای باند بزرگتر پاسخ سریعتری دارد و بسیار بهتر از سیستم دارای پهنای باند کوچکتر ورودی را دنبال می‌کند.

شکل ۷-۷۷ (الف) منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته دو سیستم را نشان می‌دهد. (منحنی‌های مجانبی با خط چین مشخص شده‌اند). پهنای باند سیستم I، $0 \leq \omega \leq 1$ rad/sec و از آن سیستم II، $0 \leq \omega \leq 0.33$ rad/sec است. شکل‌های ۷-۷۷ (ب) و (ج) به ترتیب پاسخ پله و پاسخ شیب دو سیستم را نشان می‌دهند. سیستم I که پهنای باند آن سه برابر پهنای باند سیستم II است، پاسخ سریعتری دارد و بهتر می‌تواند ورودی را دنبال کند.



شکل ۷-۷۷ مقایسه مشخصات دینامیکی دو سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۷-۲۲. (الف) پاسخ فرکانسی حلقه بسته؛ (ب) منحنی‌های پاسخ پله؛ (ج) منحنی‌های پاسخ شیب.

کاربرد MATLAB برای یافتن قله تشدید، فرکانس تشدید و پهنای باند. قله تشدید ماکزیمم دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته (برحسب دسیبل) است. فرکانس تشدید فرکانسی است که این ماکزیمم دامنه در آن حاصل می‌شود. برای یافتن قله تشدید و فرکانس تشدید می‌توان به صورت زیر از MATLAB استفاده کرد:

```
[mag,phase,w]=bode(sys,w);   یا   [mag,phase,w]=bode(num,den,w)
[Mp,k]=max(mag);
resonant_peak=20*log10(Mp);
resonant_frequency=w(k)
```

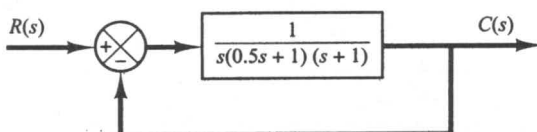
برای یافتن پهنای باند می‌توان خطوط زیر را به برنامه افزود:

```
n=1;
while 20*log10(mag(n)) >= -3; n=n+1;
end
bandwidth=w(n)
```

برای جزئیات بیشتر مثال ۷-۲۳ را ببینید.

سیستم شکل ۷-۷۸ را در نظر بگیرید. با استفاده از MATLAB نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته را رسم کنید. همچنین قله تشدید، فرکانس تشدید، و پهنای باند را بیابید.

مثال ۷-۲۳



شکل ۷-۷۸

سیستم کنترل حلقه بسته.

برنامه ۷-۱۲ MATLAB نمودار بوده سیستم حلقه بسته این سیستم را رسم می‌کند و قله تشدید، فرکانس تشدید، و پهنای باند را نیز به دست می‌دهد. نمودار حاصل در شکل ۷-۷۹ نشان داده شده است. قله تشدید برابر ۲۳۷۷ dB/۵ است. فرکانس تشدید ۷۹۰۶ rad/s و پهنای باند ۱/۲۶۴۹ rad/s است. درستی این مقادیر را می‌توان با توجه به نمودار شکل ۷-۷۹ بررسی کرد.

۸-۷ پاسخ فرکانسی حلقه بسته

سیستمهای با فیدبک واحد

پاسخ فرکانسی حلقه بسته. برای یک سیستم حلقه بسته پایدار دارای فیدبک واحد، پاسخ فرکانسی را می‌توان به سادگی از پاسخ فرکانسی حلقه باز به دست آورد. سیستم با فیدبک واحد شکل ۷-۸۰ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از:

MATLAB Program 7-12

```

nump = [1];
denp = [0.5 1.5 1 0];
sysp = tf(nump,denp);
sys = feedback(sysp,1);
w = logspace(-1,1);
bode(sys,w)
[mag,phase,w] = bode(sys,w);
[Mp,k] = max(mag);
resonant_peak = 20*log10(Mp)

resonant_peak =
    5.2388

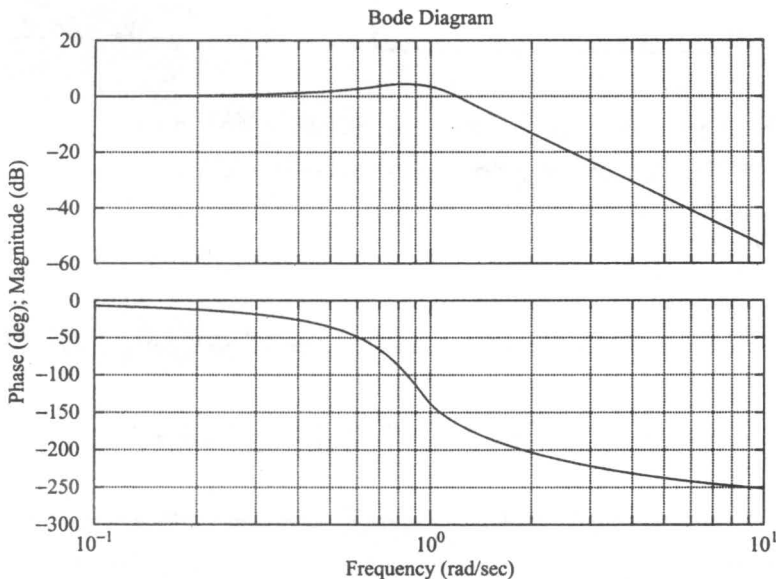
resonant_frequency = w(k)

resonant_frequency =
    0.7906

n = 1;
while 20*log(mag(n))>= -3; n = n + 1;
end
bandwidth = w(n)

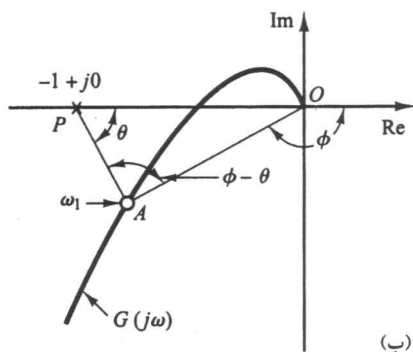
bandwidth =
    1.2649

```

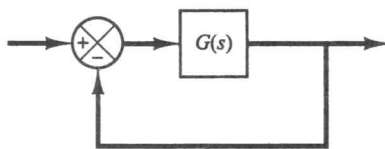


شکل ۷-۷۹

نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۷-۷۸.



(ب)



(الف)

شکل ۸-۷

(الف) سیستم با فیدبک واحد: (ب) تعیین پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

در نمودار نایکویست یا قطبی شکل ۸-۷ (ب) بردار $\overline{OA}$ مقدار $G(j\omega_1)$ را نشان می‌دهد که در آن ω_1 فرکانس در نقطه A است. طول بردار $\overline{OA}$ برابر $|G(j\omega_1)|$ است و زاویه بردار $\overline{OA}$ برابر $\angle G(j\omega_1)$. بردار $\overline{PA}$ ، بردار از نقطه $-1 + j0$ به مکان هندسی نایکویست، مقدار $1 + G(j\omega_1)$ را نشان می‌دهد. بنابراین نسبت $\overline{OA}$ به $\overline{PA}$ پاسخ فرکانسی حلقه بسته را نشان می‌دهد، یا

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{G(j\omega_1)}{R(j\omega_1)}$$

اندازه تابع تبدیل حلقه بسته در $\omega = \omega_1$ با نسبت اندازه‌های $\overline{OA}$ و $\overline{PA}$ برابر است. زاویه فاز تابع تبدیل حلقه بسته در $\omega = \omega_1$ زاویه بین بردارهای $\overline{OA}$ و $\overline{PA}$ یعنی $\phi - \theta$ شکل ۸-۷ (ب) است. با اندازه گیری دامنه و زاویه فاز در فرکانسهای مختلف می‌توان منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته را یافت. اجازه دهید دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته را با M و زاویه فاز آن را با α مشخص کنیم. یعنی

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\alpha}$$

در زیر مکان هندسی دامنه - ثابت و مکان هندسی فاز - ثابت را می‌یابیم. این مکانهای هندسی برای تعیین پاسخ فرکانسی حلقه بسته از نمودار نایکویست یا نمودار قطبی به کار می‌آیند.

مکان هندسی دامنه - ثابت (دایره‌های M). برای یافتن مکان هندسی دامنه - ثابت ابتدا به این نکته توجه کنید که $G(j\omega)$ کمیتی مختلط است و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$G(j\omega) = X + jY$$

که در آن X و Y کمیتی حقیقی‌اند. پس M عبارت است از:

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

و M^{γ} برابرست با

$$M^{\gamma} = \frac{X^{\gamma} + Y^{\gamma}}{(1 + X)^{\gamma} + Y^{\gamma}}$$

پس

$$X^{\gamma}(1 - M^{\gamma}) - 2M^{\gamma}X - M^{\gamma} + (1 - M^{\gamma})Y^{\gamma} = 0 \quad (22-7)$$

به ازای $M=1$ معادله (22-7) نشان می‌دهد که $X = -\frac{1}{\gamma}$. این معادله خط راستی موازی با محور Y است که از نقطه $(-\frac{1}{\gamma}, 0)$ می‌گذرد.

به ازای $M \neq 1$ معادله (22-7) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$X^{\gamma} + \frac{2M^{\gamma}}{M^{\gamma}-1}X + \frac{M^{\gamma}}{M^{\gamma}-1} + Y^{\gamma} = 0$$

با افزودن جمله $M^{\gamma}/(M^{\gamma}-1)^2$ به دو طرف این معادله به دست می‌آوریم

$$\left(X + \frac{2M^{\gamma}}{M^{\gamma}-1}\right)^{\gamma} + Y^{\gamma} = \frac{M^{\gamma}}{(M^{\gamma}-1)^2} \quad (23-7)$$

معادله (23-7) معادله دایره‌ای به مرکز $Y=0$ و $X = -M^{\gamma}/(M^{\gamma}-1)$ و شعاع $|M/(M^{\gamma}-1)|$ است.

پس مکانهای هندسی M - ثابت در صفحه $G(s)$ یک دسته دایره است. مرکز و شعاع دایره را به ازای هر M خاص می‌توان به سادگی یافت. برای مثال به ازای $M=1/3$ مرکز دایره $(0, -2/45)$ و شعاع آن برابر $1/88$ است. شکل ۷-۸۱ دسته‌ای از دواير M - ثابت را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که با بزرگتر شدن M نسبت به ۱، دایره‌های M کوچکتر شده به نقطه $0 + j\omega - 1$ میل می‌کند. به ازای $M > 1$ مراکز دواير M - ثابت سمت چپ نقطه $0 + j\omega - 1$ قرار دارند. به نحوی مشابه هر چه M از ۱ کوچکتر شود، دایره‌ها کوچکتر شده، به مبدأ همگرا می‌شوند. به ازای $0 < M < 1$ مراکز دواير M ثابت سمت راست مبدأ قرار دارند. $M=1$ مکان هندسی نقاط همفاصله از مبدأ و $0 + j\omega - 1$ است. چنانچه قبلاً گفتیم این مکان هندسی خط راستی موازی محور موهومی است که از نقطه $(-\frac{1}{\gamma}, 0)$ می‌گذرد. (دواير M - ثابت متناظر با $M > 1$ سمت چپ خط $M=1$ و دواير M - ثابت متناظر با $0 < M < 1$ سمت راست این خط قرار دارند.) دواير M نسبت به خط $M=1$ و نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند.

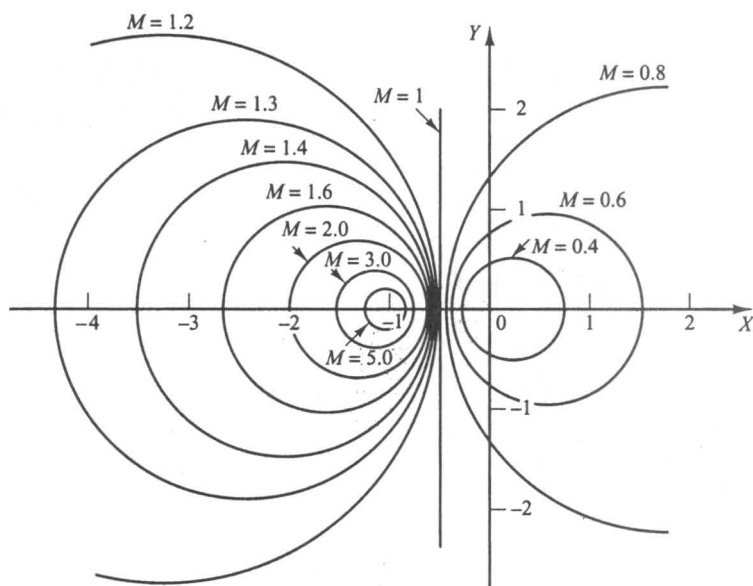
مکان هندسی فاز ثابت (دایره‌های N). حال زاویه فاز α را برحسب X و Y دست می‌آوریم. چون

$$|e^{j\alpha}| = \left| \frac{X + jY}{1 + X + jY} \right|$$

زاویه فاز α عبارت است از:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1+X}\right)$$

با تعریف



شکل ۸-۷
دسته‌ای از دواير M ثابت.

$$\tan \alpha = N$$

به دست می‌آوریم

$$N = \tan \left[\tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{Y}{1+X} \right) \right]$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

چون

نتیجه می‌گیریم

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \left(\frac{Y}{1+X} \right)} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

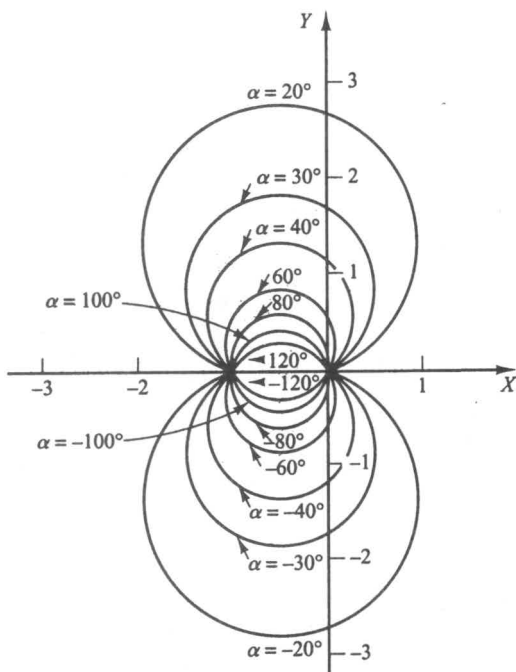
$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N} Y = 0$$

یا

افزودن $\left(\frac{1}{4} \right) + 1/(2N)^2$ به دو طرف این معادله به دست می‌دهد

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2 \quad (24-7)$$

این معادله دایره‌ای به مرکز $X = -\frac{1}{2}$, $Y = 1/(2N)$ و شعاع $\sqrt{(1/4) + 1/(2N)^2}$ است. مثلاً به ازای $\alpha = 3^\circ$, $N = \tan \alpha = 0.577$ مرکز و شعاع دایره متناظر آن به ترتیب $(-0.5, 0.866)$ و یک است. چون معادله (۲۴-۷)



شکل ۷-۸۲

دسته‌ای از دواير N ثابت.

به ازای $X=Y=0$ و $Y=0$ و $X=-1$ مستقل از مقدار N ارضا می‌شود. تمام دایره‌های N از مبدا و نقطه $-1+j0$ می‌گذرند، با یافتن مقدار N مکان هندسی $-N$ ثابت را به راحتی می‌توان رسم کرد. شکل ۷-۸۲ دسته‌ای از دایره‌های N را با α های مختلف نشان می‌دهد.

باید تذکر دهیم که مکان هندسی $-N$ ثابت به ازای یک α تمام دایره نیست، بلکه تنها کمانی از آن است. به عبارت دیگر کمانهای $\alpha=3^\circ$ و $\alpha=15^\circ$ بخشهایی از یک دایره هستند. علت این است که با افزودن $\pm 180^\circ$ (و مضارب آن) به یک زاویه تانژانت تغییر نمی‌کند.

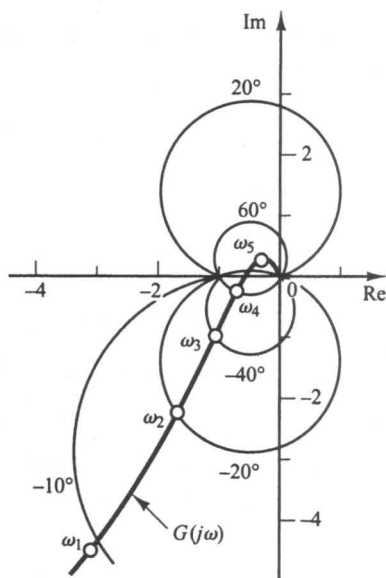
استفاده از دایره‌های M و N قادرمان می‌کند بدون محاسبه دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه بسته در فرکانسهای مختلف، پاسخ فرکانسی کامل حلقه بسته را از پاسخ فرکانسی حلقه باز $G(j\omega)$ به دست آوریم. نقاط برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و دایره‌های M و N مقادیر M و N را به ازای فرکانسهای روی $G(j\omega)$ به دست می‌دهند.

دایره‌های N چند مقداری هستند، از این جهت که دایره $\alpha=\alpha_1$ و دایره $\alpha=\alpha_1 \pm 180^\circ$ یکسان‌اند ($n=1,2,\dots$). در استفاده از دایره‌های N برای تعیین زاویه فاز سیستمها حلقه بسته باید تعبیر درست α به کار برده شود. برای پرهیز از هر نوع اشتباه، از فرکانس صفر، که با $\alpha=0^\circ$ متناظر است، شروع کنید و به فرکانسهای بالاتر بروید. منحنی زاویه فاز باید پیوسته باشد.

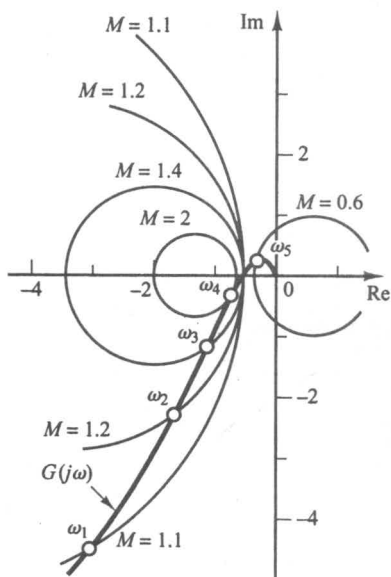
نقاط برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و دایره‌های M ، مقادیر M در فرکانسهای مشخص شده روی مکان هندسی $G(j\omega)$ را به دست می‌دهند. پس دایره M ثابتی که کوچکترین شعاع را دارد، و بر مکان هندسی

$G(j\omega)$ مماس است، مقدار قله تشدید M_r را به دست می‌دهد. اگر بخواهیم مقدار قله تشدید از مقدار معینی کمتر باشد، منحنی $G(j\omega)$ نباید نقطه بحرانی (نقطه $-1+j0$) را دربر گیرد و در همین حال نباید دایره M دارای آن مقدار معین را قطع کند.

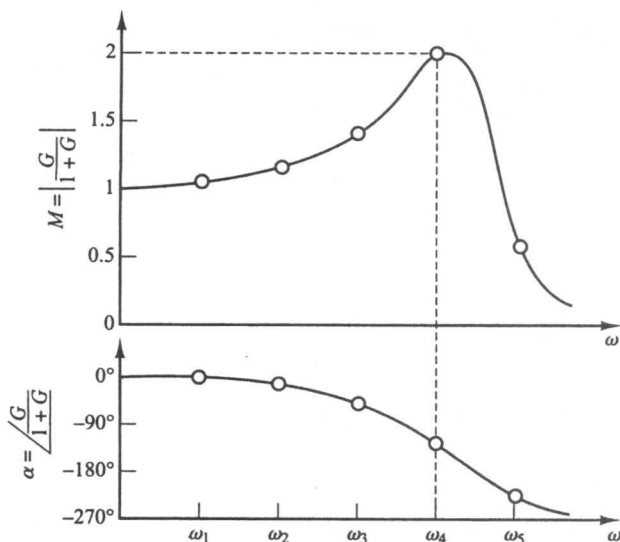
شکل ۸۳-۷ (الف) مکان هندسی $G(j\omega)$ رسم شده روی دایره‌های M را نشان می‌دهد. شکل ۸۳-۷ (ب)



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۸۳-۷

(الف) مکان هندسی $G(j\omega)$

رسم شده روی دایره‌های M .

(ب) مکان هندسی $G(j\omega)$

رسم شده روی دایره‌های N ؛

(ج) منحنی پاسخ فرکانسی

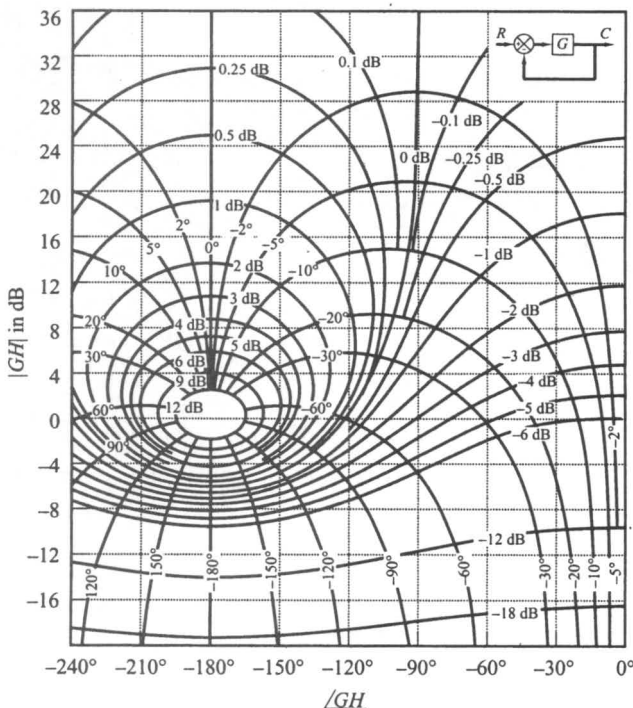
حلقه بسته.

مکان هندسی رسم شده روی دایره‌های N را نشان می‌دهد. از این منحنی‌ها می‌توان پاسخ فرکانسی حلقه بسته را به دست آورد. می‌بینیم که دایره $M=1$ مکان هندسی $G(j\omega)$ را در فرکانس $\omega=\omega_1$ قطع می‌کند. یعنی در این فرکانس دامنه تابع تبدیل حلقه بسته $M=2$ (الف) دایره $M=2$ درست بر منحنی $G(j\omega)$ مماس است. پس تنها به ازای یک نقطه $G(j\omega)$ دامنه $|C(j\omega)R(j\omega)|$ برابر ۲ است. شکل ۷-۸۳ (ج) منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته را نشان می‌دهد. منحنی بالایی M را برحسب فرکانس نشان می‌دهد و منحنی پایینی منحنی زاویه فاز α برحسب ω است.

مقدار قله تشدید M مقدار متناظر با کوچکترین دایره M مماس بر منحنی $G(j\omega)$ است. پس در نمودار نایکویست مقدار قله تشدید M_r فرکانس تشدید ω_r را می‌توان از دایره M مماس بر مکان هندسی $G(j\omega)$ به دست آورد. (در این مثال $M_r=2$ و $\omega_r=\omega_1$).

نمودار نیکولس. در مسائل طراحی ترسیم مکانهای M و N در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز مناسبتر است. نمودار متشکل از مکانهای هندسی M و N در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز، نمودار نیکولس نامیده می‌شود. مکان هندسی $G(j\omega)$ رسم شده بر روی نمودار نیکولس هم مشخصه بهره و هم مشخصه فاز تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به دست می‌دهد. شکل ۷-۸۴ این نمودار را برای زاویه‌های فاز بین 0° تا -240° نشان می‌دهد.

توجه کنید که نقطه بحرانی $1+j\omega$ در نمودار نیکولس به نقطه $(-180^\circ, -1)$ نگاشته می‌شود. در



شکل ۷-۸۴

نمودار نیکولس.

نمودار نیکولس منحنی‌های دامنه حلقه بسته ثابت و فاز ثابت رسم شده‌اند. طراح می‌تواند حاشیه‌فاز، حاشیه بهره، دامنه قله تشدید، فرکانس تشدید و پهنای باند سیستم را به صورت ترسیمی از روی مکان هندسی حلقه باز $G(j\omega)$ به دست آورد.

نمودار نیکولس نسبت به محور -180° متقارن است. مکانهای هندسی M و N در هر 360° تکرار می‌شوند، و در فواصل 180° درجه‌ای متقارن‌اند. مرکز مکانهای هندسی M نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است. نمودار نیکولس برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز، بسیار مناسب است. اگر منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز روی نمودار نیکولس رسم شود، نقاط برخورد منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز $G(j\omega)$ و مکانهای هندسی M و N مقادیر دامنه M و زاویه فاز α پاسخ فرکانسی حلقه بسته را در فرکانسهای مختلف به دست می‌دهد. اگر مکان هندسی $G(j\omega)$ مکان هندسی $M = M_r$ را قطع نکند، بلکه بر آن مماس باشد، M_r مقدار قله تشدید پاسخ فرکانسی حلقه بسته است. فرکانس تشدید را فرکانس متناظر با نقطه تماس تعیین می‌کند.

به عنوان مثال سیستم دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

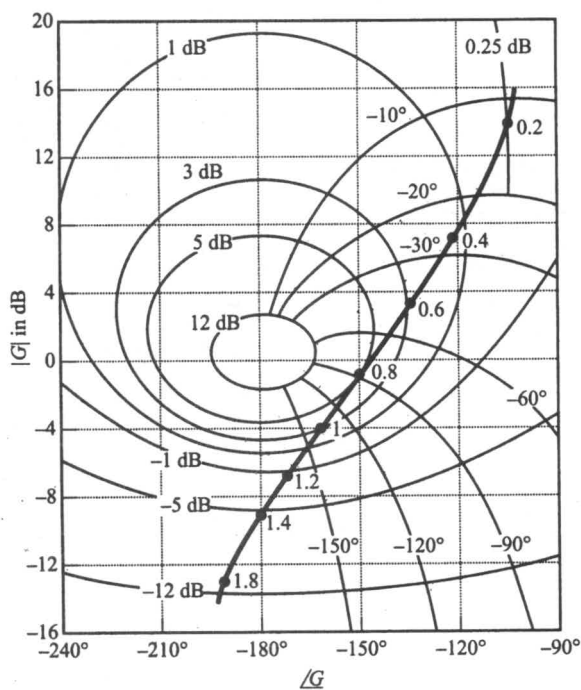
$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \quad K=1$$

برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته با استفاده از نمودار نیکولس، باید مکان هندسی $G(j\omega)$ بر روی صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز رسم شود، به این منظور می‌توان از MATLAB یا نمودار بوده استفاده کرد. شکل ۸۵-۷ (الف) مکان هندسی $G(j\omega)$ را بر روی مکانها M و N نشان می‌دهد. منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته را می‌توان با خواندن دامنه و فاز در فرکانسهای مختلف مکان هندسی $G(j\omega)$ به صورت نشان داده شده در شکل ۸۵-۷ (ب) رسم کرد. چون مکان هندسی $M = 5 \text{ dB}$ بر مکان هندسی $G(j\omega)$ مماس است، دامنه قله تشدید $M_r = 5 \text{ dB}$ است. فرکانس تشدید 0.8 rad/sec است.

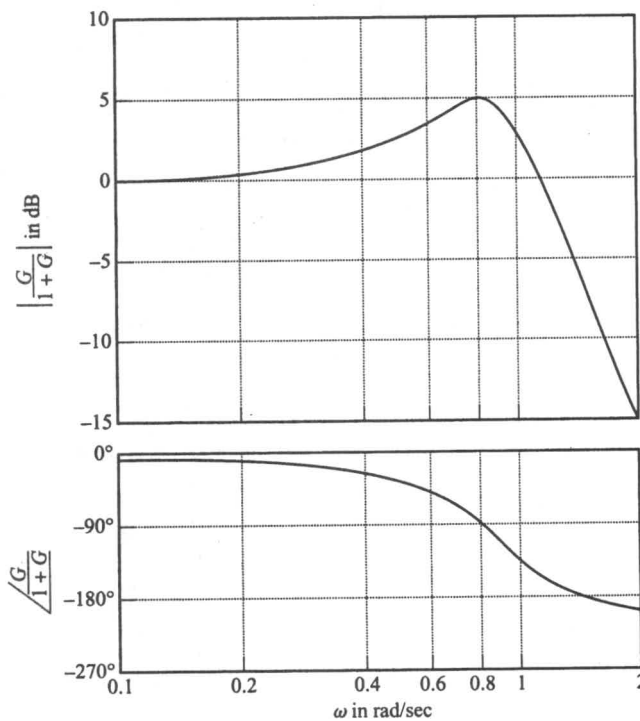
توجه کنید که فرکانس عبور فاز را نقطه برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و محور -180° تعیین می‌کند (برای این سیستم $1/4 \text{ rad/sec}$) و فرکانس عبور بهره محل برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و محور 0 dB است (برای این سیستم 0.76 rad/sec). حاشیه فاز فاصله افقی (برحسب درجه) بین نقطه عبور بهره و نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است. حاشیه بهره فاصله قائم (برحسب دسیبل) نقطه عبور فاز و نقطه بحرانی است.

پهنای باند سیستم حلقه بسته را می‌توان از مکان هندسی $G(j\omega)$ رسم شده بر روی نمودار نیکولس به راحتی یافت، فرکانس نقطه برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و مکان هندسی $M = -3 \text{ dB}$ پهنای باند را به دست می‌دهد.

با تغییر بهره حلقه باز K شکل مکان هندسی $G(j\omega)$ در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز بی‌تغییر می‌ماند، و تنها در امتداد محور قائم بالا (با افزایش K) یا پایین (با کاهش K) می‌رود. بنابراین مکان هندسی $G(j\omega)$ مکانهای هندسی M و N را در نقاطی متفاوت قطع کرده، منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته متفاوتی به دست می‌آید. به ازای بهره کوچک K مکان هندسی به هیچ یک از مکانهای هندسی M مماس نمی‌شود، یعنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته تشدید ندارد.



(الف)



(ب)

شکل ۷-۱۵

$G(j\omega)$ منحنی (الف)

بر روی نمودار نیکولس؛

(ب) منحنیهای پاسخ فرکانسی

حلقه بسته.

مثال ۷-۲۴

سیستم کنترل دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)}$$

بهره K را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $M_r = 1/4$.

اولین گام تعیین بهره K رسم نمودار قطبی تابع زیر است

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

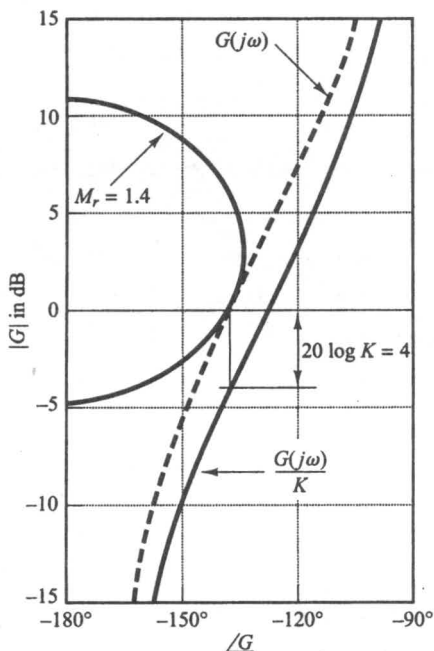
شکل ۷-۸۶ مکان هندسی $M_r = 1/4$ و مکان هندسی $G(j\omega)/K$ را نشان می‌دهد. تغییر بهره زاویه فاز را تغییر نمی‌دهد و تنها اثر آن حرکت قائم منحنی به سمت بالا ($K > 1$) و پایین ($K < 1$) است.

شکل ۷-۸۶ نشان می‌دهد برای مماس شدن مکان هندسی $G(j\omega)/K$ به مکان هندسی $M_r = 1/4$ ، مکان هندسی $G(j\omega)$ باید به اندازه ۴ dB بالا برود. این جابجایی قائم، بهره لازم برای رسیدن به M_r مطلوب را نشان می‌دهد. پس با حل معادله

$$20 \log K = 4$$

به دست می‌آوریم

$$K = 1.59$$



شکل ۷-۸۶

تعیین بهره K با استفاده از نمودار نیکولس.

۷-۹ تعیین تجربی تابع تبدیل

گام اول تحلیل و طراحی یک سیستم کنترل یافتن مدل ریاضی فرایند مورد نظر است. یافتن مدل به روش تحلیلی می‌تواند بسیار مشکل باشد. ممکن است مجبور شویم این مدل را با تحلیل تجربی به دست آوریم. اهمیت روشهای پاسخ فرکانسی این است که تابع تبدیل فرایند یا هر یک از اجزاء آن را می‌توان با اندازه‌گیری‌های ساده پاسخ فرکانسی به دست آورد.

اگر نسبت دامنه و جابه‌جایی فاز در گستره فرکانسی مورد نظر در تعدادی فرکانس اندازه گرفته شود و تعداد نقاط به دست آمده کافی باشد می‌توان نمودار بوده سیستم را رسم کرد. سپس می‌توان تابع تبدیل را از تقریبهای مجانبی به دست آورد. منحنی مجانبی لگاریتم دامنه را با چند پاره‌خط رسم می‌کنیم. با چند سعی و خطا و جابه‌جا کردن‌های فرکانسی گوشه‌ای معمولاً می‌توان یک منحنی مجانبی دارای تطبیق خوب با منحنی اصلی به دست آورد. (توجه کنید که اگر مقیاس فرکانس برحسب دور بر ثانیه باشد نه برحسب رادیان ثانیه، قبل از محاسبه ثابت زمانی‌ها باید فرکانسهای گوشه‌ای به رادیان بر ثانیه تبدیل شود).

مولدهای سیگنال سینوسی. برای آزمایشهای پاسخ فرکانسی مولدهای سینوسی خوبی موجود است. سیگنال لازم ممکن است مکانیکی، الکتریکی یا نیوماتیکی باشد. گستره فرکانسی مورد نیاز برای آزمایش برای سیستمهای با ثابت زمانی بزرگ تقریباً 0.001 Hz تا 10 Hz و برای سیستمهای با ثابت زمانی کوچک 0.1 Hz تا 1000 Hz است. سیگنال سینوسی باید عاری از هارمونیکهای اضافی و تداخل باشد.

در گستره‌های فرکانسی خیلی پایین (زیر 0.1 Hz) می‌توان از مولدهای سیگنال مکانیکی (و در صورت لزوم به همراه تراگردانه‌های نیوماتیکی یا الکتریکی مناسب) استفاده کرد. در گستره فرکانسی 0.1 Hz تا 1000 Hz می‌توان یک مولد سیگنال سینوسی مناسب (و در صورت لزوم تراگردان مناسب) به کار برد.

تعیین توابع تبدیل می‌نیم فاز از نمودار بوده. چنانچه قبلاً گفتیم می‌نیم فاز بودن یک سیستم را می‌توان با توجه به منحنی پاسخ فرکانسی و بررسی مشخصات فرکانس بالای آن تعیین کرد.

برای تعیین تابع تبدیل ابتدا مجانبهای منحنی به دست آمده از آزمایش را رسم می‌کنیم. شیب مجانبها باید مضاربی از $\pm 20 \text{ dB/dec}$ باشد. اگر در $\omega = \omega_1$ شیب منحنی تجربی لگاریتم دامنه از -20 dB/dec به -40 dB/dec برسد، در تابع تبدیل عامل $1/[1+j(\omega/\omega_1)]$ وجود دارد. اگر در $\omega = \omega_2$ شیب به اندازه -40 dB/dec تغییر کند، باید عاملی مرتبه دوم به شکل زیر در تابع تبدیل دخیل باشد

$$\frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

فرکانس طبیعی نامیرای این عامل مرتبه دوم با فرکانس گوشه‌ای ω_2 برابر است، نسبت میرایی ζ را می‌توان با اندازه گیری دامنه قلّه تشدید حول فرکانس گوشه‌ای ω_2 منحنی تجربی، و مقایسه آن با شکل ۷-۹ به دست آورد.

پس از تعیین عاملهای تابع تبدیل $G(j\omega)$ ، می‌توان بهره را با توجه به بخش فرکانس پایین منحنی لگاریتم دامنه به دست آورد. چون عاملهایی مثل $1 + j(\omega/\omega_1)$ و $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2]$ با میل ω به صفر (فرکانسهایی بسیار پایین) برابر یک می‌شود، تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^{\lambda}}$$

در بسیاری از سیستمهای عملی، λ برابر ۰، ۱، یا ۲ است.

۱. برای $\lambda = 0$ یا سیستم نوع ۰

$$G(j\omega) = K \quad \omega \ll 1$$

یا

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K \quad \omega \ll 1$$

مجانب فرکانس پایین خطی افقی در $20 \log K$ dB است. مقدار K را می‌توان با توجه به این مجانب افقی به دست آورد.

۲. برای $\lambda = 1$ یا سیستم نوع ۱

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \quad \omega \ll 1$$

یا

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \omega \quad \omega \ll 1$$

که می‌گوید مجانب فرکانس پایین دارای شیب -20 dB/dec است. فرکانسی که در آن مجانب فرکانس پایین (یا امتداد آن) خط 0 dB را قطع می‌کند، از لحاظ عددی با K برابر است.

۳. برای $\lambda = 2$ یا سیستم نوع ۲

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} \quad \omega \ll 1$$

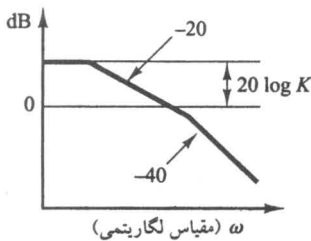
یا

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 40 \log \omega \quad \omega \ll 1$$

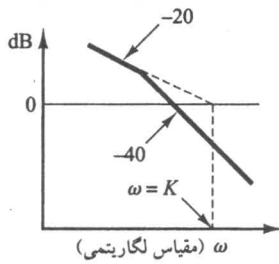
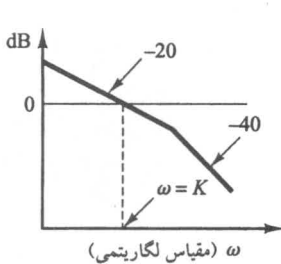
شیب مجانب فرکانس پایین -40 dB/dec است. فرکانس محل برخورد این مجانب (یا امتداد آن) و خط 0 dB از لحاظ عددی برابر $\sqrt{K}$ است.

شکل ۷-۸۷ نمونه‌هایی از منحنی لگاریتم دامنه سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ را نشان می‌دهد، فرکانس مرتبط با بهره K در هر حالت مشخص شده است.

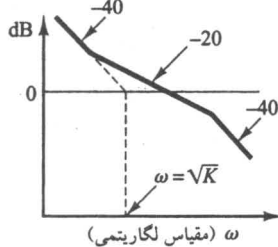
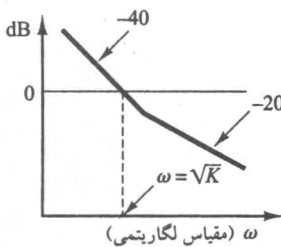
منحنی زاویه فاز به دست آمده از آزمایش امکان امتحان تابع تبدیل به دست آمده از منحنی لگاریتم دامنه را فراهم می‌کند. برای سیستمهای می‌نیم فاز منحنی زاویه فاز تجربی باید تطابق خوبی با منحنی زاویه فاز نظری



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۷-۸۷

(الف) منحنی لگاریتم دامنه

سیستم نوع ۰؛ (ب) منحنی

لگاریتم دامنه سیستم نوع ۱؛

(ج) منحنی لگاریتم دامنه

سیستم نوع ۲. (شبهها)

برحسب dB/dec بیان شده است.

تعیین شده توسط تابع تبدیل به دست آمده در بالا داشته باشد. این دو منحنی فاز باید هم در فرکانسهای بالا و هم در فرکانسهای پایین دقیقاً منطبق باشند. اگر زاویه فاز تجربی در فرکانسهای خیلی بالا (در مقایسه با فرکانسهای گوشه‌ای) برابر $(q-p) - 90^\circ$ نباشد، تابع تبدیل باید تبدیل یک سیستم غیرمی‌نیم فاز باشد؛ p و q به ترتیب درجه چندجمله‌ایهای صورت و مخرج هستند.

توابع تبدیل غیرمی‌نیم فاز. اگر در فرکانسهای بالا تاخیر فاز محاسبه شده از آنچه به طریق تجربی به دست آمده، 180° کمتر باشد، یکی از صفرهای تابع تبدیل باید در نیمه راست صفحه s باشد نه در نیمه چپ.

اگر تفاوت تاخیر فاز تجربی تابعی خطی از فرکانس باشد، در سیستم تاخیر انتقال یا زمان مرده وجود دارد.

اگر تابع تبدیل را به صورت زیر فرض کنیم

$$G(s) e^{-Ts}$$

که در آن $G(s)$ نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s است، آنگاه

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega) e^{-j\omega T}] &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega) + e^{-j\omega T}] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega) - \omega T] = 0 - T = -T \end{aligned}$$

که از ثابت بودن زاویه $|G(j\omega)|$ در $\omega \rightarrow \infty$ استفاده کرده ایم. پس با توجه به این معادله می توانیم اندازه تأخیر انتقالی T را بیابیم.

چند تذکر راجع به یافتن تجربی تابع تبدیل

۱. معمولاً اندازه گیری دقیق دامنه از اندازه گیری دقیق فاز ساده تر است. اندازه گیری جابه جایی فاز خطاهایی ناشی از ابزارها یا سوء تعبیر نتایج آزمایشها را دربر دارد.
۲. منحنی دامنه برحسب فرکانس ابزارهای به کار رفته برای اندازه گیری خروجی باید هموار باشد. به علاوه زاویه فاز آن نیز باید با فرکانس متناسب باشد.
۳. سیستمهای فیزیکی چند نوع اثر غیرخطی دارند. بنابراین لازم است دامنه سیگنال ورودی سینوسی به دقت زیر نظر گرفته شود. اگر دامنه سیگنال ورودی از حدی بزرگتر باشد، سیستم اشباع می شود و آزمایش پاسخ فرکانسی نتایج غیردقیقی به دست می دهد. دامنه های کوچک نیز خطای ناشی از ناحیه مرده را به همراه دارد. بنابراین دامنه سیگنال سینوسی باید به دقت انتخاب شود. باید شکل موج خروجی سیستم به دقت سنجیده شود تا از سینوسی بودن آن و عمل کردن سیستم در ناحیه خطی مطمئن شویم. (در صورتی که سیستم در ناحیه غیرخطی کار کند، شکل موج خروجی سینوسی نیست).
۴. اگر سیستم مورد نظر روزها و هفته ها پیوسته کار می کند، برای آزمونهای پاسخ فرکانسی لازم نیست عمل عادی سیستم را متوقف کرد. می توان سیگنال سینوسی آزمون را با ورودی عادی سیستم جمع کرد. برای تعیین تابع تبدیل سیستم در حین کار عادی، گاهی اوقات از سیگنالهای آماری (سیگنال نویز سفید) استفاده می شود. با استفاده از توابع همبستگی می توان تابع تبدیل سیستم را بدون قطع کار عادی آن تعیین کرد.

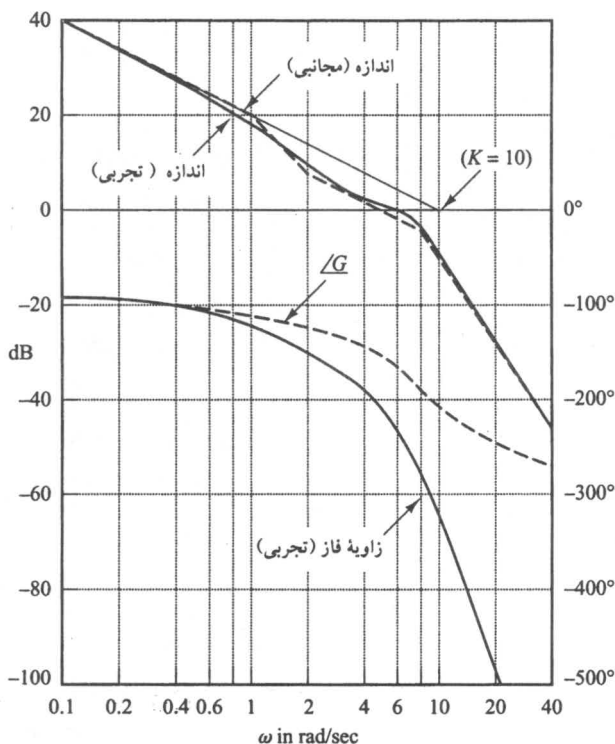
تابع تبدیل سیستمی را که منحنیهای پاسخ فرکانسی تجربی آن به صورت شکل ۷-۸۸ است، بیابید.

مثال ۷-۲۵

گام اول تعیین تابع تبدیل، تقریب زدن منحنی لگاریتم دامنه با مجانبهای دارای شیب ± 20 dB/dec و مضارب آن است. به این ترتیب منحنیهای خط چین شکل ۷-۸۸ به دست می آید. سپس فرکانسهای گوشه ای را تخمین می زنیم. برای سیستم شکل ۷-۸۸ می توان تابع تبدیلی به شکل زیر پیشنهاد کرد

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega) \left[1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\lambda} \right) + \left(j\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right]}$$

نسبت میرایی ζ با بررسی قله تشدید در حوالی $\omega = 6$ rad/sec تعیین می شود. با توجه به شکل ۷-۹ به دست می آوریم $\zeta = 0.5$. بهره K از لحاظ عددی با فرکانس محل برخورد مجانب فرکانس پایین و خط 0 dB برابر



شکل ۷-۸۸

نمودار بوده یک سیستم
(منحنی‌های ممتد به صورت
تجربی تعیین شده‌اند).

است. مقدار K را برابر 10° به دست می‌آوریم. پس فرضی عبارت است از

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega) \left[1 + \left(j\frac{\omega}{8} \right) + \left(j\frac{\omega}{8} \right)^2 \right]}$$

$$G(s) = \frac{320(s+2)}{s(s+1)(s^2 + 8s + 64)}$$

یا

این تابع تبدیل را فرضی نامیدیم، زیرا هنوز منحنی فاز را بررسی نکرده‌ایم.

پس از تعیین فرکانسهای گوشه‌ای می‌توان منحنی زاویه فاز مربوط به هر عامل تبدیل را به سادگی رسم کرد. با جمع کردن منحنی‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آید. منحنی زاویه فاز کل تابع تبدیل حاصل می‌شود. منحنی زاویه فاز در $G(j\omega)$ شکل ۷-۸۸ با $\angle G$ مشخص شده است. شکل ۷-۸۸ به وضوح اختلاف منحنی فاز محاسبه شده و منحنی فاز تجربی را نشان می‌دهد. در فرکانسهای بالا اختلاف دو منحنی خطی با شیب ثابت است. پس این اختلاف می‌تواند از تاخیر انتقال ناشی شده باشد.

پس تابع تبدیل کامل را به صورت $G(s)e^{-Ts}$ فرض می‌کنیم. اختلاف دو منحنی در فرکانسهای بالا -0.2ω است. بنابراین مقدار T به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} \angle G(j\omega) e^{-j\omega T} = -T = -0.2$$

یا

$$T = 0.2 \text{ sec}$$

به این ترتیب وجود تاخیر انتقالی ثابت شده و تابع تبدیل کامل به دست آمده برای منحنی‌های تجربی به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G(s)e^{-Ts} = \frac{320(s+2)e^{-0.2s}}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$

۱۰-۷ طراحی سیستم کنترل

با استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی

در فصل ۶ تحلیل و طراحی به روش مکان هندسی ریشه‌ها را بیان کردیم. نشان دادیم که روش مکان هندسی ریشه‌ها برای بازسازی ویژگی‌های پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته بسیار مفید است. رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها مستقیماً اطلاعات مربوط به پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته را به ما می‌دهد. ولی رهیافت پاسخ فرکانسی این اطلاعات را به صورت غیرمستقیم به دست می‌دهد. ولی چنانچه در این فصل خواهیم دید رهیافت پاسخ فرکانسی برای طراحی سیستم‌های کنترل بسیار مفید است.

در بسیاری از مسائل طراحی، مهندس طراح باید هر دو رهیافت طراحی را به کار برد، و جبران‌سازی را برگزیند که پاسخ حلقه بسته مطلوب را دقیقتر به دست می‌دهد.

در طراحی سیستم کنترل عملکرد حوزه زمان معمولاً مهمترین عملکرد است. در رهیافت پاسخ فرکانسی عملکرد پاسخ گذرا را به نحوی غیرمستقیم مشخص می‌کنیم. در این رهیافت عملکرد پاسخ گذرا برحسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، دامنه قلّه تشدید (که تقریبی از میرایی سیستم به دست می‌دهند)؛ و ثابتهای خطای ماندگار (که دقت حالت ماندگار را تعیین می‌کنند) بیان می‌شود. گرچه همبستگی پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی یک همبستگی غیرمستقیم است، ولی با استفاده از نمودار بوده به راحتی می‌توان به مشخصات پاسخ فرکانسی مطلوب دست یافت.^۸

پس از طراحی سیستم حلقه باز می‌توان قطبها و صفرهای حلقه بسته را تعیین کرد. مشخصات پاسخ گذرا باید بررسی شود تا معلوم شود سیستم طراحی شده خواسته‌های حوزه زمان را برآورده می‌کند یا نه. در صورت برآورده نشدن خواسته‌ها باید اصلاحاتی به عمل آورد و تحلیل را تکرار کرد تا نتایج مطلوب به دست آید.

طراحی در حوزه فرکانس ساده و سراسر است. نمودار پاسخ فرکانسی به روشنی نشان می‌دهد که سیستم چگونه باید اصلاح شود، هر چند پیش‌بینی دقیق کمی مشخصات پاسخ گذرا ممکن نیست. رهیافت پاسخ فرکانسی را می‌توان به سیستم‌ها یا اجزایی که مشخصات دینامیکی‌شان به صورت اطلاعات پاسخ فرکانسی داده شده است، اعمال کرد. به خاطر سختی یافتن معادلات حاکم بر بعضی عناصر مانند عناصر نیوماتیکی و هیدرولیکی، مشخصات دینامیکی این عناصر معمولاً به صورت تجربی با آزمایشهای پاسخ فرکانسی تعیین می‌شود. با استفاده از نمودار بوده می‌توان نمودارهای پاسخ فرکانسی به دست آمده از آزمایش را به آسانی با

دیگر نمودارهای پاسخ فرکانسی ترکیب کرد. همچنین توجه کنید که رهیافت پاسخ فرکانسی برای بررسی نویزهای فرکانس بالا از هر رهیافت دیگری کارآمدتر است.

طراحی در حوزه فرکانس دو روش اساسی دارد، یکی روش نمودار قطبی و یکی روش نمودار بوده. با افزودن جبران ساز نمودار قطبی تغییر شکل می دهد و باید نمودار دیگری رسم شود، این کار وقت گیر است و بنابراین مناسب نیست. ولی نمودار بوده جبران ساز را می توان به سادگی با نمودار بوده اصلی جمع کرد، و ترسیم نمودار بوده کامل کاری ساده است. همچنین با تغییر بهره حلقه باز منحنی دامنه به سمت بالا یا پایین جابه جا می شود و شبیهای منحنی تغییر نمی کند، منحنی فاز نیز بدون تغییر می ماند. بنابراین در مقاصد طراحی کار با نمودار بوده بهتر است.

روش متداول طراحی بر اساس نمودار بوده این است که ابتدا بهره حلقه باز تنظیم شود تا سیستم به دقت حالت ماندگار مطلوب برسد. سپس منحنی های دامنه و فاز حلقه باز جبران نشده (به ازای بهره حلقه باز تنظیم شده) رسم می شود. اگر مشخصات حاشیه فاز و حاشیه بهره ارضا نمی شود، باید جبران ساز مناسبی برای تغییر شکل تابع تبدیل حلقه باز تعیین شود. سرانجام اگر خواسته های دیگری باید برآورده شود، سعی در ارضای آن خواهد شد، مگر این که بین خواسته ها تناقض وجود داشته باشد.

اطلاعات قابل دستیابی از پاسخ فرکانسی حلقه باز. ناحیه فرکانس پایین (ناحیه بسیار پایین تر از فرکانس عبور بهره) رفتار حالت ماندگار سیستم حلقه بسته را تعیین می کند. ناحیه فرکانس میانی (ناحیه نزدیک نقطه $\omega = 1$) پایداری نسبی را مشخص می کند. ناحیه فرکانس بالا (بسیار بالاتر از فرکانس عبور بهره) میزان پیچیدگی سیستم را نشان می دهد.

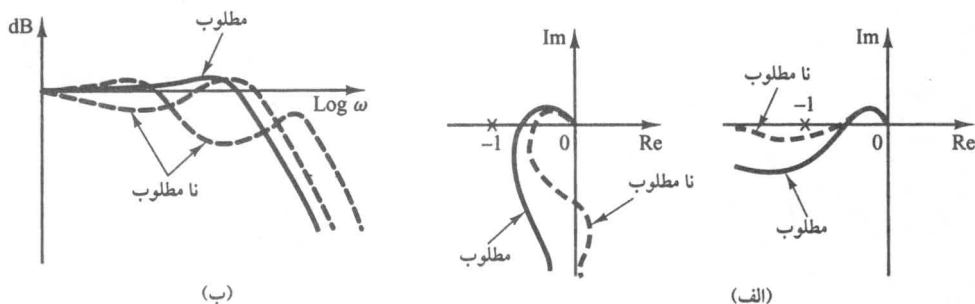
خصوصیات لازم پاسخ فرکانسی حلقه باز. می توانیم بگوییم که در بسیاری از موارد عملی جبران سازی اساساً چیزی نیست جز مصالحه ای بین دقت حالت ماندگار و پایداری نسبی.

برای این که ثابت خطای سرعت بزرگ و پایداری نسبی رضایت بخش باشد، باید منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز را تغییر شکل دهیم.

بهره در ناحیه فرکانس پایین باید به حد کافی بزرگ باشد. همچنین نزدیک فرکانس عبور بهره شیب منحنی لگاریتم دامنه نمودار بوده باید -20 dB/dec باشد. این شیب باید در باند فرکانسی پهنی وجود داشته باشد تا حاشیه فاز مناسبی را تضمین کند. در ناحیه فرکانس بالا بهره باید به سرعت تضعیف شود تا اثرات نویز می نیم شود.

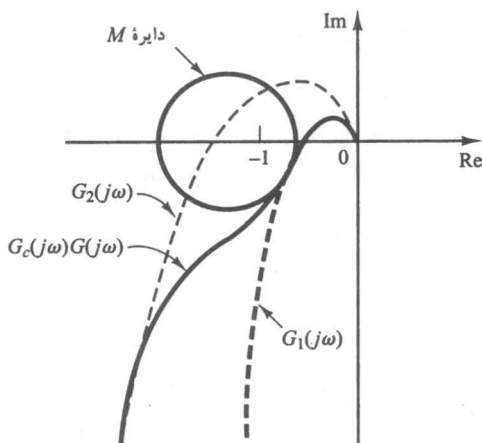
شکل ۷-۸۹ نمونه هایی از منحنی های پاسخ فرکانسی مطلوب و نامطلوب حلقه باز و حلقه بسته را نشان می دهد.

با توجه به شکل ۷-۹۰ نشان می دهیم که اگر بخواهیم بخش فرکانس بالای پاسخ فرکانسی همانند مکان هندسی $G_1(j\omega)$ و بخش پایینی آن همانند مکان هندسی $G_2(j\omega)$ باشد، منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز باید تغییر شکل یابد. مکان هندسی تغییر شکل یافته $G_c(j\omega)G(j\omega)$ می تواند حاشیه فاز و حاشیه بهره معقولی داشته؛ مطابق شکل بر دایره M مناسبی مماس باشد.



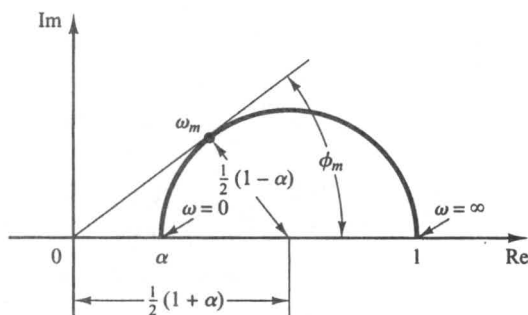
شکل ۷-۸۹ (الف) نمونه‌های از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز مطلوب و نامطلوب؛ (ب) نمونه‌هایی از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته مطلوب و نامطلوب.

مشخصات پایه‌ای جبران‌سازی پیش‌فاز، پس‌فاز و پیش‌فاز - پیش‌فاز. جبران‌سازی پیش‌فاز اساساً بهبود قابل ملاحظه‌ای در پاسخ گذرا ایجاد می‌کند و بر دقت حالت ماندگار تأثیر اندکی دارد. این جبران‌سازی ممکن است به تقویت نویز فرکانس بالا منجر شود. برعکس، جبران‌سازی پس‌فاز بهبود قابل ملاحظه‌ای در دقت حالت ماندگار ایجاد می‌کند، البته به قیمت زیاد شدن زمان پاسخ گذرا. جبران‌سازی پس‌فاز سیگنالهای نویزی فرکانس بالا را تضعیف می‌کند و جبران‌سازی پس‌فاز - پیش‌فاز ترکیبی از مشخصات این دو نوع جبران‌ساز را داراست. استفاده از جبران‌ساز پس‌فاز یا پیش‌فاز باعث می‌شود که مرتبه سیستم یک واحد زیاد شود (مگر این که صفر جبران‌ساز یکی از قطبهای تابع تبدیل حلقه باز جبران نشده را حذف کند). کاربرد جبران‌ساز پس‌فاز - پیش‌فاز به مرتبه سیستم دو واحد می‌افزاید (مگر این که بین صفر یا صفرهای جبران‌ساز و قطب یا قطبهای تابع تبدیل جبران نشده حذفی صورت بگیرد)، یعنی پیچیدگی سیستم بیشتر و کنترل رفتار پاسخ گذرای سیستم مشکلتر می‌شود. هر وضعیت خاصی جبران‌ساز مورد نیاز خود را می‌طلبد.



شکل ۷-۹۰

شکله‌ی پاسخ فرکانسی حلقه باز.



شکل ۷-۹۱

نمودار قطبی جبرانساز پیشفاز

$$\alpha(j\omega T + 1) / (j\omega \alpha T + 1)$$

با $0 < \alpha < 1$.

۷-۱۱ جبرانسازی پیشفاز

ابتدا مشخصات فرکانسی جبرانساز پیشفاز را بررسی می‌کنیم. سپس یک روش طراحی جبرانساز پیشفاز براساس نمودار بوده را توضیح می‌دهیم.

مشخصات جبرانسازی پیشفاز. جبرانساز پیشفازی با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید

$$K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

α ضریب تضعیف جبرانساز نامیده می‌شود. این جبرانساز صفری در $s = -1/T$ و قطبی $s = -1/(\alpha T)$ دارد. چون $0 < \alpha < 1$ ، صفر در صفحه مختلط، سمت راست قطب قرار دارد. اگر α کوچک باشد، قطب از مبدأ خیلی دور می‌شود. مقدار می‌نیم α را ساختمان فیزیکی جبرانساز پیشفاز محدود می‌کند. این مقدار می‌نیم معمولاً حدود ۰/۰۵ گرفته می‌شود. (یعنی ماکزیم پیشفازی حاصل از این جبرانسازی حدود 65° است.) [معادله (۷-۲۵) را ببینید]

شکل ۷-۹۱ نمودار قطبی تابع تبدیل زیر را به ازای $K_c = 1$ نشان می‌دهد

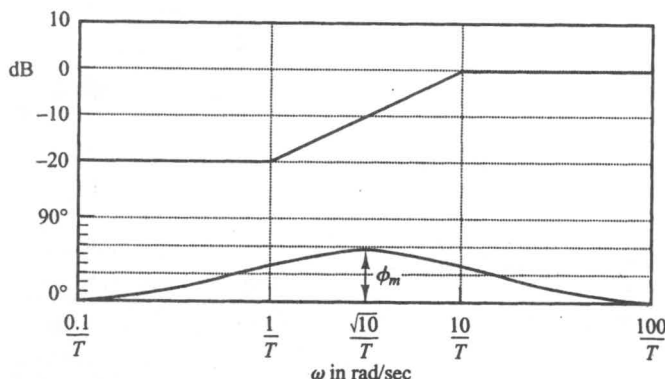
$$K_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1)$$

به ازای α معین، زاویه بین بخش مثبت محور حقیقی و خط مماسی که از مبدأ به نیمدایره رسم می‌شود ماکزیم پیشفازی ϕ_m را تعیین می‌کند. فرکانس محل نقطه تماس را ω_m می‌نامیم. با توجه به شکل ۷-۹۱ زاویه فاز در $\omega = \omega_m$ برابر ϕ_m است و

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (۷-۲۵)$$

معادله (۷-۲۵) ماکزیم زاویه پیشفازی را به α مرتبط می‌کند.

شکل ۷-۹۲ نمودار بوده جبرانساز پیشفاز را به ازای $K_c = 1$ و $\alpha = 0/1$ نشان می‌دهد. فرکانسهای گوشه‌ای جبرانساز پیشفاز $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\alpha T) = 10/T$ است. با بررسی شکل ۷-۹۲ درمی‌یابیم که ω_m واسطه



شکل ۷-۹۲

نمودار بوده جبرانساز پیشفاز

$$\alpha(j\omega T + 1) / (j\omega\alpha T + 1) \quad \text{با } \alpha = 0.1$$

هندسی دو فرکانس گوشه‌ای است، یا

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right)$$

پس

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

(۷-۲۶)

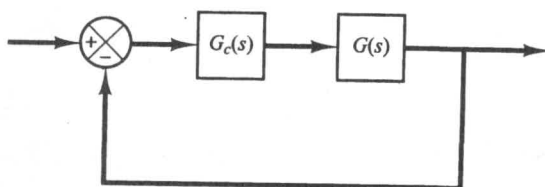
چنانچه شکل ۷-۹۲ نشان می‌دهد جبرانساز پیشفاز اساساً یک فیلتر بالاگذر است. (فرکانسهای بالا عبور داده شده، فرکانسهای پایین تضعیف می‌شوند).

روشهای جبرانسازی پیشفاز براساس رهیافت پاسخ فرکانسی. کار اصلی جبرانساز پیشفاز تغییر شکل دادن منحنی پاسخ فرکانسی است، به نحوی که زاویه پیشفازی لازم برای جبران سفازی اضافی ایجاد شده توسط سیستم اصلی ایجاد شود.

سیستم شکل ۷-۹۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید خواسته‌ها برحسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، ثابت خطای ایستای سرعت و غیره داده شده است. روند طراحی جبرانساز پیشفاز با رهیافت پاسخ فرکانسی از این قرار است:

۱. جبرانساز پیشفاز زیر را در نظر بگیرید:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$



شکل ۷-۹۳

سیستم کنترل.

فرض کنید

$$K_c \alpha = K$$

پس

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر درمی آید

$$G_c(s) G(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} KG(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s)$$

که در آن

$$G_1(s) = KG(s)$$

بهره K را به نحوی تعیین می کنیم که خواسته هایمان در مورد ثابت خطای ایستا برآورده شود.

۲. با استفاده از K به دست آمده نمودار بوده $G_1(j\omega)$ ، یعنی سیستم جبران نشده ولی دارای بهره تنظیم شده، را رسم می کنیم. حاشیه فاز را تعیین می کنیم.

۳. زاویه پیشفازی لازم ϕ برای افزودن به سیستم را تعیین می کنیم. 5° تا 12° به زاویه پیشفازی لازم بیفزایید، زیرا با گذاشتن جبران ساز پیشفاز فرکانس عبور بهره به سمت راست می رود و حاشیه فاز کم می شود.

۴. با استفاده از معادله (۷-۲۵) ضریب تضعیف α را به دست می آوریم. فرکانسی را که در آن دامنه سیستم جبران نشده $G_1(j\omega)$ برابر $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$ است می یابیم. این فرکانس را به عنوان فرکانس عبور بهره جدید برمی گزینیم. این فرکانس با $\omega_m = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ متناظرست و ماکزیمم زاویه فاز ϕ_m در آن رخ می دهد.

۵. فرکانسهای گوشه ای جبران ساز را به صورت زیر تعیین می کنیم:

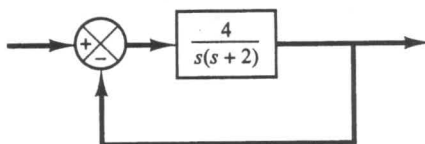
$$\omega = \frac{1}{T} \quad \text{صفر جبران ساز پیشفاز}$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha T} \quad \text{قطب جبران ساز پیشفاز}$$

۶. با استفاده از K به دست آمده در گام ۱ و α به دست آمده در گام ۴ ثابت K_c را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

۷. حاشیه بهره را بررسی می کنیم تا از رضایت بخش بودن آن اطمینان حاصل کنیم. اگر چنین نبود فرایند طراحی را با اصلاح محل صفرها و قطبها تکرار می کنیم تا نتایج دلخواه حاصل شود.



شکل ۷-۹۴

سیستم کنترل.

سیستم شکل ۷-۹۴ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

مثال ۷-۲۶

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

می‌خواهیم جبرانسازی طرح کنیم تا ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 2^\circ \text{sec}^{-1}$ ، حاشیه فاز حداقل 5° ، و حاشیه بهره حداقل 10 dB باشد.

یک جبران‌ساز پیشفاز به شکل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است.

عبارت زیر را تعریف می‌کنیم

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

که در آن $K = K_c \alpha$.

گام اول طراحی تنظیم بهره K برای دستیابی به عملکرد حالت ماندگار مناسب است، در اینجا باید ثابت

خطای ایستای سرعت به 2°sec^{-1} برسد، پس

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4 s K}{s(s+2)} = 2K = 2^\circ$$

یا

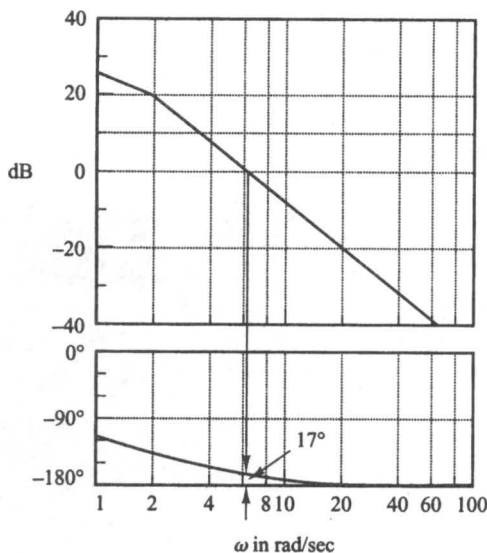
$$K = 1^\circ$$

به ازای $K = 1^\circ$ سیستم جبران شده خواسته‌های حالت ماندگار را برآورده می‌کند.

حال نمودار بوده تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$G_1(j\omega) = \frac{4^\circ}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{2^\circ}{j\omega(0.5j\omega+1)}$$

شکل ۷-۹۵ منحنی‌های دامنه و فاز $G_1(j\omega)$ را نشان می‌دهد. این نمودار حاشیه فاز و حاشیه بهره سیستم را به ترتیب 17° و $+\infty \text{ dB}$ به دست می‌دهد. (حاشیه فاز 17° خبر از سیستمی کاملاً نوسانی می‌دهد. بنابراین برآورده شدن خواسته مربوط به حالت ماندگار عملکرد پاسخ گذرای نامطلوبی به همراه داشته است.) حداقل



شکل ۷-۹۵

نمودار بوده

$$G_1(j\omega) = 10 G(j\omega) = 40 / [j\omega(j\omega + 2)]$$

حاشیه فاز خواسته شده 5° است. بنابراین پیشفازی لازم برای برآورده شدن پایداری نسبی خواسته شده 33° است. برای نیل به حاشیه فاز 5° بدون کاهش K ، جبران ساز پیشفاز باید زاویه خواسته شده را فراهم کند. با توجه به این نکته که جبران ساز پیشفاز منحنی دامنه را تغییر می دهد، درمی یابیم که فرکانس عبور بهره به سمت راست جابه جا می شود. باید تاخیر فاز اضافی $G_1(j\omega)$ ناشی از افزایش فرکانس عبور بهره نیز خنثی شود. با در نظر گرفتن این موضوع ϕ_m ، ماکزیمم زاویه پیشفاز، را تقریباً 38° فرض می کنیم. (یعنی برای خنثی کردن اثر جابه جا شدن فرکانس عبور بهره 5° به زاویه لازم افزوده ایم).

چون

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$\phi_m = 38^\circ$ با $\alpha = 0.24$ متناظر است. پس از تعیین ضریب تضعیف α براساس پیشفازی لازم، به گام بعدی یعنی تعیین فرکانسهای گوشه ای $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\alpha T)$ جبران ساز پیشفاز می رسیم. به این منظور ابتدا توجه می کنیم که ماکزیمم پیشفازی ϕ_m در واسطه هندسی دو فرکانس گوشه ای، یا $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ رخ می دهد. [معادله (۷-۲۶) را ببینید]. میزان تغییر بهره در فرکانس $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ ناشی از جمله $(Ts+1)/(\alpha Ts+1)$ عبارت است از

$$\left| \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \right|_{\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)} = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

پس چون

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.24}} = \frac{1}{0.49} = 6.2 \text{ dB}$$

و $|G_1(j\omega)| = -6/2 \text{ dB}$ با $\omega = 9 \text{ rad/s}$ متناظر است، این فرکانس را به عنوان فرکانس جدید عبور بهره ω_c برمی‌گزینیم. این فرکانس با $\omega_c = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ متناظر است. پس به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \omega_c = 4/41$$

و

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 18/4$$

پس جبرانساز پیشفاز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 4/41}{s + 18/4} = K_c \alpha \frac{0/227s + 1}{0/054s + 1}$$

که در آن

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0/24} = 41/7$$

یعنی تابع تبدیل جبرانساز عبارت است از

$$G_c(s) = 41/7 \frac{s + 4/41}{s + 18/4} = 10 \frac{0/227s + 1}{0/054s + 1}$$

توجه کنید که

$$\frac{G_c(s)}{K} G_1(s) = \frac{G_c(s)}{10} 10 G(s) = G_c(s) G(s)$$

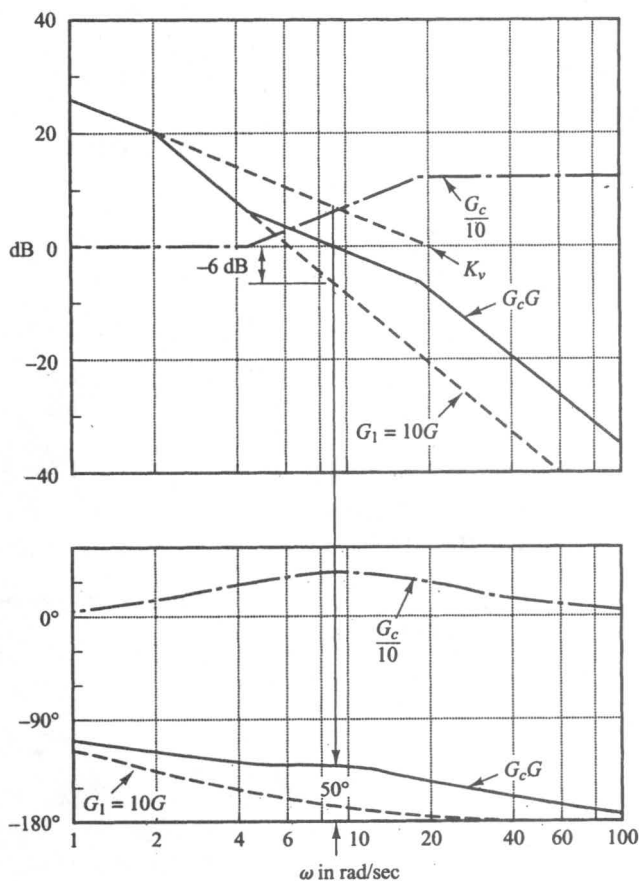
منحنی‌های دامنه و فاز $G_c(j\omega)/10$ در شکل ۷-۹۶ نشان داده شده است. سیستم جبران شده دارای تابع تبدیل زیر است:

$$G_c(s) G(s) = 41/7 \frac{s + 4/41}{s + 18/4} \frac{4}{s(s+2)}$$

منحنی‌های ممتد شکل ۷-۹۶ منحنی‌های دامنه و فاز سیستم جبران شده هستند. جبرانساز پیشفاز فرکانس عبور بهره را از $6/3 \text{ rad/s}$ به 9 rad/s می‌رساند. افزایش این فرکانس به معنی افزایش پهنای باند و افزایش پهنای باند به معنی افزایش سرعت پاسخ است. می‌بینیم که حاشیه فاز تقریباً 50° و حاشیه بهره $+\infty$ است. بنابراین سیستم جبران شده شکل ۷-۹۷ خواسته‌های حالت ماندگار و پایداری نسبی را برآورده می‌کند.

دقت کنید که برای سیستم‌های نوع ۱، مانند سیستم در نظر گرفته شده، ثابت خطای ایستای سرعت K_v از لحاظ مقدار چیزی جز محل برخورد امتداد خط با شیب -20 dB/dec اولیه و محور 0 dB ، به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۹۶ نیست. همچنین توجه کنید که شیب منحنی دامنه را در حوالی فرکانس عبور بهره از -40 dB/dec به -20 dB/dec تغییر داده‌ایم.

شکل ۷-۹۸ نمودارهای قطبی سیستم جبران نشده، که بهره‌اش تنظیم نشده، یعنی $G_1(j\omega) = 10 G(j\omega)$ ، و سیستم جبران شده $G_c(j\omega) G(j\omega)$ را نشان می‌دهد. از شکل ۷-۹۸ می‌بینیم که فرکانس تشدید سیستم



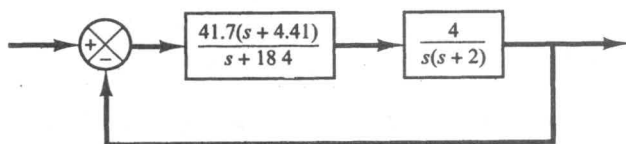
شکل ۷-۹۶

نمودار بوده سیستم جبران شده.

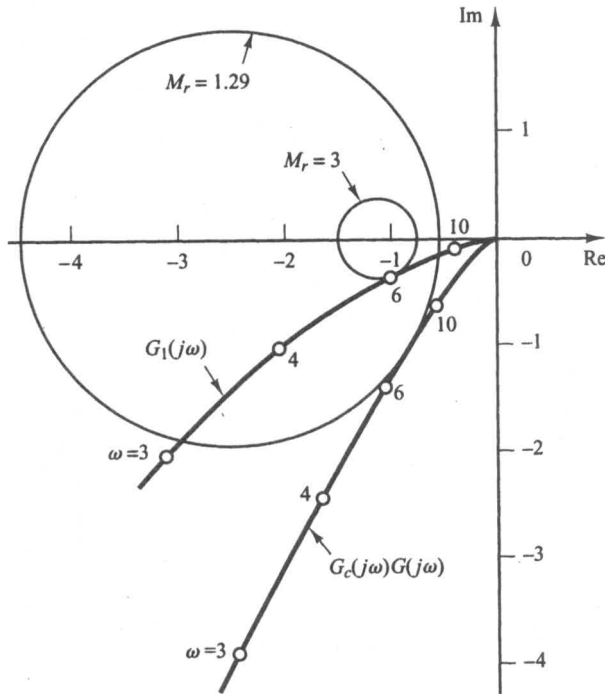
جبران نشده حدود ۶ rad/s و از آن سیستم جبران شده حدود ۷ rad/s است. (این هم نشانه دیگری از افزایش پهنای باند است).

از شکل ۷-۹۸ درمی یابیم که دامنه تشدید M_r برای سیستم جبران نشده به ازای $K=10$ برابر ۳ است. مقدار M_r سیستم جبران شده حدود ۱/۲۹ است. این مطلب به وضوح بهبود پایداری نسبی سیستم جبران شده را نشان می دهد.

اگر زاویه فاز $G_1(j\omega)$ در نزدیکی فرکانس عبور بهره به شدت کم شود، جبران سازی پیش فاز چاره ساز نیست، زیرا جابه جایی فرکانس عبور بهره به سمت راست فراهم سازی پیش فازی لازم در فرکانس عبور بهره



شکل ۷-۹۷ سیستم جبران شده.



شکل ۷-۹۸

نمودارهای قطبی تابع تبدیل
حلقه باز جبران نشده و جبران شده
(G_1): جبران نشده؛
($G_c G$): سیستم جبران شده.

جدید را مشکل می‌کند. یعنی برای رسیدن به حاشیه فاز مطلوب باید α را بسیار کوچک بگیریم. ولی نه مقدار α می‌تواند خیلی کوچک شود (کوچکتر از 0.05°) نه ماکزیمم پیشفازی ϕ_m می‌تواند خیلی بزرگ باشد (بزرگتر از 65°) زیرا برای رسیدن به این مقادیر بهره اضافی خیلی بزرگ می‌شود. [در صورت نیاز به پیشفازی بزرگتر از 65° باید دو (یا تعدادی بیشتر) شبکه پیشفاز را با استفاده از تقویت کننده جداساز سری کرد].

سرانجام به واریسی مشخصات پاسخ گذرای سیستم طرح شده می‌پردازیم. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستمهای جبران نشده و جبران شده را با MATLAB به دست می‌آوریم. توابع تبدیل حلقه بسته سیستمهای جبران نشده و جبران شده به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

و

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{166.8s + 735.588}{s^3 + 20.4s^2 + 203.6s + 735.588}$$

برنامه ۷-۱۳ MATLAB برای یافتن منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب است. شکل ۷-۹۹ منحنی‌های پاسخ پله و شکل ۷-۱۰۰ منحنی‌های پاسخ شیب را نشان می‌دهند. این منحنی‌ها نشان می‌دهند که سیستم طراحی شده عملکردی رضایتبخش دارد.

MATLAB Program 7-13

```

%*****Unit-step responses*****

num = [4];
den = [1 2 4];
numc = [166.8 735.588];
denc = [1 20.4 203.6 735.588];
t = 0:0.02:6;
[c1,x1,t] = step(num,den,t);
[c2,x2,t] = step(numc,denc,t);
plot(t,c1,'.',t,c2,'-')
grid
title('Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(0.4,1.31,'Compensated system')
text(1.55,0.88,'Uncompensated system')

%*****Unit-ramp responses*****

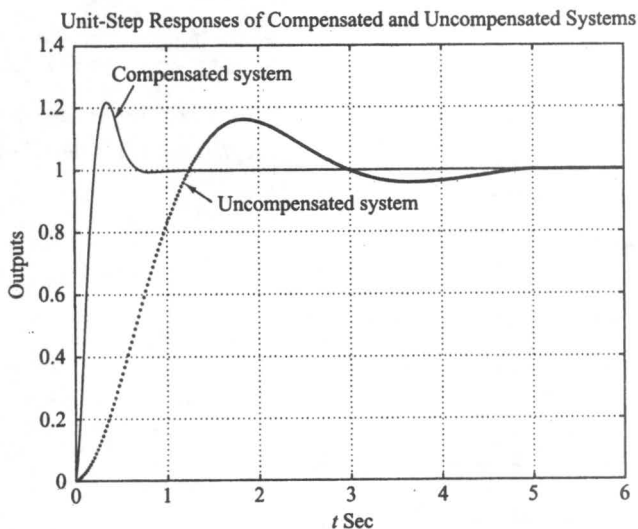
num1 = [4];
den1 = [1 2 4 0];
num1c = [166.8 735.588];
den1c = [1 20.4 203.6 735.588 0];
t = 0:0.02:5;
[y1,z1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,z2,t] = step(num1c,den1c,t);
plot(t,y1,'.',t,y2,'-',t,t,'--')
grid
title('Unit-Ramp Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(0.89,3.7,'Compensated system')
text(2.25,1.1,'Uncompensated system')

```

خاطر نشان می کنیم که قطبهای حلقه بسته سیستم جبران شده عبارت اند از:

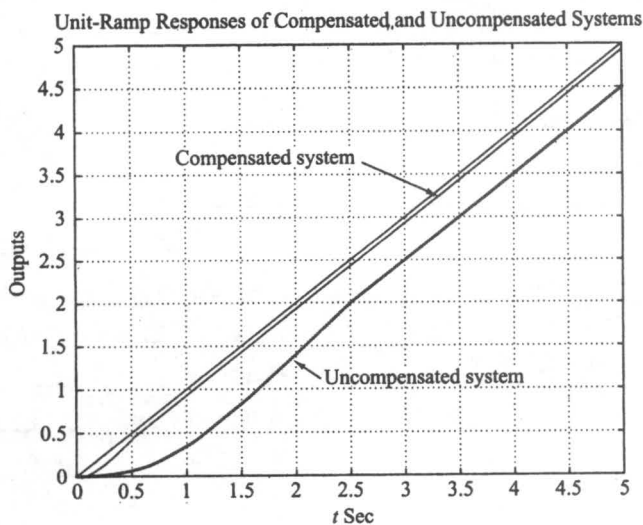
$$s = -۶,۴۹۱۸ \quad , \quad s = -۶,۹۵۴۱ \pm j۸,۰۵۹۲$$

چون قطبهای حلقه بسته غالب از محور $j\omega$ خیلی فاصله دارند، پاسخ گذرا به سرعت میرا می شوند.



شکل ۷-۹۹

منحنی‌های پاسخ پله واحد
سیستمهای جبران نشده
و جبران شده.



شکل ۷-۱۰۰

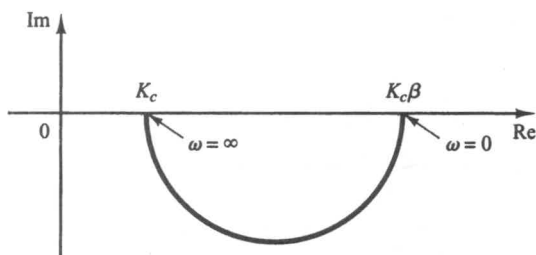
منحنی‌های پاسخ شیب
واحد سیستمهای جبران نشده
و جبران شده.

۱۲-۷ جبرانسازی پسفاز

در این بخش ابتدا به بحث در مورد نمودارهای نایکویست و بوده جبرانساز پسفاز می‌پردازیم. سپس روش جبرانسازی پسفاز را براساس رهیافت پاسخ فرکانسی معرفی می‌کنیم.

مشخصات جبرانسازی پسفاز. یک جبرانساز پسفاز با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید :

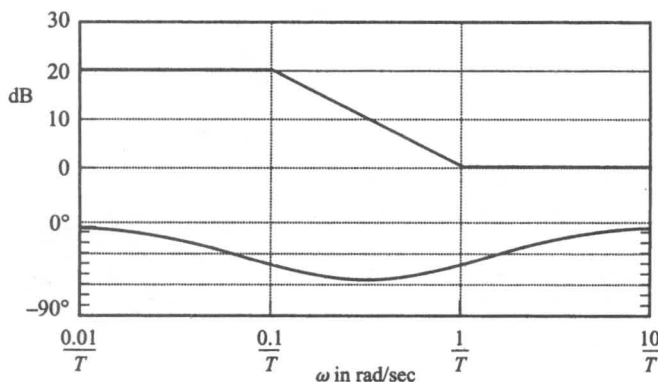
$$G_c(s) = K_c \beta \frac{T s + 1}{\beta T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$



شکل ۷-۱۰۱

نمودار قطبی جبرانساز پسفاز

$$K_c \beta (j\omega T + 1) / (j\omega \beta T + 1)$$



شکل ۷-۱۰۲

نمودار بوده جبرانساز پسفاز

$$\beta (j\omega T + 1) / (j\omega \beta T + 1)$$

$$\beta = 10$$

جبرانساز پسفاز در صفحه مختلط یک صفر در $s = -1/T$ و یک قطب در $s = -1/(\beta T)$ دارد. قطب سمت راست صفر واقع شده است.

شکل ۷-۱۰۱ نمودار قطبی جبرانساز پسفاز را نشان می‌دهد. شکل ۷-۱۰۲ نمودار بوده جبرانساز را به ازای $K_c = 1$ و $\beta = 10$ نشان می‌دهد. فرکانسهای گوشه‌ای جبرانساز پسفاز در $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\beta T)$ قرار دارند. چنانچه از شکل ۷-۱۰۲ (که دارای مقادیر $K_c = 1$ و $\beta = 10$ است) برمی‌آید، دامنه جبرانساز در فرکانسهای پایین ۱۰ (یا ۲۰ dB) و در فرکانسهای بالا یک (یا ۰ dB) است. پس جبرانساز پسفاز اساساً یک فیلتر پایین‌گذر است.

روشهای جبرانسازی پسفاز براساس رهیافت پاسخ فرکانسی. کار اصلی جبرانساز پسفاز ایجاد تضعیف در فرکانسهای بالاست، به نحوی که حاشیه فاز سیستم به حد مطلوب برسد. مشخصه پسفازی این جبرانساز در جبرانسازی پسفاز دخیل نیست.

روند طراحی جبرانساز پسفاز برای سیستم شکل ۷-۹۳ براساس رهیافت پاسخ فرکانسی، از این قرار است:

۱. جبرانساز پسفاز زیر را در نظر بگیرید

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

با تعریف

$$K_c \beta = K$$

داریم

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} K G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G_1(s)$$

که در آن

$$G_1(s) = K G(s)$$

را به نحوی تعیین می‌کنیم که خواسته‌های مربوط به ثابت خطای ماندگار برآورده شود.

۲. اگر سیستم جبران نشده $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$ حاشیه فاز و حاشیه بهره خواسته شده را ندارد، فرکانسی را که در آن فاز تابع تبدیل حلقه باز برابر -18° به اضافه حاشیه فاز لازم می‌شود بیابید. حاشیه فاز لازم، حاشیه فاز خواسته شده به اضافه 5° تا 12° است. (این 5° تا 12° اضافی، پسفازی ناشی از جبران‌ساز را خنثی می‌کند.) این فرکانس را به عنوان فرکانس عبور بهره جدید برگزینید.

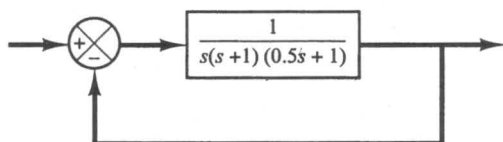
۳. برای پیشگیری از اثر تاخیر فاز جبران‌ساز پسفاز، قطب و صفر جبران‌ساز پسفاز باید پایین‌تر از فرکانس عبور بهره جدید قرار داده شود. بنابراین فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T$ (متناظر با صفر جبران‌ساز پسفاز) را یک اکتاو تا یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره جدید برمی‌گزینیم. (اگر ثابت زمانهای جبران‌ساز پسفاز خیلی بزرگ نباشد، فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T$ را باید یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره جدید انتخاب کنیم.)

توجه کنید که قطب و صفر جبران‌ساز را به حد کافی کوچک برمی‌گزینیم. بنابراین پسفازی در ناحیه فرکانس پایین ایجاد می‌شود و اثری بر حاشیه فاز نمی‌گذارد.

۴. تضعیف لازم برای dB شدن منحنی دامنه در فرکانس عبور بهره جدید را تعیین می‌کنیم. چون این تضعیف $-20 \log \beta$ است، مقدار β به دست می‌آید. سپس فرکانس گوشه ای دیگر (متناظر با قطب جبران‌ساز پسفاز) از رابطه $\omega = 1/(\beta T)$ به دست می‌آید.

۵. با توجه به K به دست آمده در گام ۱ و β تعیین شده در گام ۴، ثابت K_c از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$



شکل ۷-۱۰۳

سیستم کنترل.

مثال ۷-۲۷

سیستم شکل ۷-۱۰۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

می‌خواهیم سیستم را به نحوی جبران کنیم که ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 5 \text{ sec}^{-1}$ ، حاشیه فاز حداقل 40° ، و حاشیه بهره حداقل ۱۰ dB باشد.

جبران‌ساز پسفازی با تابع تبدیل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

با تعریف

$$K_c \beta = K$$

و همچنین

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

گام اول طراحی را با تنظیم بهره K ، برای دستیابی به ثابت خطای ایستای سرعت خواسته شده آغاز می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G_1(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)} = K = 5 \end{aligned}$$

پس

$$K = 5$$

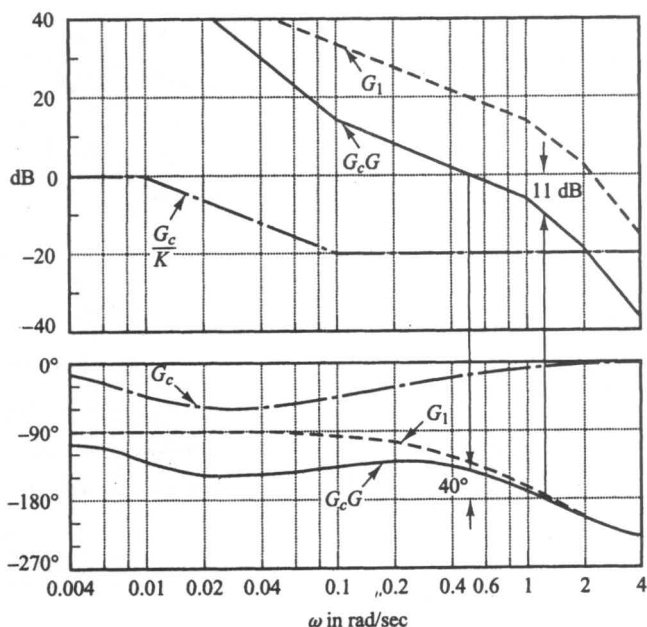
سیستم جبران شده با $K = 5$ خواسته‌های عملکرد حالت ماندگار را برآورده می‌کند.

حال نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم می‌کنیم

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

منحنی‌های دامنه و فاز $G_1(j\omega)$ در شکل ۷-۱۰۴ نشان داده شده است. با توجه به این نمودار حاشیه فاز -20° است، که نشان می‌دهد سیستم ناپایدار است.

چون افزودن جبران‌ساز پسفاز منحنی فاز نمودار بوده را تغییر می‌دهد، باید 5° تا 12° به حاشیه فاز اضافه کنیم تا این اثر خنثی شود. چون فرکانس متناظر با حاشیه فاز 40° برابر 0.7 rad/sec است، فرکانس عبور بهره



شکل ۷-۱۰۴
نمودارهای بوده سیستم
جبران نشده، جبران ساز،
و سیستم جبران شده.
(G_1 : سیستم جبران نشده؛
 G_c : جبران ساز؛
 $G_1 G_c$: سیستم جبران شده).

جدید را (برای سیستم جبران شده) باید نزدیک این مقدار برگزینیم. برای پرهیز از ثابت زمانی های خیلی بزرگ فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T$ جبران ساز پسفاز را (که با صفر جبران ساز متناظر است) 0.1 rad/sec انتخاب می کنیم. چون این فرکانس گوشه ای از فرکانس عبور بهره جدید خیلی پایین تر نیست، اثر فاز جبران ساز ناچیز نیست. بنابراین 12° به حاشیه فاز اضافه می کنیم تا پسفازی ناشی از جبران ساز را منظور کرده باشیم. پس اکنون حاشیه فاز لازم 52° است. زاویه فاز تابع تبدیل حلقه باز جبران نشده در حدود $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ برابر -128° است. پس فرکانس عبور بهره جدید را 0.5 rad/sec برمی گزینیم. برای این که منحنی دامنه در این فرکانس عبور بهره جدید برای 0 dB باشد، جبران ساز باید تضعیف لازم را که در این مورد -20 dB است، ایجاد کند. پس

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -20$$

$$\beta = 10$$

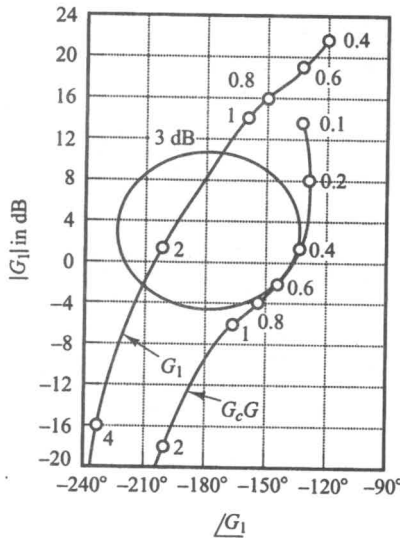
یا

به این ترتیب دیگر فرکانس گوشه ای جبران ساز، $\omega = 1/(\beta T)$ که با قطب جبران ساز متناظر است، به صورت زیر تعیین می شود

$$\frac{1}{\beta T} = 0.1 \text{ rad/sec}$$

پس تابع تبدیل جبران ساز پسفاز عبارت است از

$$G_c(s) = K_c (10) \frac{10s + 1}{100s + 1} = K_c \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$



شکل ۷-۱۰۵

منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز

سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده.

(G_1 : سیستم جبران نشده؛

$G_c G_1$: سیستم جبران شده).

بهره K برابر ۵ و β برابر ۱۰ تعیین شده بود، پس

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = \frac{5(1 \cdot s + 1)}{s(1 \cdot s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

منحنی‌های دامنه و از $G_c(j\omega) G(j\omega)$ نیز در شکل ۷-۱۰۴ نشان داده شده است.

حاشیه فاز سیستم جبران شده حدود 40° است که مقدار مطلوب است. حاشیه بهره حدود ۱۱ dB است که کاملاً قابل قبول است. ثابت خطای ایستای سرعت مقدار خواسته شده 5 sec^{-1} است. بنابراین سیستم جبران شده هم خواسته‌های حالت ماندگار و هم خواسته‌های پایداری نسبی را برآورده می‌کند. توجه کنید که فرکانس عبور بهره از حدود ۱ rad/s به ۰.۵ rad/s کاهش یافته است که نشان دهنده کاهش پهنای باند سیستم است.

برای بهتر دیدن اثر جبرانسازی پسمان منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز سیستم جبران نشده $G_1(j\omega)$ و سیستم جبران شده $G_c(j\omega) G(j\omega)$ در شکل ۷-۱۰۵ نشان داده شده است. نمودار $G_1(j\omega)$ به وضوح ناپایداری سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. افزودن جبران‌ساز پسمان سیستم را پایدار می‌کند. نمودار $G_c(j\omega) G(j\omega)$ بر مکان هندسی $M = 3 \text{ dB}$ مماس است. پس قله تشدید ۳، یا $1/4$ است و در $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ رخ می‌دهد.

جبران‌سازهای طراحی شده به روشهای متفاوت یا طراحان مختلف (حتی با استفاده از یک روش) می‌توانند بسیار متفاوت باشند. ولی تمام سیستمهای خوب طراحی شده رفتار گذرا و حالت ماندگار مشابهی دارند. از میان طرحهای مختلف باید با توجه به این ملاحظه اقتصادی که ثابت زمانهای جبران‌ساز پسمان نباید خیلی بزرگ باشد، بهترین را برگزید.

MATLAB Program 7-14

```

%*****Unit-step response*****

num = [1];
den = [0.5 1.5 1 1];
numc = [50 5];
denc = [50 150.5 101.5 51 5];
t = 0:0.1:40;
[c1,x1,t] = step(num,den,t);
[c2,x2,t] = step(numc,denc,t);
plot(t,c1,'.',t,c2,'-')
grid
title('Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(12.7,1.27,'Compensated system')
text(12.2,0.7,'Uncompensated system')

%*****Unit-ramp response*****

num1 = [1];
den1 = [0.5 1.5 1 1 0];
num1c = [50 5];
den1c = [50 150.5 101.5 51 5 0];
t = 0:0.1:20;
[y1,z1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,z2,t] = step(num1c,den1c,t);
plot(t,y1,'.',t,y2,'-',t,t,'--');
grid
title('Unit-Ramp Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(8.3,3,'Compensated system')
text(8.3,5,'Uncompensated system')

```

سرانجام پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده را به دست می‌آوریم. توابع

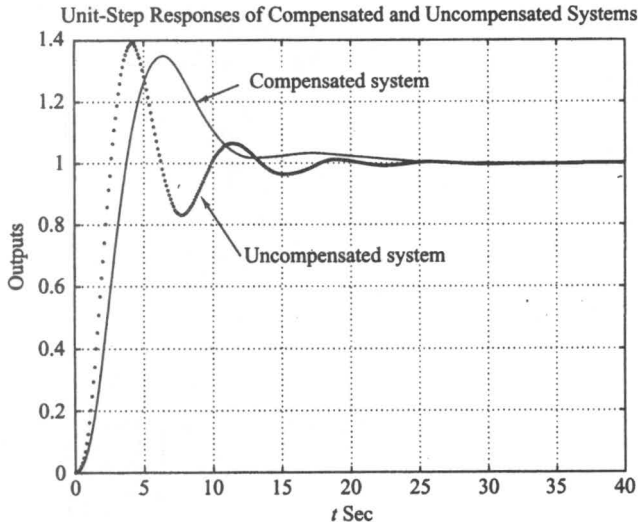
تبدیل حلقه بسته سیستمهای جبران شده و جبران نشده به ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50s+5}{50s^4 + 150.5s^3 + 101.5s^2 + 51s + 5}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{0.5s^3 + 1.5s^2 + s + 1}$$

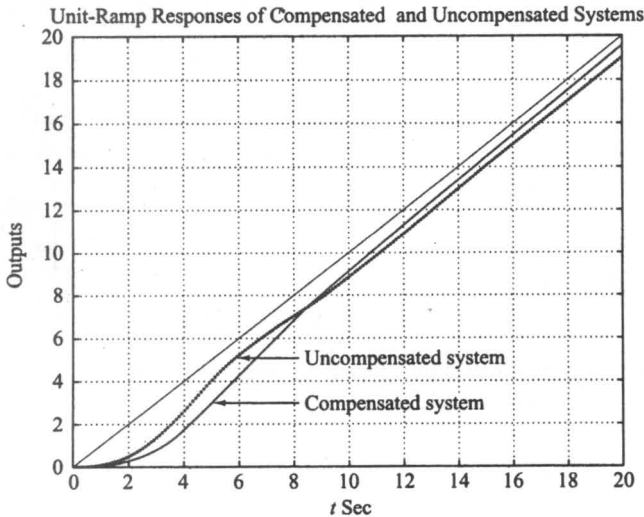
برنامه ۷-۱۴ منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستمهای جبران شده و جبران نشده را به دست می‌دهد.

منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب حاصل به ترتیب در شکل‌های ۷-۱۰۶ و ۷-۱۰۷ نشان داده شده است. با



شکل ۷-۱۰۶

منحنی‌های پاسخ پله واحد
سیستمهای جبران نشده و
جبران شده (مثال ۷-۲۷).



شکل ۷-۱۰۷

منحنی‌های پاسخ شیب واحد
سیستمهای جبران نشده و
جبران شده (مثال ۷-۲۷).

توجه به این منحنی‌ها می‌بینیم که سیستم طراحی شده مشخصات خواسته شده را برآورده می‌کند و رضایتبخش است.

قطبها و صفرهای حلقه بسته سیستم طراحی شده عبارت‌اند از

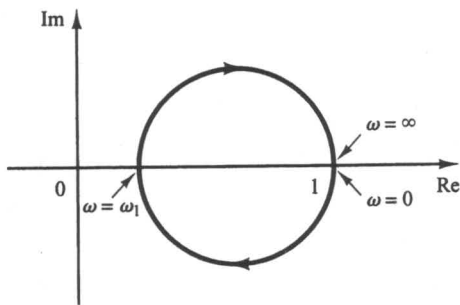
$$s = -0.1 \text{ صفر در}$$

$$\text{قطبها در } s = -2.3155 \text{ و } s = -0.1228 \text{ و } s = -0.2859 \pm j0.5196$$

قطبهای حلقه بسته غالب به محور $j\omega$ بسیار نزدیک‌اند، بنابراین پاسخ کند است. همچنین قطب حلقه بسته $s = -0.1228$ و صفر واقع در $s = -0.1$ باعث می‌شوند انتهای پاسخ با دامنه‌ای کوچک و با کندی امتداد یابد.

توضیحاتی راجع به جبرانسازی پسفاز

۱. جبرانسازهای پسفاز در اساس فیلترهای پایین گذر هستند. بنابراین با این جبرانسازها می‌توان در فرکانس پایین بهره‌ای بزرگ داشت (این بهره بزرگ عملکرد حالت ماندگار را بهبود می‌بخشد) و بهره را در فرکانسهای بالا کاهش داد، که باعث بهبود حاشیه‌فاز می‌شود. توجه کنید که در جبرانسازی پسفاز از مشخصات تضعیف در فرکانس بالا استفاده می‌کنیم نه از مشخصه پسفازی. (مشخصه پسفازی برای جبرانسازی کاربردی ندارد).
۲. فرض کنید صفر و قطب جبرانساز پسفاز به ترتیب در $s = -p$ و $s = -z$ قرار دارند. اگر صفر و قطب به مبدأ نزدیک بوده، نسبت z/p با ضریب لازم ثابت خطای ایستای سرعت برابر باشد، محل دقیقشان مهم نیست. ولی باید توجه کرد که صفر و قطب جبرانساز پسفاز را نباید بیش از حد نیاز به مبدأ نزدیک کرد، زیرا قطب حلقه بسته‌ای که در اثر جبرانساز پسفاز ایجاد می‌شود در همان ناحیه‌ای است که صفر و قطب جبرانساز در آن قرار دارند. قطب حلقه بسته نزدیک مبدأ پاسخ گذرای با میرایی بسیار کند ایجاد می‌کند، البته دامنه این پاسخ خیلی کوچک می‌شود، زیرا صفر جبرانساز اثر قطب را تقریباً خنثی می‌کند. ولی پاسخ گذرای ناشی از این قطب آنقدر کند است که زمان نشست به شدت تغییر می‌کند. همچنین باید توجه کرد که در سیستمی که با جبرانساز پسفاز جبران شده است، تابع تبدیل بین ورودی اختلافی وسیله تحت کنترل و خطای سیستم ممکن است صفر نزدیک به این قطب را نداشته باشد. بنابراین پاسخ گذرا به ورودی اغتشاشی بسیار طولانی می‌شود.
۳. تضعیف ناشی از جبرانساز پسفاز فرکانس عبور بهره را پایین می‌آورد به نحوی که حاشیه فاز به مقداری قابل قبول برسد. پس جبرانساز پسفاز پهنای باند سیستم را کاهش داده، پاسخ گذرا کند می‌شود. [منحنی فاز $G_c(j\omega)G(j\omega)$ از نزدیکی فرکانس عبور بهره به بعد نسبتاً بی‌تغییر می‌ماند].
۴. چون جبرانساز پسفاز در جهت انتگرالگیری از سیگنال ورودی عمل می‌کند، تقریباً عملی شبیه کنترل کننده تناسبی - انتگرالی انجام می‌دهد. به همین خاطر سیستم دارای جبران شده پسفاز پایداری کمتری دارد. برای اجتناب از این ویژگی نامطلوب ثابت زمانی T باید از بزرگترین ثابت زمانی سیستم به حد کافی بزرگتر باشد.
۵. اگر سیستمی که خروجی‌اش اشباع یا محدود می‌شود با استفاده از جبرانساز پسفاز جبران شود، احتمال دارد وضعیت پایداری مشروط پیش آید. با بروز اشباع یا محدودیت، بهره موثر حلقه کاهش می‌یابد. به این ترتیب سیستم پایداری کمتری پیدا می‌کند و حتی ممکن است مطابق شکل ۷-۱۰۸ ناپایدار شود. برای پرهیز از این رخداد سیستم باید طوری طراحی شود که اثر جبرانساز پسفاز تنها هنگامی مهم شود که دامنه ورودی عنصر اشباع شونده کوچک باشد. (این کار را می‌توان با جبرانسازی حلقه‌های داخلی انجام داد).



شکل ۷-۱۰۹

نمودار قطبی جبرانساز پسفاز - پیشفاز

بیان شده با معادله (۷-۲۷)، به ازای

$$K_c = 1 \text{ و } \gamma = \beta$$

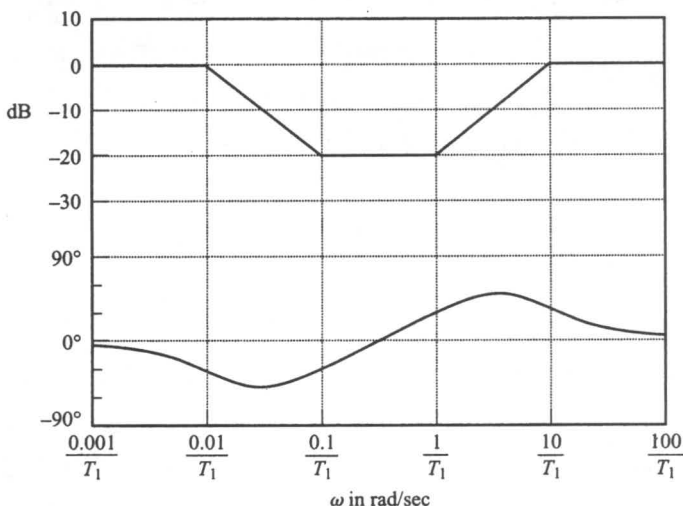
پسفاز - پیشفاز با $K_c = 1$ و $\gamma = \beta$ به صورت شکل ۷-۱۰۹ است. می‌توان دید که برای $\omega < \omega_1$ جبرانساز همانند جبرانساز پسفاز عمل می‌کند. حال آن که برای $\omega_1 < \omega < \infty$ عملی چون جبرانساز پیشفاز دارد. ω_1 فرکانسی است که در آن زاویه فاز صفر می‌شود. این فرکانس عبارت است از

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

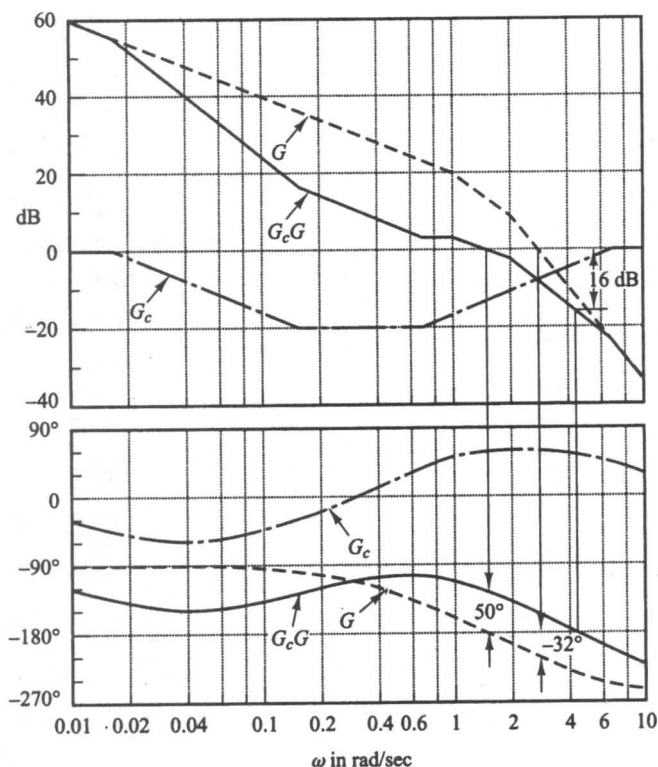
(برای یافتن این معادله مسئله الف-۷-۲۱ را ببینید.)

شکل ۷-۱۱۰ نمودار بوده جبرانساز پسفاز - پیشفاز را به ازای $K_c = 1$ ، $\gamma = \beta = 10^\circ$ ، و $T_2 = 10 T_1$ نشان می‌دهد. توجه کنید که منحنی دامنه در نواحی فرکانس پایین و فرکانس بالا dB است.

جبرانسازی پسفاز - پیشفاز براساس رهیافت پاسخ فرکانسی. طراحی جبرانساز پسفاز - پیشفاز در رهیافت پاسخ فرکانسی براساس ترکیب روشهای طراحی بیان شده در مورد جبرانسازی پیشفاز و جبرانسازی پسفاز صورت می‌گیرد.



شکل ۷-۱۱۰ نمودار بوده جبرانساز پسفاز - پیشفاز معادله (۷-۲۷) به ازای $K_c = 1$ ، $\gamma = \beta = 10^\circ$ و $T_2 = 10 T_1$.



شکل ۷-۱۱۱

نمودار بوده سیستمهای

جبران نشده، جبرانساز

و جبران شده.

 G : سیستم جبران نشده؛ G_c : جبرانساز، $G_c G$: سیستم جبران شده).

شبکه پسفاز - پیشفاز می توان به آن دست یافت.

با انتخاب $1/5 \text{ rad/sec}$ به عنوان فرکانس عبور بهره می توان فرکانس گوشه ای بخش پسفاز جبران کننده را تعیین کرد. بیاید فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T_p$ (صفر بخش پسفاز جبرانساز) را یک دهه پایینتر از فرکانس عبور بهره جدید، یعنی $\omega = 0.15 \text{ rad/sec}$ برگزینیم.

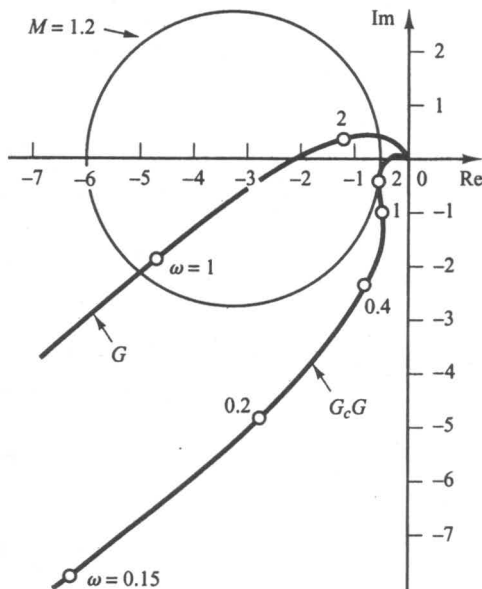
به یاد دارید که برای جبرانساز پیشفاز ماکزیم زاویه پیشفازی ϕ_m از معادله (۷-۲۵) به دست می آید، البته برای این حالت به جای α معادله (۷-۲۵) باید $1/\beta$ بگذریم. این جایگزینی در معادله (۷-۲۵) به دست می دهد

$$\sin \phi_m = \frac{1 - (1/\beta)}{1 + (1/\beta)} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

با $\beta = 10$ $\phi_m = 54.9^\circ$ متناظر است. چون حاشیه فاز مورد نیاز 5° است، $\beta = 10$ را برمی گزینیم. (توجه کنید که از ماکزیم زاویه پیشفازی 54.9° استفاده نمی کنیم.) پس

$$\beta = 10$$

پس فرکانس گوشه ای $\omega = 1/\beta T_p$ (قطب بخش پسفاز جبرانساز) $\omega = 0.15 \text{ rad/sec}$ است. به این ترتیب تابع تبدیل بخش پسفاز جبرانساز پسفاز - پیشفاز عبارت است از



شکل ۷-۱۱۲

نمودارهای قطبی G
(که فقط بهره آن تنظیم
شده) و $G_c G$

شکلهای ۷-۱۱۳ و ۷-۱۱۴ به ترتیب منحنیهای پاسخ پله و پاسخ شیب به دست آمده با MATLAB را نشان می دهند.

سیستم کنترل حلقه بسته طراحی شده دارای این صفرها و قطبهای حلقه بسته است:

$$s = -0.1499 \quad s = -0.6993 \quad \text{صفرها در}$$

$$s = -0.8973 \pm j1.4439 \quad s = -0.4923 \quad \text{قطبها در}$$

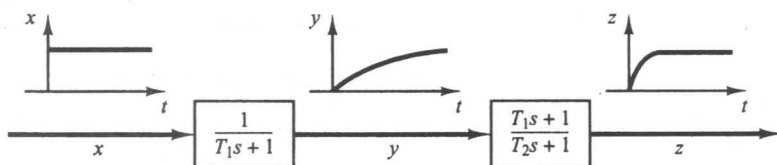
$$s = -0.1785 \quad s = -0.5425$$

قطب $s = -0.1785$ و صفر $s = -0.1499$ خیلی نزدیک اند، این قطب و صفر مطابق شکل ۷-۱۱۳ دنباله درازی با دامنه کوچک در پاسخ پله ایجاد می کند. قطب $s = -0.5425$ و صفر $s = -0.6993$ نیز نسبتاً به هم نزدیک اند. این دو باعث افزایش دامنه دنباله پاسخ می شوند.

خلاصه طراحی سیستم کنترل با رهیافت پاسخ فرکانسی. در سه بخش اخیر روشهای طراحی جبرانسازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز - پیشفاز طی مثالهای ساده ای معرفی شد. نشان دادیم که طراحی جبرانساز برای ارضای شرایط داده شده (برحسب حاشیه فاز و حاشیه بهره) را می توان با استفاده از نمودار بوده به صورتی ساده و سراسر انجام داد. باید خاطرنشان کنیم که نمی توان هر سیستمی را با جبرانساز پیشفاز، پسفاز، یا پسفاز - پیشفاز جبران کرد. در بعضی موارد می توان از جبرانسازهایی با صفر و قطب مختلط استفاده کرد. برای سیستمهایی که جبرانسازی شان به روشهای مکان هندسی ریشه ها و پاسخ فرکانسی ممکن نیست، می توان روش جایدهی قطب را به کار برد. (فصل ۱۰ را ببینید.) در بعضی از مسائل طراحی می توان هم رهیافتهای سستی و هم روش جایدهی قطب را به کار برد. روشهای سستی (مکان هندسی ریشه ها و پاسخ فرکانسی) معمولاً

پیشفازی جبرانساز حاصل می‌شود، حال آن که در جبرانسازی پسفاز تضعیف در فرکانسهای بالا نتیجه مطلوب را به همراه می‌آورد.

۲. در بعضی مسائل طراحی هم جبرانساز پسفاز و هم جبرانساز پیشفاز می‌تواند نتیجه‌بخش باشد. فرکانس عبور بهره‌ای که در جبرانسازی پیشفاز حاصل می‌شود بزرگتر از آنی است که جبرانسازی پسفاز نتیجه می‌دهد. بزرگتر بودن فرکانس عبور بهره به معنی پهنای باند بزرگتر است. پهنای باند بزرگتر به کاهش زمان نشست منجر می‌شود. پهنای باند سیستمی با جبرانساز پیشفاز همیشه بزرگتر از پهنای باند آن سیستم با جبرانساز پسفاز است. پس اگر پهنای باند بزرگ یا پاسخ سریع بخواهیم باید از جبرانساز پیشفاز استفاده کنیم. ولی در صورت وجود سیگنالهای نویزی پهنای باند بزرگ ممکن است مطلوب نباشد، زیرا به خاطر داشتن بهره فرکانس بالای بزرگتر سیستم را بیشتر در معرض نویز قرار می‌دهد. در این گونه موارد باید از جبرانساز پسفاز استفاده کرد.
۳. جبرانسازی پیشفاز مستلزم افزایش بهره، برای جبران تضعیف ذاتی شبکه پیشفاز است. یعنی بهره لازم در جبرانسازی پیشفاز بیشتر از بهره لازم در جبرانسازی پسفاز است. در بسیاری از موارد بهره بیشتر به منزله فضای بیشتر، وزن بیشتر و هزینه بالاتر است.
۴. جبرانسازی پیشفاز ممکن است باعث بزرگ شدن سیگنالهای موجود در سیستم شود. این سیگنالهای بزرگ ممکن است به خاطر احتمال اشباع شدن سیستم مطلوب نباشند.
۵. جبرانساز پسفاز بهره سیستم در فرکانسهای بالا را کم می‌کند، بدون این که بهره در فرکانسهای پایین کم شود. چون پهنای باند سیستم کم می‌شود، سرعت پاسخ سیستم نیز کاهش می‌یابد. به خاطر کاهش بهره فرکانس بالا، کل بهره سیستم را می‌توان زیاد کرد، و به این ترتیب بهره فرکانس پایین نیز افزایش می‌یابد که باعث بهبود دقت حالت ماندگار می‌شود. همچنین نویز فرکانس بالای سیستم نیز می‌تواند تضعیف شود.
۶. جبرانساز پسفاز یک ترکیب قطب - صفر در نزدیک مبدا ایجاد می‌کند، که ممکن است باعث شود پاسخ گذرا دنباله‌ای طولانی و کم دامنه داشته باشد.
۷. اگر هم پاسخ سریع و هم دقت ایستای بزرگ لازم باشد، می‌توان جبرانساز پسفاز-پیشفاز به کار برد. به این ترتیب بهره فرکانس پایین افزایش می‌یابد (که به معنی بهبود دقت حالت ماندگار است) و هم پهنای باند سیستم حاشیه‌های پایداری بیشتر می‌شود.
۸. هر چند می‌توان با استفاده از جبرانسازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز-پیشفاز عملیات جبرانسازی متنوعی انجام داد، ولی برای سیستمهای پیچیده ممکن است این جبرانسازها عملکرد رضایتبخشی نداشته باشند. در این صورت باید از جبرانسازهای دیگری با آرایشهای قطب-صفر متفاوت استفاده کرد.



شکل ۷-۱۱۶ منحنی‌های پاسخ پله که اثر حذف ثابت زمانی بزرگ را نشان می‌دهند.

$$\left(\frac{1}{T_1 s + 1} \right) \left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) = \frac{1}{T_2 s + 1}$$

اگر T_2 از T_1 خیلی کوچکتر باشد، عملاً ثابت زمانی T_1 حذف می‌شود. شکل ۷-۱۱۶ اثر حذف ثابت زمانی بزرگ در پاسخ گذرا به پله را نشان می‌دهد.

اگر قطب نامطلوب سیستم اصلی در نیمه راست صفحه s باشد، نمی‌توان این طرح جبرانسازی را به کار برد، زیرا گر چه حذف قطب نامطلوب با افزودن یک صفر از لحاظ ریاضی ممکن است، ولی از لحاظ فیزیکی حذف دقیق به خاطر عدم دقت‌های ذاتی در تعیین محل قطبها و صفرها ناممکن است. قطب نیم‌صفحه راست که توسط صفر جبران‌ساز دقیقاً حذف نشده باشد، باعث عملکرد ناپایدار سیستم می‌شود، زیرا پاسخ یک جمله نامایی پیدا می‌کند که با گذشت زمان بزرگ می‌شود.

گفتیم که اگر یک قطب نیم‌صفحه چپ تقریباً (چنانچه معمول است) و نه دقیقاً، حذف شود ترکیب قطب - صفر حاصل در پاسخ گذرا مولفه‌ای با دامنه کوچک ولی بلند مدت ایجاد می‌کند. اگر حذف نسبتاً خوب صورت گیرد، این مولفه بسیار کوچک می‌شود.

باید تذکر دهیم که سیستم کنترل ایده‌آل سیستمی با تابع تبدیل برابر یک نیست. از لحاظ فیزیکی ساخت چنین سیستمی ممکن نیست، زیرا نمی‌توان انرژی را به طور آنی از ورودی به خروجی منتقل کرد. به علاوه چون نویز همیشه به شکلی وجود دارد، تابع تبدیل واحد مطلوب نیست. در بسیاری از موارد عملی سیستم کنترل مطلوب باید مجموعه‌ای از قطبهای حلقه بسته مزدوج غالب، با نسبت میرایی و فرکانس طبیعی نامیرای معقول داشته باشد. تعیین محل قطبها و صفرهای مهم حلقه بسته، مثلاً قطبهای حلقه بسته غالب، بر اساس مشخصاتی صورت می‌گیرد که عملکرد سیستم بر اساس آنها سنجیده می‌شود.

حذف قطبهای مزدوج مختلط ناخواسته. اگر تابع تبدیل سیستم تحت کنترل یک یا چند زوج قطب مزدوج مختلط داشته باشد، ممکن است جبرانسازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز-پیشفاز نتوانند نتایج مطلوب را ایجاد کنند. در چنین مواردی شبکه‌ای با دو صفر و دو قطب می‌تواند مفید باشد. اگر بتوان صفرها را طوری برگزید که قطبهای مزدوج مختلط نامطلوب سیستم حذف شود، عملاً می‌توان به جای قطبهای نامطلوب قطبهای مطلوبی ایجاد کرد. اگر قطبهای مزدوج مختلط ناخواسته در نیم‌صفحه چپ و به شکل زیر باشند

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2}$$

مسائل نمونه و حلشان

الف ۷-۱ سیستمی با تابع تبدیل حلقه بسته زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

قطبهای حلقه بسته در $s = -2$ و $s = -5$ قرار دارند و سیستم نوسانی نیست.

نشان دهید که پاسخ فرکانسی حلقه بسته، به رغم بزرگتر از یک بودن نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته، قله تشدید دارد.

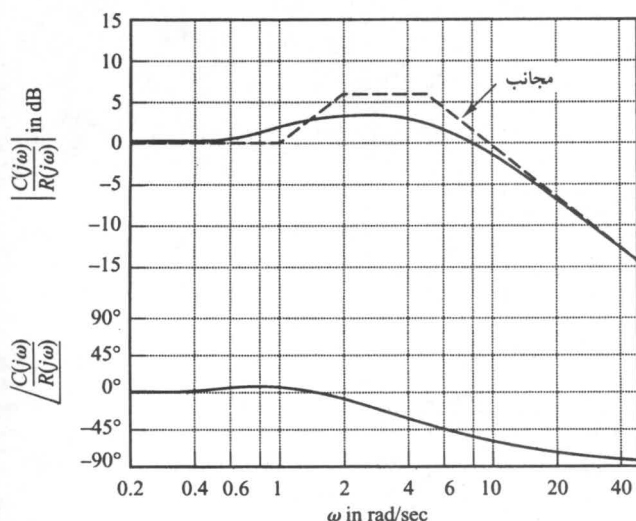
حل: شکل ۷-۱۱۸ نمودار بوده سیستم را نشان می دهد. مقدار قله تشدید تقریباً ۳٫۵ dB است. (توجه کنید که در صورت نبودن صفر، سیستم مرتبه دوم دارای $\zeta > 0.7$ قله تشدید ندارد، ولی وجود یک صفر حلقه بسته می تواند چنین قله ای به وجود آورد).

الف ۷-۲ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

توابع تبدیل $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ ، $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ ، $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ را بیابید. در یافتن $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ داریم $U_2(j\omega) = 0$ ؛ به نحوی مشابه در یافتن



شکل ۷-۱۱۸

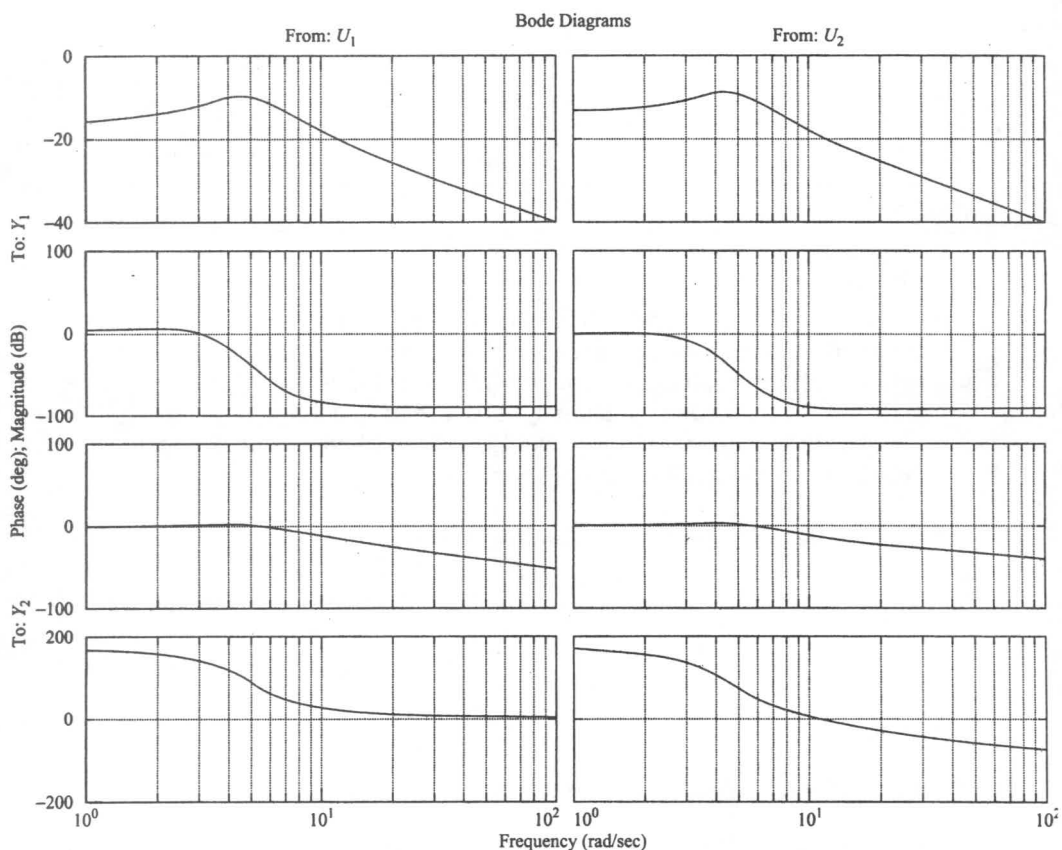
نمودار بوده سیستم

$$10(1+j\omega)/[(2+j\omega)(5+j\omega)]$$

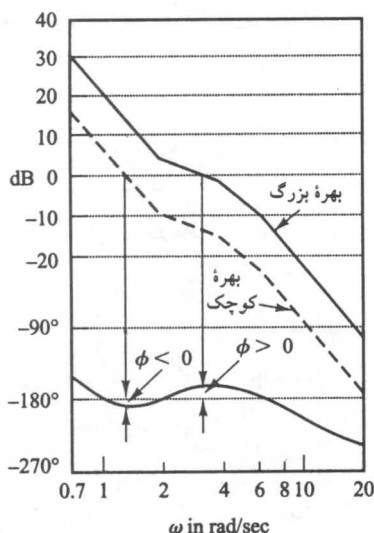
الف ۳-۷ نمودارهای بوده سیستم توصیف شده در مسئله الف ۷-۲ را با استفاده از MATLAB بیابید.
 حل: برنامه ۷-۱۵ نمودارهای بوده سیستم را به دست می‌دهد. چهار مجموعه نمودار بوده وجود دارد: دو مجموعه به ازای ورودی ۱ و دو مجموعه به ازای ورودی ۲. نمودارهای بوده در شکل ۷-۱۱۹ نشان داده شده‌اند.

MATLAB Program 7-15

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [1 1;0 1];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
bode(A,B,C,D)
```



شکل ۷-۱۱۹ نمودارهای بوده .



شکل ۷-۱۰۸

نمودارهای بوده سیستم دارای پایداری مشروط.

۷-۱۳ جبران سازی پسفاز - پیشفاز

ابتدا مشخصات پاسخ فرکانسی جبران ساز پسفاز و پیشفاز را بررسی می کنیم. سپس روش جبران سازی پسفاز - پیشفاز را براساس رهیافت پاسخ فرکانسی معرفی می کنیم.

مشخصات جبران ساز پسفاز - پیشفاز. جبران ساز پسفاز - پیشفاز زیر را در نظر بگیرید

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_r}}{s + \frac{1}{\beta T_r}} \right) \quad (۷-۲۷)$$

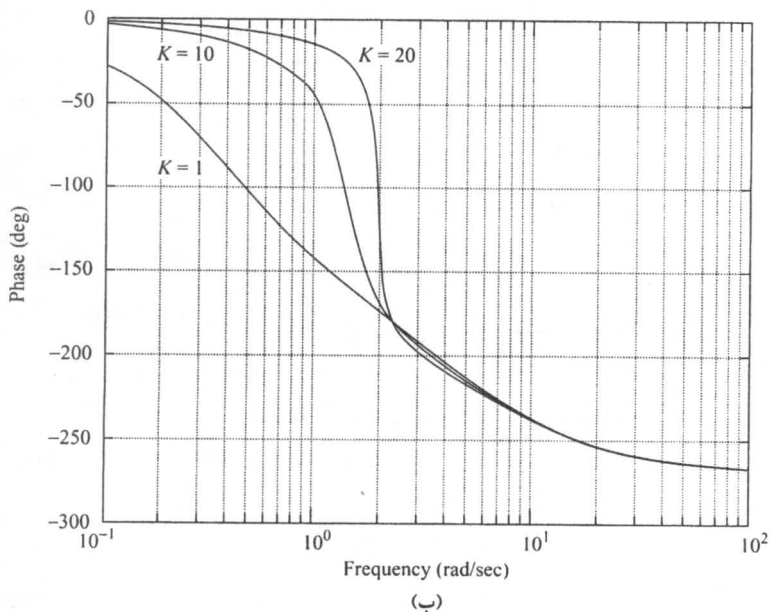
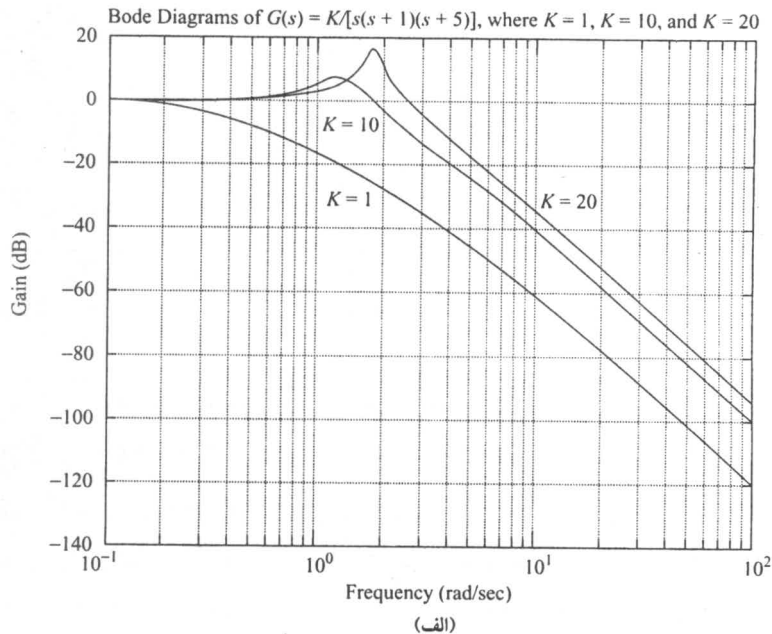
که در آن $\gamma > 1$ و $\beta > 1$. جمله زیر اثر شبکه پیشفاز

$$\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1} \right) \quad (\gamma > 1)$$

و جمله زیر اثر شبکه پسفاز را ایجاد می کند:

$$\frac{s + \frac{1}{T_r}}{s + \frac{1}{\beta T_r}} = \beta \left(\frac{T_r s + 1}{\beta T_r s + 1} \right) \quad (\beta > 1)$$

در طراحی جبران ساز پسفاز - پیشفاز معمولاً γ برابر β انتخاب می شود. (البته این کار ضروری نیست و می توان $\gamma \neq \beta$ را به کار برد.) در ادامه حالت $\gamma = \beta$ را در نظر می گیریم. نمودار قطبی جبران ساز



شکل ۷-۱۲۱

نمودارهای بوده.

(الف) نمودارهای دامنه؛

(ب) نمودارهای فاز

بر حسب فرکانس.

الف ۷-۵ ثابت کنید نمودارهای قطبی تابع تبدیل سینوسی زیر یک نیمدایره است

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

مرکز و شعاع دایره را بیابید.

جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad (28-7)$$

که در آن $\beta > 1$. بخش پیشفاز جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز (بخش مربوط به T_1) منحنی پاسخ فرکانسی را با افزودن زاویه و افزایش حاشیه فاز در فرکانس عبور بهره تغییر می‌دهد. بخش پسفاز (بخش مربوط به T_2) در نزدیک فرکانس عبور بهره و پس از آن تضعیف ایجاد می‌کند و به این ترتیب امکان افزایش بهره در فرکانسهای پایین را برای بهبود عملکرد حالت ماندگار فراهم می‌سازد. جزئیات روش طراحی جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز را با مثالی روشن می‌کنیم.

سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

مثال ۷-۲۸

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

خواسته شده است که ثابت خطای سرعت ایستا 10^{-1} sec^{-1} ، حاشیه فاز 5° و حاشیه بهره ۱۰ dB یا بیشتر باشد.

فرض کنید از جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز بیان شده با معادله (۲۸-۷) استفاده می‌کنیم. [توجه کنید که بخش پیشفاز هم حاشیه فاز و هم پهنای باند سیستم را زیاد می‌کند (که به معنی افزایش سرعت پاسخ است). بخش پسفاز بهره فرکانس پایین را حفظ می‌کند].

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است. چون بهره K وسیله تحت کنترل قابل تنظیم است، K_c را برابر یک فرض می‌کنیم. پس $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = 1$.

با توجه به خواسته مربوط به ثابت خطای سرعت به دست می‌آوریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2} = 10$$

پس

$$K = 20$$

حال نمودار بوده سیستم جبران نشده را مطابق شکل ۷-۱۱۱ به ازای $K = 20$ ، رسم می‌کنیم. حاشیه فاز سیستم جبران نشده را -33° می‌یابیم که نشان می‌دهد سیستم جبران نشده ناپایدار است.

گام بعدی طراحی جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز انتخاب فرکانس عبور بهره جدید است. منحنی زاویه فاز نشان می‌دهد که در $\omega = 1/5 \text{ rad/s}$ داریم $\angle G(j\omega) = -180^\circ$. انتخاب فرکانس $1/5 \text{ rad/sec}$ به عنوان فرکانس عبور بهره جدید مناسب به نظر می‌آید، زیرا زاویه پیشفازی لازم در $\omega = 1/5 \text{ rad/sec}$ برابر 5° می‌شود که با یک

$$\hat{F}'(s) = k(s+z_1)^{k-1} X(s) + (s+z_1)^k X'(s)$$

پس

$$\frac{\hat{F}'(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{k}{s+z_1} + \frac{X'(s)}{X(s)} \quad (۳۱-۷)$$

می‌بینیم که با گرفتن نسبت $\hat{F}'(s)/\hat{F}(s)$ صفر مرتبه k تابع $\hat{F}(s)$ به قطب ساده‌ای از $\hat{F}'(s)/\hat{F}(s)$ تبدیل می‌شود.

اگر جمله آخر طرف راست معادله (۳۱-۷) در داخل مسیر بسته صفحه s قطب یا صفر نداشته باشد، آنگاه $F'(s)/F(s)$ در داخل این مسیر، بجز نقطه $s = -z_1$ تحلیلی است. پس با توجه به معادله (۳۰-۷) و استفاده از قضیه باقیمانده که می‌گوید انتگرال $F'(s)/F(s)$ روی مسیر بسته‌ای در صفحه s در جهت ساعتگرد، برابر است با حاصلضرب $-2\pi j$ در باقیمانده‌های قطبهای ساده $F'(s)/F(s)$ یا

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j \quad (\text{جمع باقیمانده‌ها})$$

به دست می‌آوریم

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j [(k_1 + k_2 + \dots) - (m_1 + m_2 + \dots)] = -2\pi j (Z - P)$$

که در آن $k_1 + k_2 + \dots = Z$ تعداد کل صفرهای $F(s)$ داخل مسیر بسته صفحه s

$m_1 + m_2 + \dots = P$ تعداد کل قطبهای $F(s)$ داخل مسیر بسته صفحه s

[صفر (یا قطب) مرتبه k ، صفر (یا قطب) واقع در آن نقطه فرض می‌شود]. چون $F(s)$ یک کمیت مختلط است، می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$F(s) = |F| e^{j\theta}$$

$$\ln F(s) = \ln |F| + j\theta$$

و

چون $F'(s)/F(s)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln F(s)}{ds}$$

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln |F|}{ds} + j \frac{d\theta}{ds}$$

به دست می‌آوریم

اگر مسیر بسته صفحه s به مسیر بسته Γ در صفحه $F(s)$ نگاشته شود داریم

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \oint_{\Gamma} d \ln |F| + j \oint_{\Gamma} d\theta = j \int d\theta = 2\pi j (P - Z)$$

انتگرال $\oint_{\Gamma} d \ln |F|$ صفر است، زیرا دامنه $\ln |F|$ در ابتدا و انتهای مسیر Γ یکسان است. پس به دست

می‌آوریم

$$\frac{s+0.15}{s+0.015} = 10 \left(\frac{6/67s+1}{66/7s+1} \right)$$

بخش پیشفاز را می‌توان به این صورت تعیین کرد: چون فرکانس عبور بهره جدید $\omega = 1/5 \text{ rad/sec}$ است، $G(j\omega)$ از شکل ۷-۱۱۱ برابر 13 dB به دست می‌آید. پس اگر جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز در $\omega = 1/5 \text{ rad/s}$ تضعیفی به میزان 13 dB - ایجاد کند، فرکانس عبور بهره جدید مقدار مطلوبی می‌یابد. با توجه به این خواسته، می‌توان خط راستی با شیب 20 dB/dec رسم کرد که از نقطه $(1/5 \text{ rad/sec}, -13 \text{ dB})$ بگذرد. محل برخورد این خط با خطوط 0 dB و -20 dB فرکانسهای گوشه‌ای را تعیین می‌کند. پس فرکانسهای گوشه‌ای بخش پیشفاز $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ و $\omega = 7 \text{ rad/s}$ است. به این ترتیب تابع تبدیل بخش پیشفاز جبران‌ساز عبارت است از

$$\frac{s+0.7}{s+7} = \frac{1}{10} \left(\frac{1/43s+1}{0.143s+1} \right)$$

با ترکیب توابع تبدیل بخش پسفاز و پیشفاز جبران‌ساز، تابع تبدیل جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز را به دست می‌آوریم. چون $K_c = 1$ داریم

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \left(\frac{s+0.7}{s+7} \right) \left(\frac{s+0.15}{s+0.015} \right) \\ &= \left(\frac{1/43s+1}{0.143s+1} \right) \left(\frac{6/67s+1}{66/7s+1} \right) \end{aligned}$$

منحنی‌هایی دامنه و زاویه فاز جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به دست آمده در شکل ۷-۱۱۱ نشان داده شده است. تابع تبدیل حلقه باز جبران شده عبارت است از

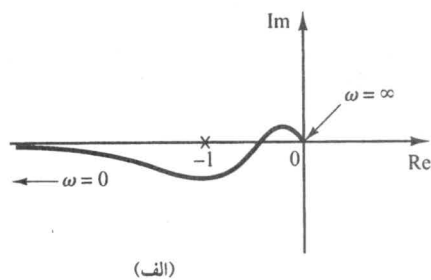
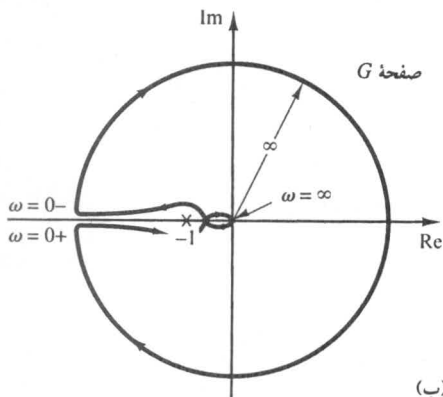
$$\begin{aligned} G_c(s) G(s) &= \frac{(s+0.7)(s+0.15) 20}{(s+7)(s+0.015)s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{10(1/43s+1)(6/67s+1)}{s(0.143s+1)(66/7s+1)(s+1)(0.5s+1)} \end{aligned} \quad (29-7)$$

منحنی‌های دامنه و فاز سیستم بیان شده با معادله (۷-۲۹) نیز در شکل ۷-۱۱۱ رسم شده است. حاشیه فاز سیستم جبران شده 50° ، حاشیه بهره آن 16 dB و ثابت خطای ایستای سرعت آن 10 sec^{-1} است. بنابراین تمام خواسته‌ها برآورده شده، طراحی کامل می‌شود.

شکل ۷-۱۱۲ نمودارهای قطبی سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. مکان هندسی $G_c(j\omega) G(j\omega)$ در فرکانسی حدود $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ بر دایره $M = 1/2$ مماس است. این مطلب به وضوح نشان می‌دهد که سیستم جبران شده پایداری نسبی رضایتبخشی دارد. پهنای باند سیستم جبران شده کمی از 2 rad/sec بزرگتر است.

در ادامه مشخصات پاسخ گذاری سیستم جبران شده را بررسی می‌کنیم (سیستم جبران نشده ناپایدار است) تابع تبدیل حلقه بسته سیستم جبران شده عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95/381s^2 + 81s + 10}{4/7691s^5 + 47/7287s^4 + 110/3026s^3 + 163/724s^2 + 82s + 10}$$



شکل ۷-۱۲۳

(الف) نمودار نایکویست.

(ب) نمودار نایکویست کامل در صفحه G .

حل: شکل ۷-۱۲۳ (ب) نمودار نایکویست کامل را نشان می‌دهد. جواب سه سوال به صورت زیر است :
(الف) سیستم حلقه بسته پایدار است، زیرا نمودار نایکویست نقطه بحرانی $(-1, j0)$ را دور نمی‌زند. پس چون $P=0$ و $N=0$ ، بنابراین $Z=N+P=0$.

(ب) تابع تبدیل حلقه باز قطبی در نیمه راست صفحه s دارد. پس $P=1$ (سیستم حلقه باز ناپایدار است). برای این که سیستم حلقه بسته پایدار باشد، نمودار نایکویست باید نقطه بحرانی $(-1, j0)$ را یک بار در جهت پاد ساعتگرد دور بزند. ولی نمودار نایکویست این نقطه را دور نمی‌زند، بنابراین $N=0$ ، پس $Z=N+P=1$ و سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

(ج) چون تابع تبدیل حلقه باز در نیمه صفحه راست یک صفر دارد و قطب ندارد داریم $Z=N+P=0$ ؛ پس سیستم حلقه بسته پایدار است. (توجه کنید که صفرهای تابع تبدیل حلقه باز بر پایداری سیستم حلقه بسته اثر نمی‌گذارد).

الف ۷-۸ آیا سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر به ازای $K=2$ پایدار است؟

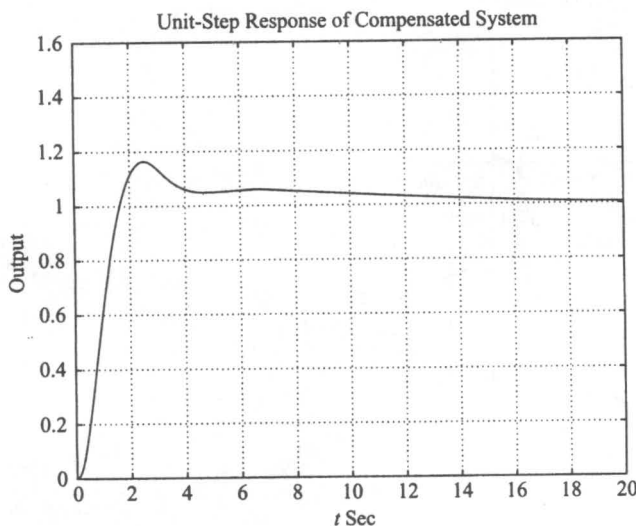
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

مقدار بحرانی K برای پایداری چقدر است؟

حل: تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

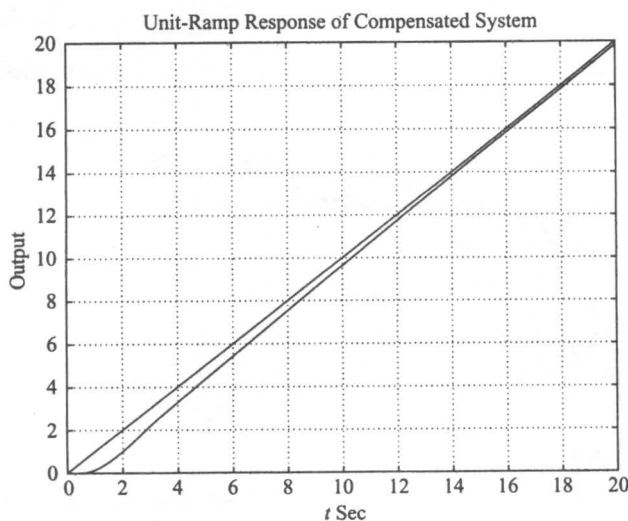
$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)} \\ &= \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)} \end{aligned}$$

این تابع تبدیل حلقه باز در نیمه صفحه راست قطب ندارد. پس برای پایداری سیستم نمودار نایکویست نباید نقطه $(-1, j0)$ را دور بزند. بیایید محل برخورد نمودار نایکویست و بخش منفی محور حقیقی را بیابیم. بخش موهومی $G(j\omega)H(j\omega)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم



شکل ۷-۱۱۳

پاسخ پله واحد سیستم
جبران شده (مثال ۷-۲۸).



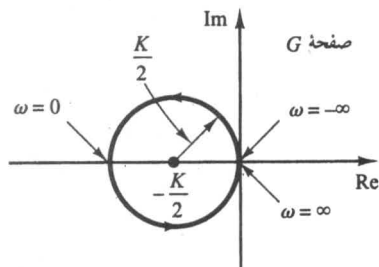
شکل ۷-۱۱۴

پاسخ شیب سیستم
جبران شده (مثال ۷-۲۸).

جبران‌ساز پایدار مرتبه پایین‌تری به دست می‌دهند. توجه کنید که طراحی مناسب جبران‌ساز برای سیستمی پیچیده نیازمند کاربرد خلاقانه این اصول پایه‌ای طراحی است.

مقایسه جبران‌سازهای پس‌فاز، پیش‌فاز، و پس‌فاز-پیش‌فاز

۱. جبران‌ساز پیش‌فاز معمولاً برای بهبود حاشیه‌های پایداری به کار می‌رود. جبران‌ساز پس‌فاز معمولاً برای بهبود عملکرد حالت ماندگار به کار می‌رود. در جبران‌سازی پیش‌فاز نتیجه مطلوب به خاطر اثر

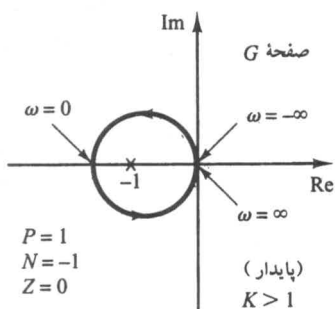
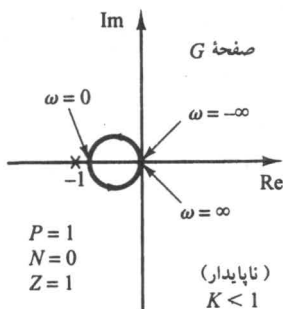


(الف)

شکل ۷-۱۲۵

(الف) نمودار قطبی $K/(j\omega - 1)$ ؛(ب) نمودارهای قطبی $K/(j\omega - 1)$

برای حالت‌های ناپایدار و پایدار.

(پایدار)
 $K > 1$ (ناپایدار)
 $K < 1$

(ب)

با استفاده از نمودار نایکوئیست مقدار بحرانی K برای پایداری را تعیین کنید.

حل: برای این سیستم

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K e^{-j\omega} j\omega}{j\omega + 1} \\ &= \frac{K (\cos \omega - j \sin \omega)(1 - j\omega)}{1 + \omega^2} \\ &= \frac{K}{1 + \omega^2} [(\cos \omega - \omega \sin \omega) - j(\sin \omega - \omega \cos \omega)] \end{aligned}$$

بخش موهومی $G(j\omega)$ به شرطی صفر است که

$$\sin \omega - \omega \cos \omega = 0$$

$$\omega = -\tan \omega$$

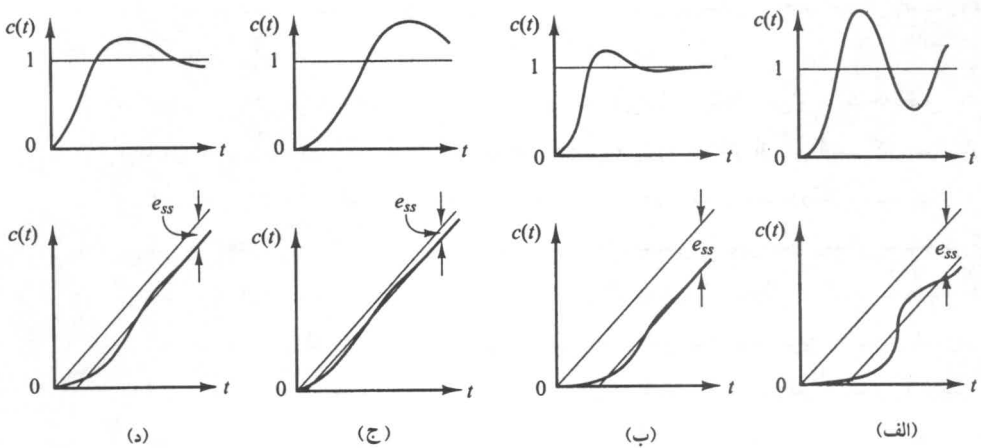
پس

این معادله را حل می‌کنیم تا کوچکترین ω مثبت ارضا کننده آن را بیابیم

$$\omega = 2.4482$$

با گذاشتن $\omega = 2.4482$ در $G(j\omega)$ به دست می‌آوریم

$$G(j 2.4482) = \frac{K}{1 + 2.4482^2} (\cos 1/9586 - 2.4482 \sin 1/9586) = -0.378 K$$



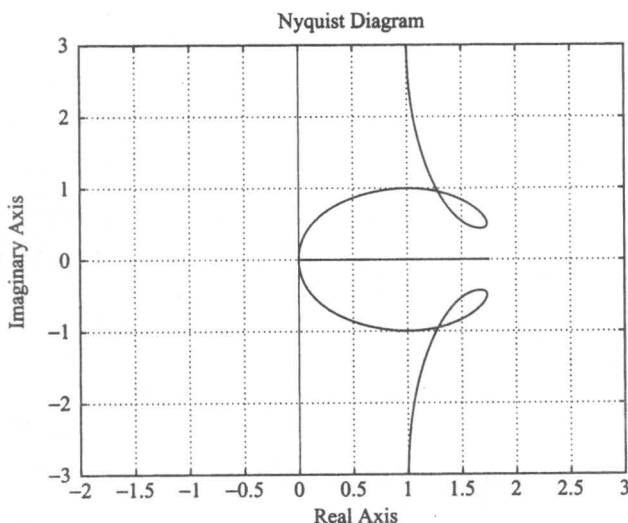
شکل ۷-۱۱۵ منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب (الف) سیستم جبران نشده؛ (ب) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پیشفاز؛ (ج) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پسفاز؛ (د) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پسفاز-پیشفاز.

مقایسه ترسیمی. شکل ۷-۱۱۵ (الف) منحنی پاسخ پله واحد و منحنی پاسخ شیب واحد یک سیستم جبران نشده را نشان می‌دهد. پاسخ پله و پاسخ شیب نوعی سیستم جبران شده با جبران‌سازهای پیشفاز، پسفاز، و پسفاز-پیشفاز به ترتیب در شکل‌های ۷-۱۱۵ (ب)، (ج)، و (د) نشان داده شده است. سیستم جبران شده با جبران‌ساز پیشفاز سریع‌ترین پاسخ را دارد، ولی سیستم جبران شده با جبران‌ساز پسفاز کندترین پاسخ را دارد، ولی پاسخ شیب آن بسیار بهتر است. جبران‌ساز پسفاز-پیشفاز مصالحه‌ای بین این دو ایجاد می‌کند؛ به صورتی که بهبود معقولی در پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار حاصل شود. این منحنی‌ها طبیعت بهبودهای قابل دسترس با هر یک از این جبران‌سازها را نشان می‌دهد.

جبران‌سازی با فیدبک. تاکومتر یک عنصر فیدبک مشتقی است. ژيروسکوپ مشتقی یکی دیگر از عناصر معمول برای فیدبک مشتقی است که در سیستمهای ناوبری خودکار استفاده می‌شود.

در سیستمهای سرووی موقعیت از فیدبک سرعت، با استفاده از تاکومتر، بسیار استفاده می‌شود. گفتیم که اگر سیستم در معرض سیگنال‌های نویزی قرار داشته باشد و طرح فیدبک سرعت به کار رفته مستلزم مشتق‌گیری از سیگنال خروجی باشد، فیدبک سرعت می‌تواند مشکلاتی به همراه داشته باشد. (نتیجه این مشتق‌گیری تقویت اثرهای نویز است.)

حذف قطبهای ناخواسته. چون حاصلضرب دو عنصر متوالی حاصلضرب توابع تبدیل آنها است، می‌توان با متوالی کردن یک عنصر جبران‌ساز بعضی قطبها یا صفرهای نامطلوب را حذف کرد. برای این منظور باید قطبها و صفرهای عنصر جبران‌ساز را طوری تنظیم کرد که صفرها و قطبهای نامطلوب را حذف کند. مثلاً ثابت زمانی بزرگ T_1 را می‌توان با استفاده از شبکه پیشفاز $(T_1s+1)/(T_1s+1)$ به صورت زیر حذف کرد



شکل ۷-۱۲۷

نمودار نایکویست

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

الف ۷-۱۲ سیستم مسئله الف ۷-۱۱ را در نظر بگیرید. نمودار نایکویست را تنها برای فرکانسهای مثبت رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار نایکویست برای فرکانسهای مثبت می توان از دستور زیر استفاده کرد

$$[re, im, w] = nyquist(num, den, w)$$

ناحیه فرکانسی را باید با استفاده از گامهای مختلف به زیر ناحیه هایی تقسیم کرد. مثلاً می توان ناحیه مورد نظر را به سه زیر ناحیه تقسیم کرد

$$w1 = 0.1:0.1:10;$$

$$w2 = 10:2:100;$$

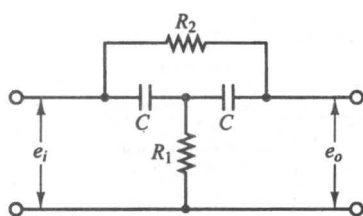
$$w3 = 100:10:500;$$

$$w = [w1 \ w2 \ w3]$$

در برنامه ۷-۱۸ از این سه زیر ناحیه استفاده شده است. با دادن این برنامه نمودار نایکویست شکل ۷-۱۲۸ به دست می آید.

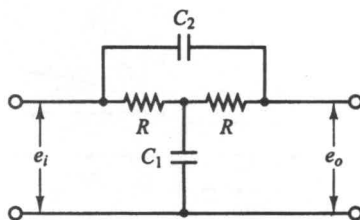
MATLAB Program 7-18

```
num = [20 20 10];
den = [1 11 10 0];
w1 = 0.1:0.1:10; w2 = 10:2:100; w3 = 100:10:500;
w = [w1 w2 w3];
[re, im, w] = nyquist(num, den, w);
plot(re, im)
v = [-3 3 -5 1]; axis(v);
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 20(s^2 + s + 0.5)/[s(s + 1)(s + 10)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 C R_2 C s^2 + 2 R_1 C s + 1}{R_1 C R_2 C s^2 + (R_2 C + 2 R_1 C) s + 1}$$

(ب)



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R C_1 R C_2 s^2 + 2 R C_2 s + 1}{R C_1 R C_2 s^2 + (R C_1 + 2 R C_2) s + 1}$$

(الف)

شکل ۷-۱۱۷

شبکه‌های T پل دار.

گذاشتن شبکه جبران سازی با تابع تبدیل زیر

$$\frac{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2}$$

قطبهای مزدوج مختلط نامطلوب را به قطبهایی قابل قبول تبدیل می‌کند. توجه کنید که هر چند حذف دقیق ممکن نیست، ولی سیستم جبران شده پاسخی با مشخصات بهتر دارد. (چنانچه قبلاً گفتیم اگر قطبهای مزدوج مختلط نامطلوب در نیم صفحه راست باشند، نباید از این روش استفاده کرد.)

شبکه‌های T پل دار شبکه‌هایی هستند که تنها از خازن و مقاومت ساخته شده‌اند و تابع تبدیلی با دو صفر و دو قطب دارند. شکل ۷-۱۱۷ نمونه‌هایی از این شبکه‌ها و توابع تبدیل آنها را نشان می‌دهد. (این توابع تبدیل در مسئله الف-۳-۵ به دست آورده شده است.)

توضیحات نهایی. در مثالهای طراحی این فصل تنها به تابع تبدیل جبران ساز نظر داشتیم. در مسائل طراحی واقعی باید سخت افزار مناسب برای جبران ساز نیز تعیین شود. به این ترتیب محدودیت های طراحی دیگری چون هزینه، اندازه، و قابلیت اطمینان نیز در نظر گرفته می‌شود.

سیستم طراحی شده ممکن است در شرایط عادی کار مشخصات لازم را برآورده کند، ولی در صورت بروز تغییرات شدید در محیط رفتار کاملاً متفاوتی از خود نشان دهد. چون تغییر شرایط محیطی بر بهره و ثابت زمانی های سیستم تاثیر می‌گذارد، باید امکان تنظیم دستی یا خودکار بهره برای خنثی کردن اثرهای این تغییرات، اثرهای غیرخطی در نظر گرفته نشده در طراحی و تولرانسهای ساخت، که باعث می‌شود اجزاء سیستم دقیقاً آنچه فرض شده‌اند نباشد، در نظر گرفته شود. (اثر تولرانس ساخت در سیستمهای حلقه بسته تا حد زیادی پوشیده می‌شود؛ بنابراین چنین اثرهایی در عملکرد حلقه بسته چندان بحرانی نیستند، ولی در عملکرد حلقه باز می‌توانند بحرانی باشند.) به علاوه طراح باید به خاطر داشته باشد که هر سیستمی کم کم تغییر می‌کند، علت عمده این تغییر فرسودگی تدریجی آن است.

MATLAB Program 7-19

```

num = [20 20 10];
den = [1 11 10 0];
ww = logspace(-1,2,100);
nyquist(num,den,ww)
v = [-2 3 -5 0]; axis(v);
grid
hold
Current plot held
w = [0.2 0.3 0.5 1 2 6 10 20];
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'o')
text(1.1,-4.8,'w = 0.2')
text(1.1,-3.1,'0.3')
text(1.25,-1.7,'0.5')
text(1.37,-0.4,'1')
text(1.8,-0.3,'2')
text(1.4,-1.1,'6')
text(0.77,-0.8,'10')
text(0.037,-0.8,'20')

% ----- To get the values of magnitude and phase (in degrees) of G(jw)
% at the specified w values, enter the command [mag,phase,w]
% = bode(num,den,w) -----

[mag,phase,w] = bode(num,den,w);

% ----- The following table shows the specified frequency values w and
% the corresponding values of magnitude and phase (in degrees) -----

[w mag phase]
ans =
    0.2000    4.9176   -78.9571
    0.3000    3.2426   -72.2244
    0.5000    1.9975   -55.9925
    1.0000    1.5733   -24.1455
    2.0000    1.7678   -14.4898
    6.0000    1.6918   -31.0946
   10.0000    1.4072   -45.0285
   20.0000    0.8933   -63.4385

```

$$U_1(j\omega) = 0 \text{ و } Y_1(j\omega)/U_1(j\omega) \text{ و } Y_2(j\omega)/U_2(j\omega) \text{ فرض کنید}$$

حل: عبارتهای ماتریسی زیر را برای این سیستم داریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

ماتریس تبدیل عبارت است از

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

که در آن

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

برای سیستم مورد نظر ماتریس تبدیل عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4s + 25} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s+5}{s^2 + 4s + 25} \\ \frac{-25}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s-25}{s^2 + 4s + 25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s+5}{s^2 + 4s + 25} \\ \frac{-25}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s-25}{s^2 + 4s + 25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

با فرض $U_2(j\omega) = 0$ ، $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ را به شکل زیر می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(j\omega)}{U_1(j\omega)} &= \frac{j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25} \\ \frac{Y_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} &= \frac{-25}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25} \end{aligned}$$

به نحوی مشابه با فرض $U_1(j\omega) = 0$ ، $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ را به صورت زیر می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(j\omega)}{U_2(j\omega)} &= \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25} \\ \frac{Y_2(j\omega)}{U_2(j\omega)} &= \frac{j\omega - 25}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25} \end{aligned}$$

توجه کنید که $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ یک تابع تبدیل غیرمی‌نیم فاز است.

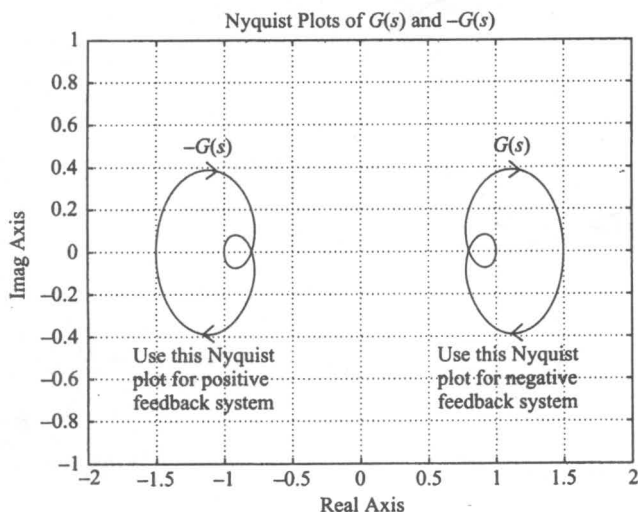
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4 - (s^2 + 4s + 6)}$$

$$= \frac{s^2 + 4s + 6}{s - 2}$$

نمودار نایکویست برای سیستم با فیدبک مثبت تصویر آینه‌ای نمودار نایکویست برای سیستم دارای فیدبک منفی نسبت به محور موهومی است. این مطلب در شکل ۷-۱۳۱ که توسط برنامه ۷-۲۱ رسم شده، دیده می‌شود. توجه کنید که سیستم دارای فیدبک مثبت ناپایدار و سیستم دارای فیدبک منفی پایدار است.

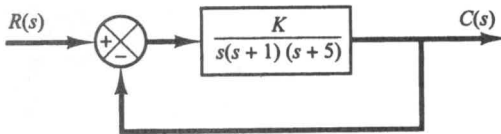
MATLAB Program 7-21

```
num1 = [1 4 6];
den1 = [1 5 4];
num2 = [-1 -4 -6];
den2 = [1 5 4];
nyquist(num1,den1);
hold on
nyquist(num2,den2);
v = [-2 2 -1 1];
axis(v);
grid
title('Nyquist Plots of G(s) and -G(s)')
text(1.0,0.5,'G(s)')
text(0.57,-0.48,'Use this Nyquist')
text(0.57,-0.61,'plot for negative')
text(0.57,-0.73,'feedback system')
text(-1.3,0.5,'-G(s)')
text(-1.7,-0.48,'Use this Nyquist')
text(-1.7,-0.61,'plot for positive')
text(-1.7,-0.73,'feedback system')
```



شکل ۷-۱۳۱

نمودارهای نایکویست سیستم
دارای فیدبک مثبت و سیستم
دارای فیدبک منفی.



شکل ۷-۱۲۰

سیستم حلقه بسته.

الف ۷-۴ با استفاده از MATLAB نمودارهای بوده سیستم شکل ۷-۱۲۰ را به ازای $K=1$ ، $K=10$ ، و $K=20$ رسم کنید. سه نمودار دامنه را در یک شکل و سه نمودار فاز را نیز در یک شکل رسم کنید.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

پس صورت و مخرج $C(s)/R(s)$ عبارت اند از

$$\text{num}=[K]$$

$$\text{den}=[1 \ 6 \ 5 \ K]$$

برنامه ۷-۱۶ یک روش انجام کار خواسته شده را نشان می دهد. نمودارهای بوده حاصل در شکل های ۷-۱۲۱ (الف) و (ب) نشان داده شده اند.

MATLAB Program 7-16

```
w = logspace(-1,2,200);
for i = 1:3;
    if i = 1; K = 1; [mag,phase,w] = bode([K],[1 6 5 K],w);
        mag1dB = 20*log10(mag); phase1 = phase; end;
    if i = 2; K = 10; [mag,phase,w] = bode([K],[1 6 5 K],w);
        mag2dB = 20*log10(mag); phase2 = phase; end;
    if i = 3; K = 20; [mag,phase,w] = bode([K],[1 6 5 K],w);
        mag3dB = 20*log10(mag); phase3 = phase; end;
end
semilogx(w,mag1dB,'-',w,mag2dB,'-',w,mag3dB,'-')
grid
title('Bode Diagrams of G(s) = K/[s(s + 1)(s + 5)], where K = 1, K = 10, and K = 20')
xlabel('Frequency (rad/sec)')
ylabel('Gain (dB)')
text(1.2,-31,'K = 1')
text(1.1,-8,'K = 10')
text(11,-31,'K = 20')
semilogx(w,phase1,'-',w,phase2,'-',w,phase3,'-')
grid
xlabel('Frequency (rad/sec)')
ylabel('Phase (deg)')
text(0.2,-90,'K = 1')
text(0.2,-20,'K = 10')
text(1.6,-20,'K = 20')
```

مکان هندسی $K/G(j\omega)$ محور حقیقی را به ازای $\omega = \sqrt{2}$ قطع می‌کند و نقطه برخورد با محور حقیقی منفی -2 است.

با توجه به شکل ۷-۱۳۲ می‌بینیم که اگر نقطه بحرانی در ناحیه بین -2 و $-\infty$ باشد، منحنی آن را دور نمی‌زند. پس برای پایداری باید داشته باشیم

$$-1 < \frac{-2}{K}$$

و گستره K برای پایداری عبارت است از

$$2 < K$$

که همان نتیجه به دست آمده در مثال ۷-۱۹ است.

الف ۷-۱۶ شکل ۷-۱۳۳ نمودار بلوکی سیستم کنترل یک فضاپیما را نشان می‌دهد. بهره K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° باشد. در این حالت حاشیه بهره چقدر است؟

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2} \quad \text{حل: چون}$$

داریم

$$\angle G(j\omega) = \angle(j\omega + 2) - 2 \angle j\omega = \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - 180^\circ$$

چون خواسته‌ایم حاشیه فاز 50° باشد، $\angle G(j\omega_c)$ باید برابر -130° باشد، که در آن ω_c فرکانس عبور بهره است

$$\angle G(j\omega_c) = -130^\circ$$

$$\tan^{-1} \frac{\omega_c}{2} = 50^\circ$$

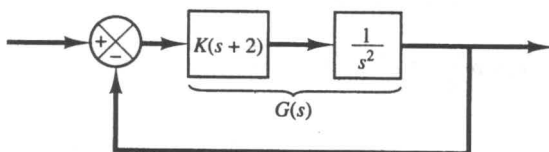
پس قرار می‌دهیم

و از آن به دست می‌آوریم

$$\omega_c = 2.3835 \text{ rad/sec}$$

چون منحنی فاز خط -180° را قطع نمی‌کند، حاشیه بهره $+\infty$ dB است. در $\omega = 2.3835$ دامنه $G(j\omega)$ باید 0 dB باشد، پس

$$\left| \frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=2.3835} = 1$$



شکل ۷-۱۳۳

سیستم کنترل فضاپیما.

حل: تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ داده شده را می توان به شکل زیر نوشت

$$G(j\omega) = X + jY$$

که در آن

$$Y = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad X = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}$$

پس

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{(\omega^2 T^2 - 1)^2}{4(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{4}$$

می بینیم که نمودار $G(j\omega)$ دایره ای به مرکز $(0, 0.5)$ و شعاع 0.5 است. نیمدایره بالایی با $0 \leq \omega \leq \infty$ و نیمدایره پایینی با $-\infty \leq \omega \leq 0$ متناظر است.

الف ۶-۷ قضیه نگاشت زیر را ثابت کنید: $F(s)$ را نسبت دو چند جمله ای بر حسب s فرض کنید. P را تعداد قطبها و Z را تعداد صفرهای $F(s)$ واقع در مسیر بسته ای در صفحه s با منظور کردن مرتبه صفرها و قطبها، در نظر بگیرید. مسیر بسته به نحوی فرض شده است که از هیچ صفر و قطبی نمی گذرد. بنابراین مسیر صفحه s به یک مسیر بسته در صفحه $F(s)$ نگاشته می شود. اگر جهت مسیر صفحه s ساعتگرد باشد، تعداد دورهایی که مسیر متناظر صفحه $F(s)$ در جهت پاد ساعتگرد حول مبدأ می زند، N ، برابر $Z - P$ است.

حل: برای اثبات این قضیه از قضیه های کوشی و باقیمانده استفاده می کنیم. قضیه کوشی می گوید انتگرال $F(s)$ روی مسیر بسته ای در صفحه s ، که $F(s)$ در آن و روی مرز آن تحلیلی[†] است، برابر صفر است؛ یا

$$\oint F(s) ds = 0$$

$F(s)$ را به صورت زیر فرض کنید.

$$F(s) = \frac{(s + z_1)^{k_1} (s + z_2)^{k_2} \dots}{(s + p_1)^{m_1} (s + p_2)^{m_2} \dots} X(s)$$

که $X(s)$ در مسیر بسته صفحه s تحلیلی است و تمام قطبها و صفرهای آن داخل مسیر است. پس $F'(s)/F(s)$ را می توان به شکل زیر نوشت

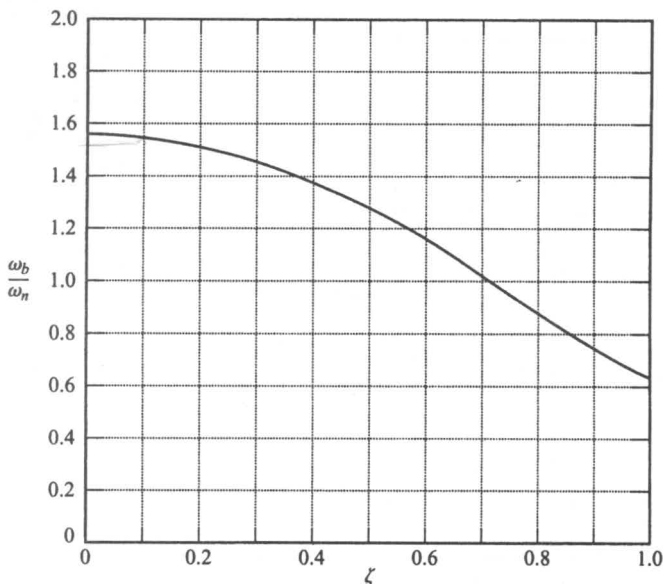
$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \left(\frac{k_1}{s + z_1} + \frac{k_2}{s + z_2} + \dots \right) - \left(\frac{m_1}{s + p_1} + \frac{m_2}{s + p_2} + \dots \right) + \frac{X'(s)}{X(s)} \quad (30-7)$$

درستی رابطه بالا را می توان به این صورت نشان داد: اگر $\hat{F}(s)$ به صورت زیر باشد

$$\hat{F}(s) = (s + z_1)^k X(s)$$

یعنی $\hat{F}(s)$ یک صفر مرتبه k در $s = -z_1$ دارد. با مشتقگیری از $\hat{F}(s)$ نسبت به s به دست می آوریم

[†] برای تعریف تابع تحلیلی، زیر نویس صفحه ۴۷۹ را ببینید.



شکل ۷-۱۳۴

منحنی ω_b / ω_n بر حسب ζ ،
پهنای باند است.

یا

$$\omega_b = \omega_n \left(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right)^{1/2}$$

شکل ۷-۱۳۴ منحنی ω_b / ω_n بر حسب ζ را نشان می‌دهد.

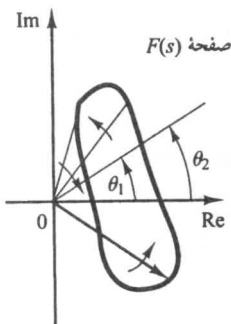
الف ۷-۱۸ نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ یک سیستم کنترل دارای فیدبک واحد در شکل ۷-۱۳۵ نشان داده شده است. می‌دانیم که تابع تبدیل حلقه باز می‌نیم فاز است. نمودار نشان می‌دهد که یک زوج قطب مزدوج مختلط در $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ وجود دارد. نسبت میرایی جمله مرتبه دوم مربوط به این قطبهای مزدوج مختلط را تعیین کنید. تابع تبدیل $G(s)$ را نیز بیابید.

حل: با توجه به شکل ۷-۹ و بررسی نمودار بوده شکل ۷-۱۳۵ نسبت میرایی ζ و فرکانس طبیعی نامبرای جمله مرتبه دوم به صورت زیر به دست می‌آید

$$\zeta = 0.1, \quad \omega_n = 2 \text{ rad/sec}$$

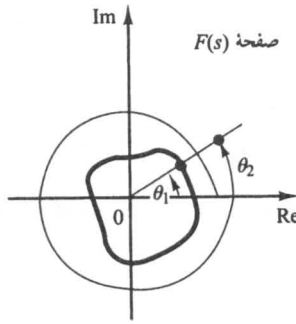
توجه به فرکانس گوشه‌ای دیگر در $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ و شیب -40 dB/dec منحنی دامنه در فرکانسهای پایین فرضی زیر را به دست می‌دهد

$$G(j\omega) = \frac{K \left(\frac{j\omega}{0.5} + 1 \right)}{(j\omega)^2 \left[\left(\frac{j\omega}{2} \right)^2 + 0.1(j\omega) + 1 \right]}$$



مبدأ دور زده نمی شود
 $\theta_2 - \theta_1 = 0$

(ب)



مبدأ دور زده می شود
 $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$

(الف)

شکل ۷-۱۲۲

تعیین دورهایی حول
 مبدأ صفحه $F(s)$.

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = P - Z$$

تفاوت زاویهها در ابتدا و انتهای مسیر، با کل تغییر فاز $F'(s)/F(s)$ ، هنگامی که نقطه مرجع صفحه s مسیر بسته را می پیماید، برابر است. توجه کنید که N تعداد دورهایی است که در جهت پاد ساعتگرد حول مبدأ صفحه $F(s)$ زده می شود، و $\theta_2 - \theta_1$ صفر یا مضربی از 2π رادیان است. پس داریم

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = -N$$

و رابطه زیر را به دست می آوریم

$$N = Z - P$$

که اثبات قضیه است.

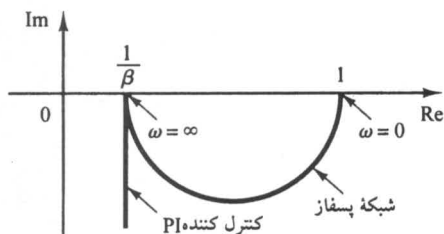
توجه کنید که این قضیه تعداد دقیق صفرها و قطبها را نمی دهد و تنها تفاضلشان را تعیین می کند. همچنین در شکلهای ۷-۱۲۲ (الف) و (ب) نشان داده شده است که تا θ به اندازه 2π رادیان تغییر نکند، مبدأ صفحه $F(s)$ دور زده نمی شود.

الف ۷-۷ شکل ۷-۱۲۳ (الف) نمودار نایکویست (قطبی) پاسخ فرکانسی حلقه باز یک سیستم کنترل دارای فیدبک واحد را نشان می دهد. با فرض این که مسیر نایکویست در صفحه s تمام نیم صفحه راست را دربر دارد، نمودار نایکویست کامل را در صفحه G رسم کنید. سپس به پرسشهای زیر پاسخ دهید:

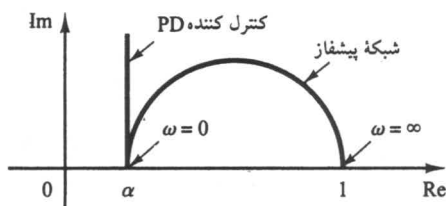
(الف) آیا اگر تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست صفحه s قطب نداشته باشد، سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه؟

(ب) اگر تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست یک قطب داشته ولی صفر نداشته باشد، سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه؟

(ج) اگر تابع تبدیل حلقه باز در نیمه راست صفحه s یک صفر داشته ولی قطب نداشته باشد، سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه؟



(ب)



(الف)

شکل ۷-۱۳۷ (الف) نمودارهای قطبی شبکه پیشفاز و کنترل کننده تناسبی - مشتقی؛ (ب) نمودارهای قطبی شبکه پسفاز و کنترل کننده تناسبی - انتگرالی.

سیستم شکل ۷-۱۳۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید عنصر $G_1(s)$ ناپایدار است. کل سیستم را می‌توان با انتخاب مناسب عنصر خطی $G_2(s)$ پایدار کرد. یک سیگنال سینوسی به ورودی اعمال می‌کنیم. در حالت پایدار تمام سیگنال‌های حلقه سینوسی‌اند. سیگنال‌های $e(t)$ ورودی عنصر ناپایدار، و $x(t)$ خروجی عنصر ناپایدار را اندازه می‌گیریم. با تغییر فرکانس ورودی $[\]$ و احتمالاً دامنه آن، برای سهولت اندازه‌گیری $e(t)$ و $x(t)$ و تکرار این فرایند می‌توان پاسخ فرکانسی عنصر خطی ناپایدار را به دست آورد.

الف ۷-۲۵ نشان دهید اگر یک شبکه پیشفاز (یک شبکه پسفاز) به طور متوالی در یک حلقه باز قرار گیرد، در فرکانسهای پایین (بالا) به صورت یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی (تناسبی - انتگرالی) عمل می‌کند. **حل:** در ناحیه فرکانسهای پایین نمودار قطبی شبکه پیشفاز تقریباً همانند نمودار قطبی یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی است. این مطلب در شکل ۷-۱۳۷ (الف) نشان داده شده است. به نحوی مشابه در ناحیه فرکانس بالا نمودار قطبی شبکه پسفاز همانند نمودار قطبی یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی است. این مطلب در شکل ۷-۱۳۷ (ب) نشان داده شده است.

الف ۷-۲۱ یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز $G_c(s)$ به صورت زیر تعریف شده است

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

نشان دهید که در فرکانس ω_1 زیر

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

زاویه فاز $G_c(j\omega)$ صفر می‌شود. (این جبران‌ساز در $0 < \omega < \omega_1$ به صورت جبران‌ساز پسفاز و در $\omega_1 < \omega < \infty$ به صورت جبران‌ساز پیشفاز عمل می‌کند.) (شکل ۷-۱۰۹ را ببینید.)

$$1 - 2\omega^2 = 0$$

که به دست می دهد

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با گذاشتن $\omega = 1/\sqrt{2}$ در $G(j\omega)H(j\omega)$ به دست می آوریم

$$G\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2K}{3}$$

مقدار بحرانی K با برابر ۱- قرار دادن $-2K/3$ به دست می آید

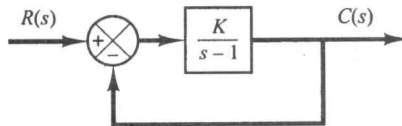
$$-\frac{2}{3}K = -1$$

پس

$$K = \frac{3}{2}$$

سیستم به ازای $\frac{3}{2} < K < \infty$ پایدار است. پس به ازای $K = 2$ سیستمی ناپایدار داریم.

الف ۷-۹ سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۲۴ را در نظر بگیرید. با استفاده از معیار پایداری نایکویست مقدار بحرانی K برای پایداری را تعیین کنید.



شکل ۷-۱۲۴

سیستم حلقه بسته.

حل: نمودار قطبی تابع

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

دایره‌ای به مرکز $(-K/2, 0)$ و شعاع $K/2$ به صورت شکل ۷-۱۲۵ (الف) است. با تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$ مکان هندسی $G(j\omega)$ یک دور در جهت پادساعتگرد می‌زند. در این سیستم $P=1$ ، زیرا $G(s)$ یک قطب در نیم‌صفحه راست دارد. برای پایدار بودن سیستم باید داشته باشیم $Z=0$. چون $Z=N-P$ ، برای پایدار بودن سیستم نمودار قطبی باید نقطه $0 - j + 1$ را یکبار در جهت پادساعتگرد دور بزند. (اگر نقطه $0 - j + 1$ دور زده نشود، سیستم ناپایدار است). پس برای پایداری باید K بزرگتر از یک باشد، و $K=1$ مرز پایداری را مشخص می‌کند. شکل ۷-۱۲۵ (ب) نمودارهای $G(j\omega)$ پایدار و ناپایدار را نشان می‌دهد.

الف ۷-۱۰ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

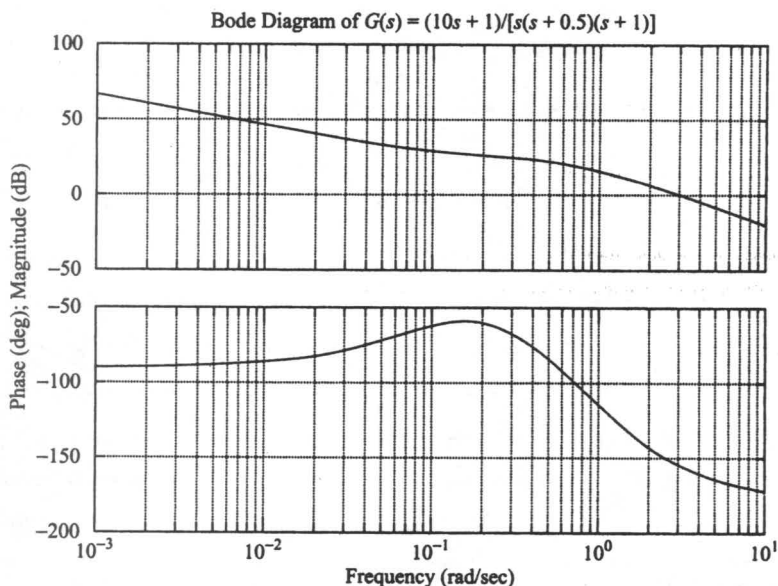
$$G(s) = \frac{K e^{-0.8s}}{s+1}$$

MATLAB Program 7-22

```

num = [10 1];
den = [1 1.5 0.5 0];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = (10s + 1)/[s(s + 0.5)(s + 1)]')

```



شکل ۷-۱۳۹ نمودار بوده $G(s) = (10s + 1)/[s(s + 0.5)(s + 1)]$.

نمودار بوده $G(s)$ را به ازای $K=1$ رسم می‌کنیم. برنامه ۷-۲۲ را می‌توان به این منظور به کار برد. شکل ۷-۱۳۹ نمودار بوده رسم شده با این برنامه را نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که حاشیه فاز 60° در فرکانس $\omega = 1/15$ rad/sec حاصل می‌شود. دامنه $G(j\omega)$ در این فرکانس ۱۴٫۵ dB است. پس بهره K باید معادله زیر را ارضا کند

$$20 \log K = -14.5 \text{ dB}$$

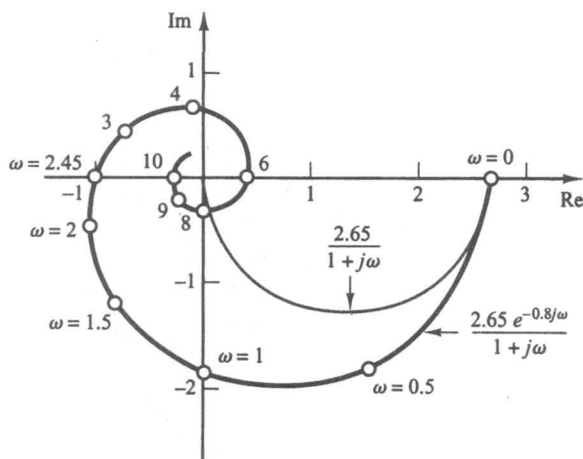
یا

$$K = 0.188$$

به این ترتیب مقدار بهره K تعیین می‌شود. چون منحنی زاویه از خط -180° نمی‌گذرد، حاشیه بهره $+\infty$ است.

برای بررسی درستی نتایج نمودار نایکویست G را در گستره فرکانسی زیر رسم می‌کنیم

$$w = 0.5:0.01:1.15$$



شکل ۷-۱۲۶

نمودارهای قطبی

$$\frac{2.65 e^{-0.8j\omega}}{(1+j\omega)}$$

و $\frac{2.65}{(1+j\omega)}$

مقدار بحرانی K با حل معادله $G(j2.4482) = -1$ به دست می‌آید. پس

$$K = 0.378$$

یا

$$K = 2.65$$

نمودار نایکویست یا نمودار قطبی $\frac{2.65 e^{-0.8j\omega}}{(1+j\omega)}$ و $\frac{2.65}{(1+j\omega)}$ در شکل ۷-۱۲۶ دیده می‌شود. سیستم مرتبه اول فاقد تاخیر انتقالی به ازای تمام مقادیر K پایدار است، ولی سیستم دارای تاخیر انتقالی 0.7 sec به ازای $K > 2.65$ ناپایدار می‌شود.

الف ۷-۱۱ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

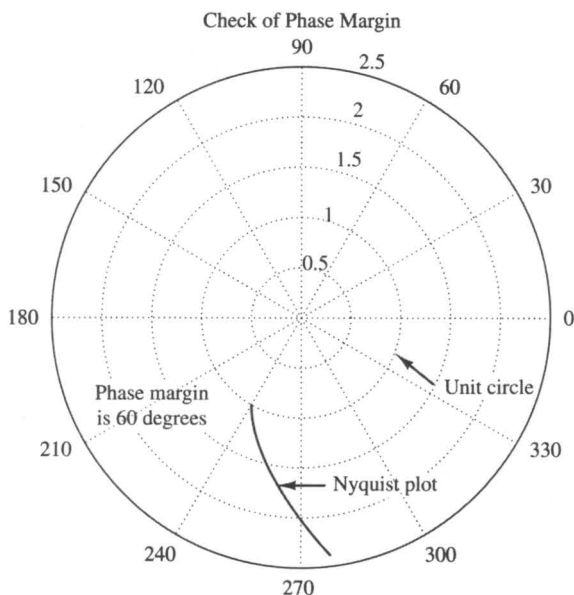
$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

نمودار نایکویست این تابع تبدیل را با MATLAB رسم کرده، پایداری حلقه بسته را بررسی کنید.

حل: برنامه ۷-۱۷ نمودار نایکویست شکل ۷-۱۲۷ را به دست می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که نمودار نایکویست نقطه $j0 - 1$ را دور نمی‌زند. چون در نیم‌صفحه راست قطب حلقه باز وجود ندارد، در معیار پایداری نایکویست $P=0$. بنابراین $Z=N+P=0$ ، پس سیستم حلقه بسته پایدار است.

MATLAB Program 7-17

```
num = [20 20 10];
den = [1 11 10 0];
nyquist(num,den)
v = [-2 3 -3 3]; axis(v)
grid
```



شکل ۷-۱۴۰

نمودار نایکویست $G(j\omega)$ که نشان می‌دهد حاشیه فاز 60° است.

دقت کنید که در دستور text برای نوشتن روی نمودار قطبی، آن را به صورت زیر به کار برده‌ایم

text (x , y , ' ')

مثلاً برای نوشتن Nyquist plot در محلی که از نقطه $(-1.7, 0.3)$ شروع می‌شود، دستور زیر را وارد می‌کنیم

text (0.3 , -1.7 , 'Nyquist plot')

نوشته به صورت افقی روی صفحه نقش می‌بندد.

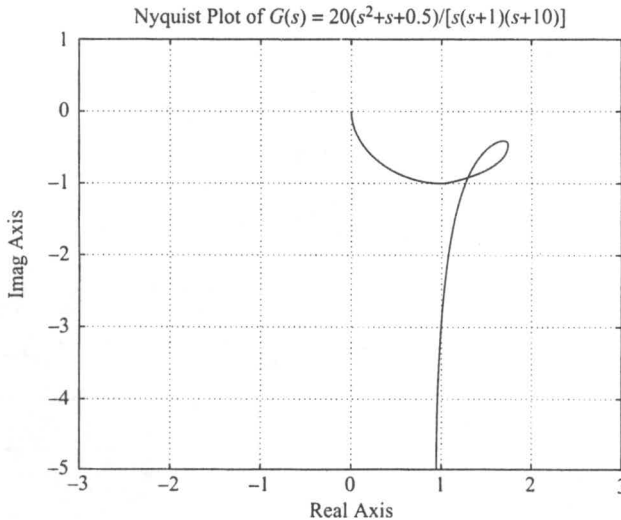
الف ۷-۲۳ اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ دارای قطبهای مزدوج مختلطی با میرایی اندک باشد، ممکن است بیش از یک دایره M بر مکان هندسی $G(j\omega)$ مماس باشد.

سیستمی با فیدبک واحد در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه باز زیر را داشته باشد

$$G(s) = \frac{9}{s(s+0.5)(s^2+0.6s+1.0)} \quad (۷-۳۲)$$

نمودار بوده این تابع تبدیل حلقه باز را رسم کنید. لگاریتم دامنه برحسب فاز را نیز رسم کنید و نشان دهید که دو دایره M بر مکان هندسی $G(j\omega)$ مماس است. سرانجام نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته را رسم کنید. حل: شکل ۷-۱۴۱ نمودار بوده $G(j\omega)$ را نشان می‌دهد. شکل ۷-۱۴۲ لگاریتم دامنه برحسب فاز $G(j\omega)$ را نشان می‌دهد. می‌توان دید که مکان هندسی $G(j\omega)$ در $\omega = 0.97 \text{ rad/sec}$ بر مکان هندسی $M = 8 \text{ dB}$ و در $\omega = 2.8 \text{ rad/sec}$ بر مکان هندسی $M = -4 \text{ dB}$ مماس است.

شکل ۷-۱۴۳ نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته را نشان می‌دهد. منحنی دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته دو قله تشدید را نشان می‌دهد. این وضعیت موقعی بروز می‌کند که تابع تبدیل حلقه بسته حاصلضرب دو عامل مرتبه دوم دارای میرایی کم را دربر داشته و دو فرکانس تشدید متناظر با آنها به حد کافی از هم جدا باشد. تابع



شکل ۷-۱۲۸

نمودار نایکویست

برای فرکانسهای مثبت.

الف ۷-۱۳ با توجه به حل مسئله الف-۷-۱۲ نمودار قطبی $G(s)$ زیر را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

روی نمودار قطبی فرکانسهای $\omega = 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2, 6, 10, 20$ rad/sec را مشخص کنید. اندازه و فاز $G(j\omega)$ را در این فرکانسها بیابید.

حل: در برنامه ۷-۱۹ بردار فرکانسی w را به کار بردیم که شامل زیربردارهای w_1, w_2, w_3 بود. تنها کافی است به جای این w بردار فرکانسی $w = \text{logspace}(d1, d2, n)$ را به کار ببریم در برنامه ۷-۱۹ از بردار فرکانسی زیر استفاده شده است.

$$w = \text{logspace}(-1, 2, 100)$$

برنامه ۷-۱۹ نمودار قطبی را رسم کرده، نقاط فرکانسی خواسته شده را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۱۲۹ مشخص می‌کند.

الف ۷-۱۴ سیستمی با فیدبک مثبت واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4}$$

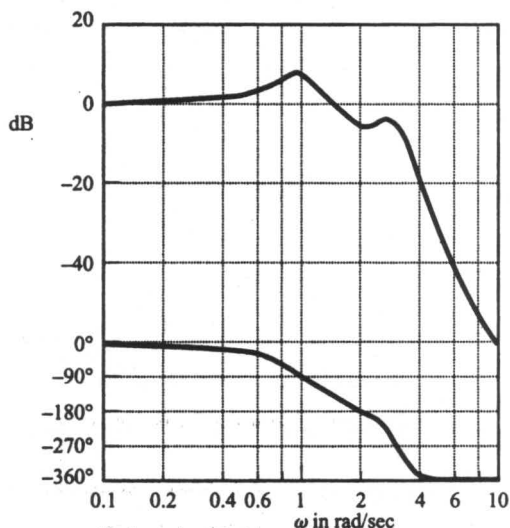
نمودار نایکویست سیستم را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار نایکویست سیستم دارای فیدبک مثبت می‌توان num و den زیر را به کار برد

$$\text{num} = [-1 \quad -4 \quad -6]$$

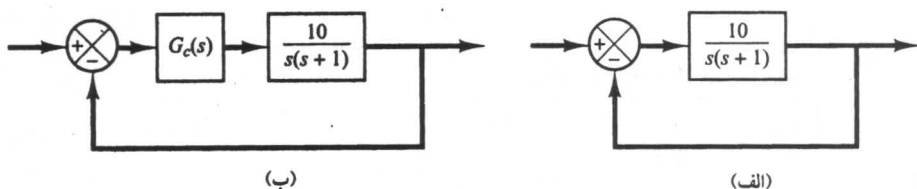
$$\text{den} = [1 \quad 5 \quad 4]$$

و دستور $\text{nyquist}(\text{num}, \text{den})$ را داد. برنامه ۷-۲۰ نمودار نایکویست شکل ۷-۱۳۰ را به دست می‌دهد.



شکل ۷-۱۴۳

نمودار بوده $G(j\omega) / [1 + G(j\omega)]$ به ازای $G(j\omega)$ معادله (۷-۳۲).



شکل ۷-۱۴۴ (الف) سیستم کنترل؛ (ب) سیستم جبران شده.

الف ۷-۲۴ سیستم شکل ۷-۱۴۴ (الف) را در نظر بگیرید. جبران سازی طرح کنید که سیستم حلقه بسته ای با ثابت خطای ایستای سرعت 2 sec^{-1} ، حاشیه فاز برابر 5° ، و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر به دست دهد. حل: برای رسیدن به این خواسته ها جبران ساز پیش فاز $G_c(s)$ زیر را می آزماییم

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

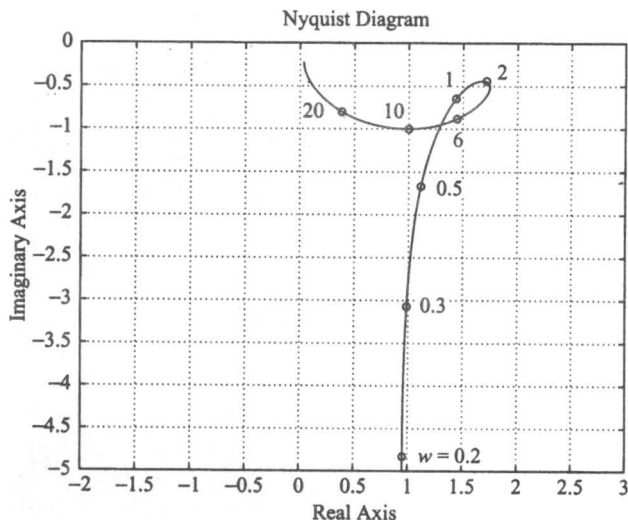
$$= K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

(در صورتی که جبران ساز پیش فاز جوابگو نباشد جبران سازی دیگر به کار می پریم.) سیستم جبران شده در شکل ۷-۱۴۴ (ب) نشان داده شده است.

تعریف می کنیم

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{10K}{s(s+1)}$$

که در آن $K = K_c \alpha$. گام اول طراحی تنظیم بهره K برای نیل به عملکرد حالت ماندگار خواسته شده، مربوط



شکل ۷-۱۲۹

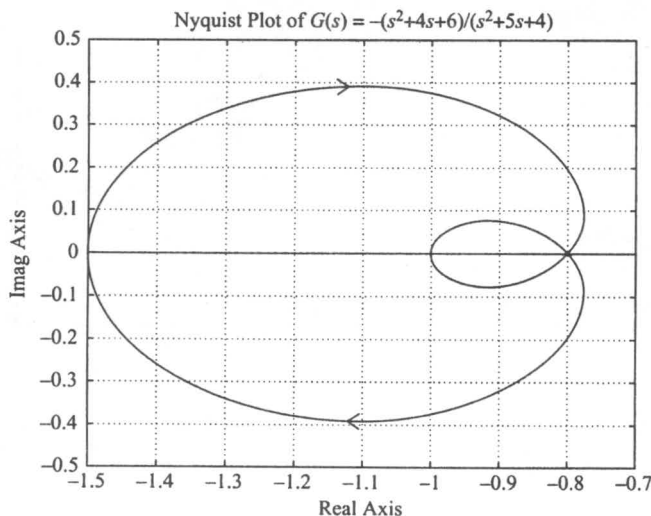
نمودار قطبی $G(j\omega)$

مسئله الف ۷-۱۳.

این سیستم ناپایدار است، زیرا نقطه $0 + j-1$ یکبار در جهت ساعتگرد دور زده می‌شود. توجه کنید که نمودار نایکویست در این حالت خاص هم از نقطه $0 + j-1$ می‌گذرد و هم این نقطه را دور می‌زند. مفهوم این نمودار نایکویست این است که سیستم تباهیده شده، یعنی به صورتی عمل می‌کند که گویی یک سیستم ناپایدار مرتبه اول است. تابع تبدیل حلقه بسته این سیستم با فیدبک مثبت عبارت است از

MATLAB Program 7-20

```
num = [-1 -4 -6];
den = [1 5 4];
nyquist(num,den);
grid
title('Nyquist Plot of  $G(s) = -(s^2 + 4s + 6)/(s^2 + 5s + 4)$ ')
```



شکل ۷-۱۳۰

نمودار نایکویست

سیستم فیدبک مثبت.

چون باید حاشه فاز برابر 50° باشد، پیشفازی لازم برای ارضای حاشیه فاز 36° است. جبران‌ساز پیشفاز می‌تواند این پیشفازی را ایجاد کند.

می‌دانیم که با گذاشتن جبران‌ساز پیشفاز منحنی دامنه نمودار بوده تغییر کرده، فرکانس عبور بهره به سمت راست جابه‌جا می‌شود. باید پیشفازی ناشی از این جابه‌جایی فرکانس بهره نیز در نظر گرفته شود. برای منظور کردن اثر این جابه‌جایی ϕ_m ، ماکزیمم پیشفازی را 41° فرض می‌کنیم. (یعنی تقریباً 5° اضافی برای خنثی شدن اثر جابه‌جایی فرکانس عبور بهره.) چون

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$\phi_m = 41^\circ$ با $\alpha = 0.2077$ متناظر است. $\alpha = 0.21$ با $\phi_m = 40.76^\circ$ متناظر است. انتخاب $\phi_m = 41^\circ$ یا $\phi_m = 40.76^\circ$ در جواب نهایی تاثیر زیادی ندارد. پس α را برابر 0.21 انتخاب می‌کنیم.

پس از تعیین α براساس زاویه پیشفازی لازم به تعیین فرکانسهای گوشه‌ای $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/\alpha T$ جبران‌ساز می‌رسیم. ماکزیمم زاویه پیشفازی ϕ_m در واسطه هندسی دو فرکانس گوشه‌ای، یعنی در $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ رخ می‌دهد.

تغییر منحنی دامنه در $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ ناشی از جمله $(\alpha Ts + 1)/(Ts + 1)$ عبارت است از

$$\left| \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \right|_{\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}} = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

داریم

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.21}} = 6.7778 \text{ dB}$$

حال باید فرکانسی را بیابیم که در آن با افزودن جبران‌ساز کل دامنه 0 dB شود.

شکل ۷-۱۴۵ نشان می‌دهد فرکانسی که در آن دامنه $G_1(j\omega)$ برابر -6.7778 dB است، بین $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ و $\omega = 10 \text{ rad/sec}$ قرار دارد. بنابراین نمودار بوده جدیدی برای $G_1(j\omega)$ در گستره فرکانسی $\omega = 1$ تا $\omega = 10$ رسم می‌کنیم تا محل دقیق $|G_1(j\omega)| = -6.7778 \text{ dB}$ را بیابیم. برنامه ۷-۲۵ نمودار بوده را در این گستره فرکانسی به دست می‌دهد. این نمودار در شکل ۷-۱۴۶ نشان داده شده است و با توجه به آن می‌بینیم که $|G_1(j\omega)| = -6.7778 \text{ dB}$ در $\omega = 6.5686 \text{ rad/s}$ رخ می‌دهد. این فرکانس را به عنوان فرکانس جدید عبور

MATLAB Program 7-25

```
num = [20];
den = [1 1 0];
w = logspace(0,1,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G1(s) = 20/[s(s + 1)]')
```

الف ۷-۱۵ سیستم کنترل شکل ۷-۶۰ را در نظر بگیرید (به مثال ۷-۱۹ مراجعه کنید). با استفاده از نمودار قطبی وارون گستره بهره K برای عملکرد پایدار سیستم را تعیین کنید.

حل: چون

$$G_T(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

$$G(s) = G_1(s) G_T(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

داریم

پس

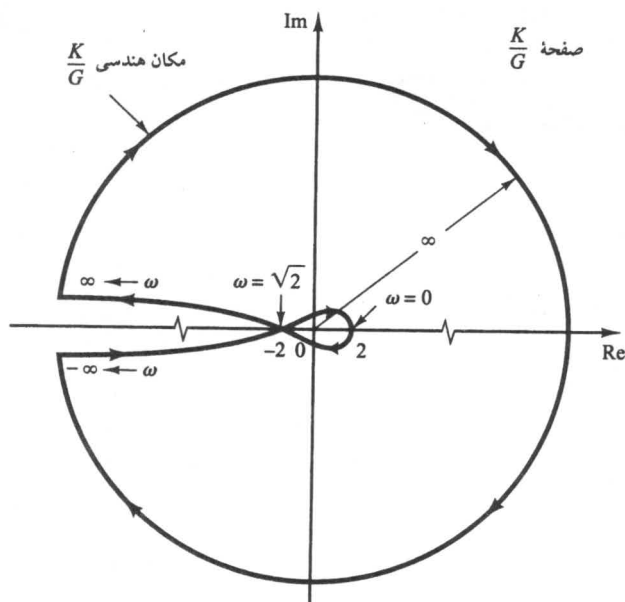
$$\frac{1}{G(s)} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{K(s + 0.5)}$$

$1/G(s)$ در $s = -0.5$ قطب دارد و در نیم صفحه راست هیچ قطبی ندارد. پس معیار پایداری نایکویست

$$Z = P + N$$

با $P = 0$ به شکل ساده $Z = N$ درمی آید. این معادله ساده شده می گوید تعداد صفرهای $1 + [1/G(s)]$ در نیم صفحه راست با N ، تعداد دورهای در جهت ساعتگرد منحنی حول نقطه $1 + j\omega$ برابر است. برای پایداری N باید صفر باشد، یا به عبارتی منحنی نباید نقطه $1 + j\omega$ را دور بزند. شکل ۷-۱۳۲ نمودار نایکویست یا نمودار قطبی $K/G(j\omega)$ را نشان می دهد. دقت کنید که چون

$$\begin{aligned} \frac{K}{G(j\omega)} &= \left[\frac{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + 1}{(j\omega + 0.5)} \right] \left(\frac{0.5 - j\omega}{0.5 - j\omega} \right) \\ &= \frac{0.5 - 0.5\omega^2 - \omega^4 + j\omega(-1 + 0.5\omega^2)}{0.25 + \omega^2} \end{aligned}$$

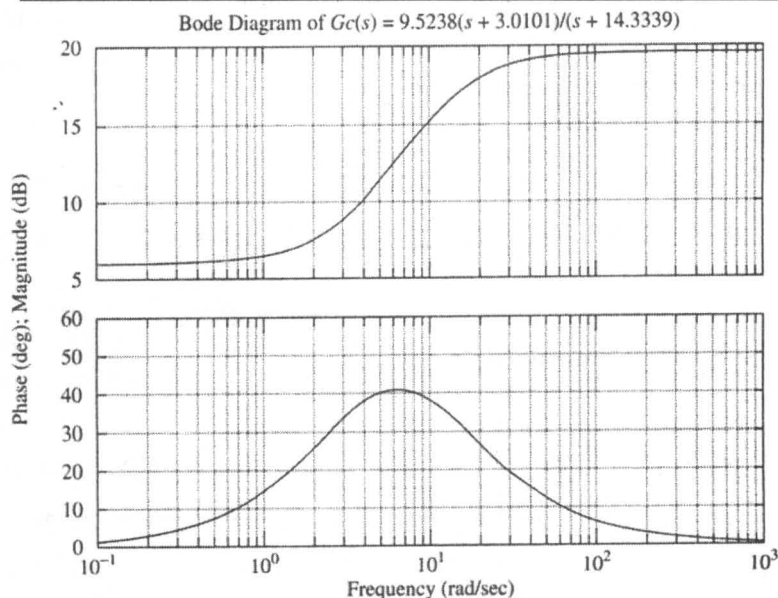


شکل ۷-۱۳۲

نمودار قطبی $K/G(j\omega)$.

MATLAB Program 7-26

```
numc = [9.5238 28.6676];
denc = [1 14.3339];
w = logspace(-1,3,100);
bode(numc,denc,w)
title('Bode Diagram of  $G_c(s) = 9.5238(s + 3.0101)/(s + 14.3339)$ ')
```



شکل ۷-۱۴۷

نمودار بوده $G_c(s)$.

برنامه ۷-۲۷ نمودار بوده $G_c(s)G(s)$ را که در شکل ۷-۱۴۸ نشان داده شده است، به دست می‌دهد.

برنامه ۷-۲۷ و شکل ۷-۱۴۸ به وضوح نشان می‌دهد که حاشیه فاز تقریباً 5° و حاشیه بهره $+ \infty$ dB

است. چون ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 20 \text{ sec}^{-1}$ است، به تمام خواسته‌ها رسیده‌ایم. قبل از اتمام این

MATLAB Program 7-27

```
num = [95.238 286.6759];
den = [1 15.3339 14.3339 0];
sys = tf(num,den);
w = logspace(-1,3,100);
bode(sys,w);
grid;
title('Bode Diagram of  $G_c(s)G(s)$ ')
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
GmdB = 20*log10(Gm);
[Gmdb,pm,wcp,wcg]
ans =
    Inf 49.4164    Inf 6.5686
```


که به دست می‌دهد

$$K = \frac{2,3835^2}{\sqrt{2^2 + 2,3835^2}} = 1,8259$$

به ازای این مقدار K حاشیه فاز برابر 50° است.

الف ۷-۱۷ برای سیستم استاندارد مرتبه دوم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

نشان دهید که پهنای باند ω_b از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega_b = \omega_n \left(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right)^{1/2}$$

توجه کنید که ω_b / ω_n تنها تابعی از ζ است. منحنی ω_b / ω_n بر حسب ζ را رسم کنید.

حل: حل معادله $|C(j\omega_b)/R(j\omega_b)| = -3 \text{ dB}$ پهنای باند ω_b را به دست می‌دهد. غالباً به جای -3 dB

مقدار $-3,01 \text{ dB}$ را به کار می‌برند که برابر $0,707$ است. پس

$$\left| \frac{C(j\omega_b)}{R(j\omega_b)} \right| = \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega_b)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_b) + \omega_n^2} \right| = 0,707$$

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0,707$$

و

که از آن به دست می‌آوریم

$$\omega_n^4 = 0,5 \left[(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega_b^2 \right]$$

تقسیم دو طرف معادله اخیر بر ω_n^4 به دست می‌دهد

$$1 = 0,5 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

با حل این معادله $(\omega_b / \omega_n)^2$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}$$

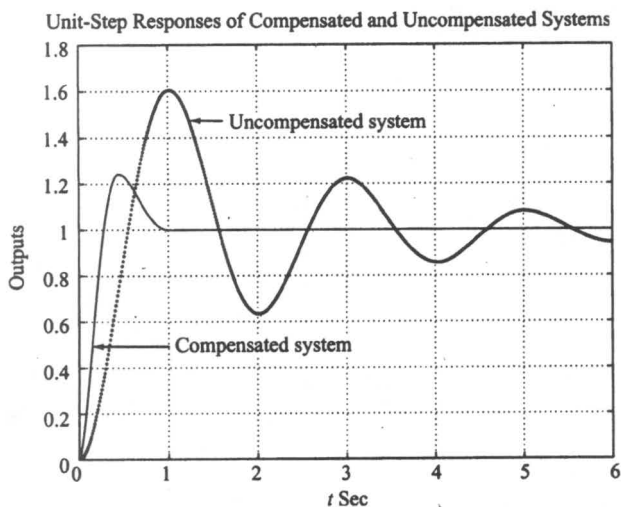
چون $(\omega_b / \omega_n)^2 > 0$ علامت + معادله اخیر را به کار می‌بریم. پس

$$\omega_b^2 = \omega_n^2 \left(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right)$$

MATLAB Program 7-28

```
%*****Unit-step responses*****
```

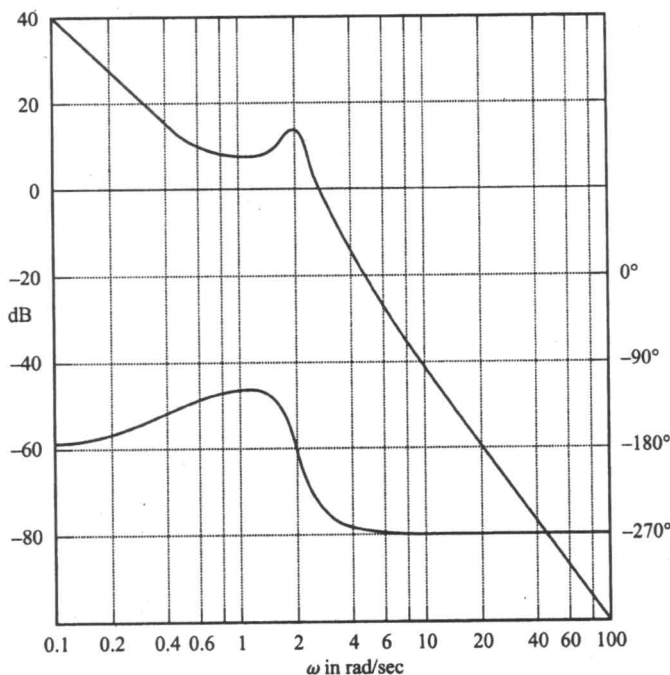
```
num1 = [10];
den1 = [1 1 10];
num2 = [95.238 286.6759];
den2 = [1 15.3339 110.5719 286.6759];
t = 0:0.01:6;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'-')
grid;
title('Unit-Step Responses of Uncompensated System and Compensated System')
xlabel('t Sec');
ylabel('Outputs')
text(1.70,1.45,'Uncompensated System')
text(1.1,0.5,'Compensated System')
```



شکل ۷-۱۴۹

پاسخ پله واحد سیستمهای جبران شده و جبران نشده.

برنامه ۷-۲۹ منحنیهای پاسخ شیب را به دست می دهد. [توجه کنید که پاسخ شیب به صورت پاسخ پله سیستم $C(s)/sR(s)$ دست آمده است.] منحنیهای حاصل در شکل ۷-۱۵۰ نشان داده شده اند. خطای حالت ماندگار سیستم جبران شده نصف خطای حالت ماندگار سیستم جبران نشده است.



شکل ۷-۱۳۵

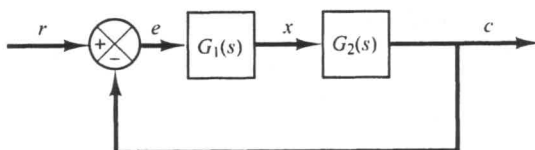
نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد.

چون شکل ۷-۱۳۵ به دست می‌دهد $|G(j\omega)| = 40 \text{ dB}$ ، مقدار بهره K برابر یک تعیین می‌شود. همچنین منحنی فاز $G(j\omega)$ با منحنی فاز داده شده تطبیق دارد. پس تابع تبدیل $G(s)$ عبارت است از

$$G(s) = \frac{4(2s+1)}{s^2(s^2+0.4s+4)}$$

الف ۷-۱۹ در یک سیستم کنترل حلقه بسته ممکن است عنصری ناپایدار وجود داشته باشد. برای اعمال معیار پایداری نایکویست به چنین سیستمی باید منحنی‌های پاسخ فرکانسی این نوع عناصر را به دست آورد. چگونه می‌توان منحنی‌های پاسخ فرکانسی این عناصر ناپایدار را به طریق تجربی یافت؟ یک روش عملی برای تعیین تجربی پاسخ فرکانسی یک عنصر خطی ناپایدار پیشنهاد کنید.

حل: یک روش ممکن برای یافتن مشخصات پاسخ فرکانسی عنصر ناپایدار این است که آن را در یک سیستم پایدار به کار ببریم.



شکل ۷-۱۳۶

سیستم کنترل.

حل: یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به صورت زیر طرح می‌کنیم

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

پس تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است. چون بهره K قابل تنظیم است، فرض می‌کنیم $K_c = 1$ ، یعنی $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = 1$. با توجه به خواسته مربوط به ثابت خطای ایستای سرعت به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{K}{s(s+1)(s+4)} \\ &= \frac{K}{4} = 10 \\ K &= 40 \end{aligned}$$

پس

ابتدا نمودار بوده سیستم جبران نشده را به ازای $K = 40$ رسم می‌کنیم. برنامه ۷-۳۰ برای ترسیم این نمودار بوده به کار رفته است. نمودار حاصل در شکل ۷-۱۵۱ نشان داده شده است.

MATLAB Program 7-30

```
num = [40];
den = [1 5 4 0];
w = logspace(-1,1,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 40/[s(s+1)(s+4)]')
```

شکل ۷-۱۵۱ حاشیه فاز سیستم جبران نشده دارای بهره مناسب را -16° به دست می‌دهد، یعنی سیستم جبران نشده ناپایدار است. گام بعدی طراحی جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز انتخاب فرکانس عبور بهره جدید است. از منحنی فاز $G(j\omega)$ فرکانس عبور فاز $\omega = 2$ rad/sec به دست می‌آید. می‌توانیم فرکانس عبور بهره جدید را ۲ rad/sec بگیریم تا زاویه پیشفازی لازم حدود 5° باشد. یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به سادگی می‌تواند این مقدار پیشفازی را ایجاد کند.

حال که فرکانس جدید عبور بهره را ۲ rad/sec برگزیده‌ایم، می‌توانیم فرکانسهای گوشه‌ای بخش پسفاز و بخش پیشفاز جبران‌ساز را تعیین کنیم. اجازه دهید فرکانس گوشه‌ای $\omega = 1/T_2$ (صفر بخش پسفاز جبران‌ساز) را یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره، یعنی ۰٫۲ rad/sec برگزینیم. برای تعیین فرکانس گوشه‌ای دیگر $\omega = 1/(\beta T_2)$ مقدار β را لازم داریم. β را می‌توانیم با توجه به بخش پیشفاز جبران‌ساز، چنانچه نشان خواهیم داد، تعیین کنیم.

برای بخش پیشفاز ماکزیمم زاویه پیشفازی ϕ_m عبارت است از

$$\sin \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

حل: زاویه فاز $G_c(j\omega)$ عبارت است از

$$\angle G_c(j\omega) = \left[j\omega + \frac{1}{T_1} \right] + \left[j\omega + \frac{1}{T_2} \right] - \left[j\omega + \frac{\beta}{T_1} \right] - \left[j\omega + \frac{1}{\beta T_2} \right]$$

$$= \tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2 - \tan^{-1} \omega T_1 / \beta - \tan^{-1} \omega T_2 \beta$$

در $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$ داریم

$$\angle G_c(j\omega_1) = \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \tan^{-1} \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \tan^{-1} \beta \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

چون

$$\tan \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} = \infty$$

یا

$$\tan^{-1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^\circ$$

و چون

$$\tan^{-1} \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \beta \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^\circ$$

داریم

$$\angle G_c(j\omega_1) = 0^\circ$$

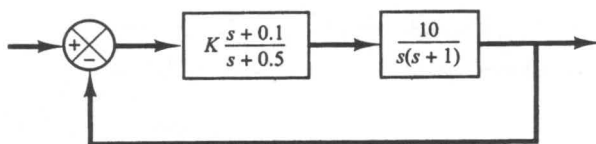
پس زاویه $G_c(j\omega_1)$ در $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$ برابر 0° است.

الف ۷-۲۲ سیستم کنترل شکل ۷-۱۳۸ را در نظر بگیرید. مقدار بهره K را طوری تعیین کنید که زاویه فاز 60° باشد. به ازای این K حاشیه بهره چقدر است؟

حل: تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = K \frac{s+0.1}{s+0.5} \frac{10}{s(s+1)}$$

$$= \frac{K(10s+1)}{s^2 + 1.5s + 0.5}$$



شکل ۷-۱۳۸

سیستم کنترل.

$$\frac{s+0.4}{s+4} = \frac{1}{10} \left(\frac{2.5s+1}{0.25s+1} \right)$$

با ترکیب بخشهای پسفاز و پیشفاز جبران ساز تابع تبدیل $G_c(s)$ جبران ساز پسفاز - پیشفاز به دست می آید. چون $K_c=1$ داریم

$$G_c(s) = \frac{s+0.4}{s+4} \frac{s+0.2}{s+0.02} = \frac{(2.5s+1)(5s+1)}{(0.25s+1)(50s+1)}$$

نمودار بوده جبران ساز پسفاز - پیشفاز $G_c(s)$ را با استفاده از برنامه ۷-۳۱ به دست می آوریم. نمودار حاصل در شکل ۷-۱۵۲ نشان داده شده است.

MATLAB Program 7-31

```
numc = [1 0.6 0.08];
denc = [1 4.02 0.08];
bode(numc,denc)
title('Bode Diagram of Lag-Lead Compensator')
```

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = \frac{(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.02)} \frac{40}{s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{40s^2 + 24s + 3/2}{s^5 + 9.02s^4 + 24.18s^3 + 16.48s^2 + 0.32s}$$

با استفاده از برنامه ۷-۳۲ منحنی های دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه باز $G_c(s)G(s)$ را به صورت شکل ۷-۱۵۳ به دست می آوریم. چند جمله ای مخرج den1 به صورت زیر با استفاده از دستور conv به دست آمده است:

```
a = [1 4.02 0.08];
b = [1 5 4 0];
conv(a,b)
ans =
```

```
1.0000 9.0200 24.1800 16.4800 0.320000 0
```

چون حاشیه فاز سیستم جبران شده 50° ، حاشیه بهره آن ۱۲ dB و ثابت خطای ایستای سرعت آن 10 sec^{-1} است، تمام خواسته ها برآورده شده اند.

حال به بررسی مشخصات پاسخ گذرای سیستم طراحی شده می پردازیم.

پاسخ پله: با توجه به این که

$$G_c(s) G(s) = \frac{40(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.02)s(s+1)(s+2)}$$

نقطه انتهایی مکان هندسی ($\omega = 1/15 \text{ rad/sec}$) روی دایره واحد صفحه نایکویست است. برای حاشیه فاز بهتر است نمودار نایکویست روی نمودار قطبی شبکه‌دار رسم شود.

برای رسم نمودار نایکویست روی نمودار قطبی ابتدا بردار مختلط Z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$z = re + i \cdot im = re^{i\theta}$$

که در آن r و θ عبارت‌اند از

$$r = \text{abs}(z)$$

$$\theta = \text{angle}(z)$$

منظور از abs جذر مجموع مربعات بخشهای حقیقی و موهومی، و منظور از angle مقدار حاصل از $\tan^{-1}(im/re)$ است.

دستور زیر نمودار قطبی را در مختصات قطبی رسم می‌کند

$$\text{polar}(\theta, r)$$

دستور grid شبکه قطبی را به صورت خطوط شعاعی و دایره‌های هم‌مرکز رسم می‌کند.

برنامه ۷-۲۳ نمودار قطبی $G(j\omega)$ را به ازای ω بین 0.5 rad/sec و $1/15 \text{ rad/s}$ رسم می‌کند. شکل ۷-۱۴ نمودار حاصل را نشان می‌دهد. دقت کنید که نقطه $G(j/15)$ روی دایره واحد قرار دارد و زاویه آن -12° است. پس حاشیه فاز 6° است. این که نقطه $G(j/15)$ روی دایره واحد است نشان می‌دهد که در $\omega = 1/15 \text{ rad/s}$ دامنه برابر ۱ یا 0 dB است. پس $\omega = 1/15 \text{ rad/sec}$ فرکانس عبور بهره جدید است و $K = 0.188$ حاشیه فاز مطلوب 6° را به دست می‌دهد.

MATLAB Program 7-23

```
%*****Nyquist plot in rectangular coordinates*****
num = [1.88 0.188];
den = [1 1.5 0.5 0];
w = 0.5:0.01:1/15;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
%*****Convert rectangular coordinates into polar coordinates
% by defining z, r, theta as follows*****
z = re + i*im;
r = abs(z);
theta = angle(z);
%*****To draw polar plot, enter command 'polar(theta,r)'*****
polar(theta,r)
text(-1,3,'Check of Phase Margin')
text(0.3,-1.7,'Nyquist plot')
text(-2.2,-0.75,'Phase margin')
text(-2.2,-1.1,'is 60 degrees')
text(1.45,-0.7,'Unit circle')
```

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

$$= \frac{40(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.02)s(s+1)(s+4) + 40(s+0.4)(s+0.2)}$$

برای تعیین چند جمله‌ای مخرج با MATLAB به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$a(s) = (s+4)(s+0.02) = s^2 + 4.02s + 0.08$$

$$b(s) = s(s+1)(s+4) = s^3 + 5s^2 + 4s$$

$$c(s) = 40(s+0.4)(s+0.2) = 40s^2 + 24s + 3.2$$

حال داریم

$$a = [1 \ 4.02 \ 0.08]$$

$$b = [1 \ 5 \ 4 \ 0]$$

$$c = [40 \ 24 \ 3.2]$$

با استفاده از برنامه MATLAB زیر چند جمله‌ای مخرج را می‌یابیم

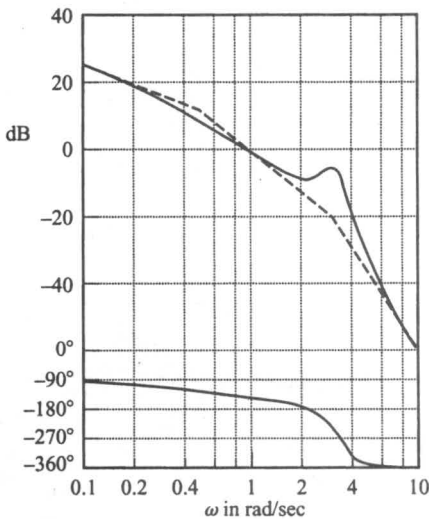
```
a = [1 4.02 0.08];
b = [1 5 4 0];
c = [40 24 3.2];
p = [conv(a,b)] + [0 0 0 c]
p =
1.0000 9.0200 24.1800 56.4800 24.3200 3.2000
```

برنامه ۷-۳۳ برای به دست آوردن پاسخ پله سیستم جبران شده به کار رفته است. منحنی پاسخ پله در شکل ۷-۱۵۴ نشان داده شده است. (توجه کنید که سیستم جبران نشده دارای بهره مناسب ناپایدار است.)

MATLAB Program 7-33

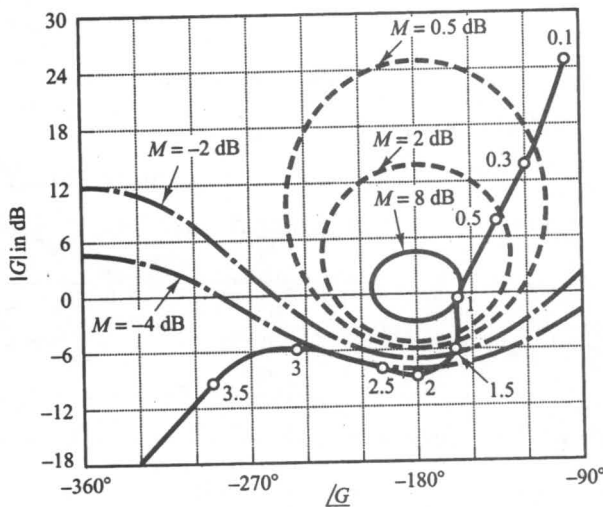
```
%*****Unit-step response*****
num = [40 24 3.2];
den = [1 9.02 24.18 56.48 24.32 3.2];
t = 0:0.2:40;
step(num,den,t)
grid
title('Unit-Step Response of Compensated System')
```

پاسخ شیب: پاسخ شیب سیستم را می‌توان با دادن برنامه ۷-۳۴ به دست آورد. در این برنامه پاسخ شیب $G_c G / (1 + G_c G)$ با پاسخ پله $G_c G / [s(1 + G_c G)]$ به دست آمده است. شکل ۷-۱۵۵ منحنی پاسخ شیب به دست آمده از این برنامه را نشان می‌دهد.



شکل ۷-۱۴۱

نمودار بوده $G(j\omega)$ معادله (۷-۳۲).



شکل ۷-۱۴۲

منحنی لگاریتم دامنه بر حسب فاز

$G(j\omega)$ معادله (۷-۳۲).

تبدیل حلقه بسته این سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ &= \frac{9}{(s^2 + 0.487s + 1)(s^2 + 0.613s + 9)} \end{aligned}$$

واضح است که تابع تبدیل حلقه بسته حاصل ضرب دو عامل مرتبه دوم دارای میرایی کم (با نسبتهای میرایی ۰/۲۴۳ و ۰/۱۰۲) است و دو فرکانس تشدید به حد کافی از هم دورند.

مسائل

ب ۶-۷ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر است

$$G(s) = \frac{s+0.5}{s^3+s^2+1}$$

که تابعی غیرمی نیمم فاز است. از سه قطب حلقه باز دو تا در نیم صفحه راست هستند، قطبها عبارتند از:

$$s = -1, 4656$$

$$s = 0.2328 + j0.7926$$

$$s = 0.2328 - j0.7926$$

نمودار بوده $G(s)$ را با استفاده از MATLAB رسم کنید. توضیح دهید چرا منحنی فاز از 0° شروع و به 180° ختم می شود.

ب ۷-۷ نمودارهای قطبی تابع تبدیل حلقه باز زیر

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(T_s + 1)}$$

را به ازای دو حالت زیر رسم کنید

$$T_a > T > 0, \quad T_b > T > 0 \quad (\text{الف})$$

$$T > T_a > 0, \quad T > T_b > 0 \quad (\text{ب})$$

ب ۸-۷ نمودار نایکویست یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر را رسم کنید

$$G(s) = \frac{K(1-s)}{s+1}$$

با استفاده از معیار پایداری نایکویست، پایداری سیستم حلقه بسته را تعیین کنید.

ب ۹-۷ سیستم با تابع تبدیل حلقه باز زیر

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}$$

ذاتاً ناپایدار است. این سیستم را می توان با افزودن کنترل کننده مشتقی پایدار کرد. نمودارهای قطبی تابع تبدیل حلقه باز را با کنترل کننده مشتقی و بدون آن رسم کنید.

ب ۱-۷ سیستم با فیدبک واحدی دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر است

$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$

خروجی حالت ماندگار سیستم را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

$$r(t) = \sin(t + 30^\circ) \quad (\text{الف})$$

$$r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ) \quad (\text{ب})$$

$$r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ) \quad (\text{ج})$$

ب ۲-۷ سیستمی با تابع تبدیل حلقه بسته زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(T_f s + 1)}{T_1 s + 1}$$

خروجی حالت ماندگار این سیستم را به ازای ورودی $r(t) = R \sin \omega t$ بیابید.

ب ۳-۷ با استفاده از MATLAB نمودارهای بوده $G_1(s)$ و $G_2(s)$ زیر را رسم کنید.

$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+2s}$$

$$G_2(s) = \frac{1-s}{1+2s}$$

$G_1(s)$ سیستمی می نیمم فاز، و $G_2(s)$ غیرمی نیمم فاز است.

ب ۴-۷ نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.4s + 1)}{s(s^2 + 0.8s + 9)}$$

ب ۵-۷ داریم

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

نشان دهید که

$$|G(j\omega_n)| = 1/2\zeta$$

به ثابت خطای ایستای سرعت، است. چون ثابت خطای ایستای سرعت K_v برابر 2°sec^{-1} داده شده است. داریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1^\circ s K}{s(s+1)} = 1^\circ K = 2^\circ \\ K &= 2 \end{aligned}$$

یا

به ازای $K=2$ سیستم جبران شده خواسته حالت ماندگار را برآورده می‌کند.

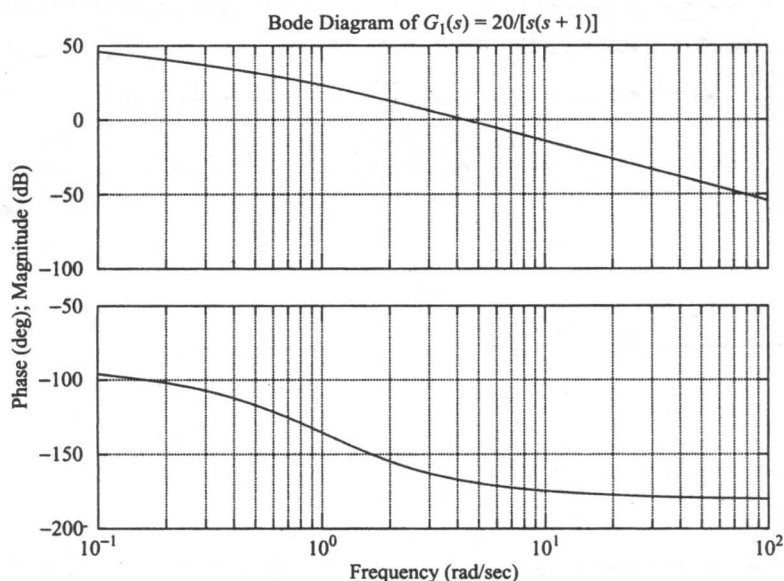
سپس نمودار بوده تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$G_1(s) = \frac{2^\circ}{s(s+1)}$$

برنامه ۷-۲۴ نمودار بوده شکل ۷-۱۴۵ را به دست می‌دهد. این نمودار حاشیه فاز را 14° به دست می‌دهد. حاشیه بهره $+\infty$ dB است.

MATLAB Program 7-24

```
num = [20];
den = [1 1 0];
w = logspace(-1,2,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G1(s) = 20/[s(s+1)]')
```



شکل ۷-۱۴۵

نمودار بوده $G_1(s)$.

آیا اگر $G(s)$ در نیم صفحه راست یک قطب داشته باشد سیستم پایدار است؟ آیا اگر $G(s)$ در نیم صفحه راست قطب نداشته، ولی یک صفر داشته باشد، سیستم پایدار است؟

ب ۷-۱۸ سیستم کنترل دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را به ازای این بهره‌ها رسم کنید

$$K=100, K=10, K=1$$

ب ۷-۱۹ یک سیستم کنترل دارای فیدبک منفی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کنید. اگر این سیستم دارای فیدبک مثبت و همین تابع تبدیل حلقه باز باشد، نمودار نایکویست آن چه شکلی می‌داشت؟
ب ۷-۲۰ سیستم کنترل شکل ۷-۱۶۰ را در نظر بگیرید. $G(s)$ به صورت زیر است:

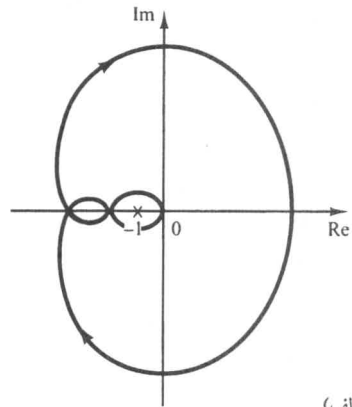
$$G(s) = \frac{10}{s[(s+1)(s+5)+10k]} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + (5+10k)s}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را به ازای $k=0.3$ ، $k=0.5$ و $k=0.7$ رسم کنید.

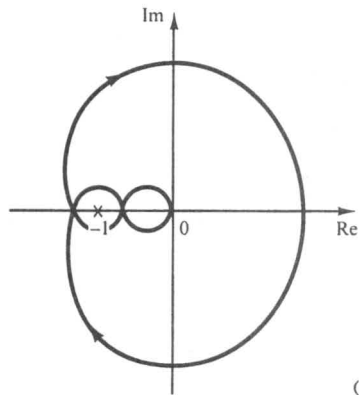
ب ۷-۲۱ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

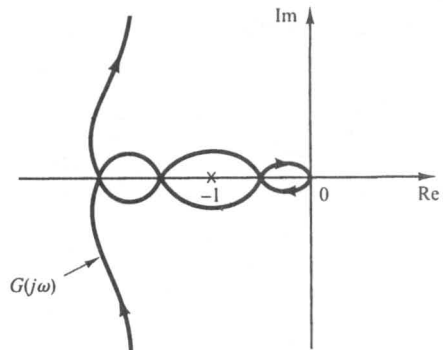


(الف)

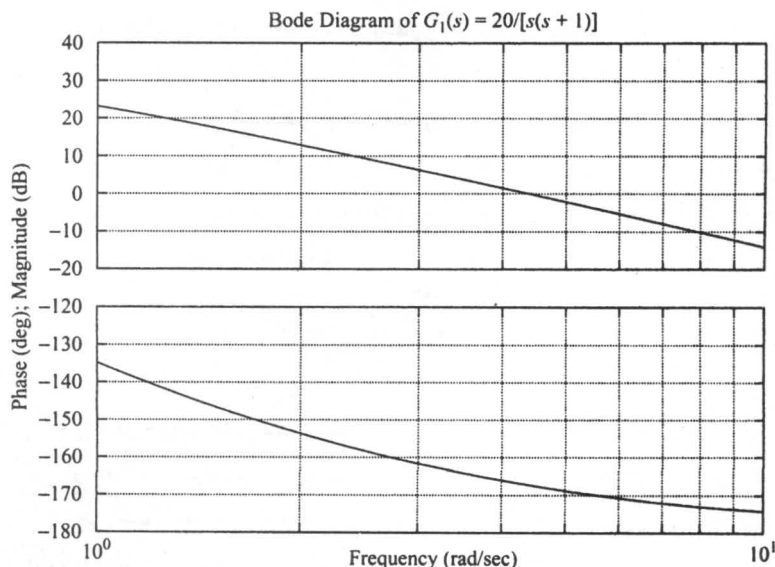


(ب)

شکل ۷-۱۵۸ نمودارهای نایکویست.



شکل ۷-۱۵۹ نمودار نایکویست.



شکل ۷-۱۴۶
نمودار بوده $G_1(s)$.

بهره برمی‌گزینیم یا $\omega_c = ۶/۵۶۸۶ \text{ rad/s}$. چون این فرکانس با $1/(\sqrt{\alpha} T)$ متناظر است، یعنی

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

$$\frac{1}{T} = \omega_c \sqrt{\alpha} = ۶/۵۶۸۶ \sqrt{۰/۲۱} = ۳/۰۱۰۱ \quad \text{به دست می‌آوریم}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{۶/۵۶۸۶}{\sqrt{۰/۲۱}} = ۱۴/۳۳۳۹ \quad \text{و}$$

بنابراین جبران‌ساز پیش‌فاز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_c(s) = K_c \frac{s + ۳/۰۱۰۱}{s + ۱۴/۳۳۳۹} = K_c \alpha \frac{۰/۳۳۲۲s + ۱}{۰/۰۶۹۷۶s + ۱}$$

که K_c آن عبارت است از

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{۲}{۰/۲۱} = ۹/۵۲۳۸$$

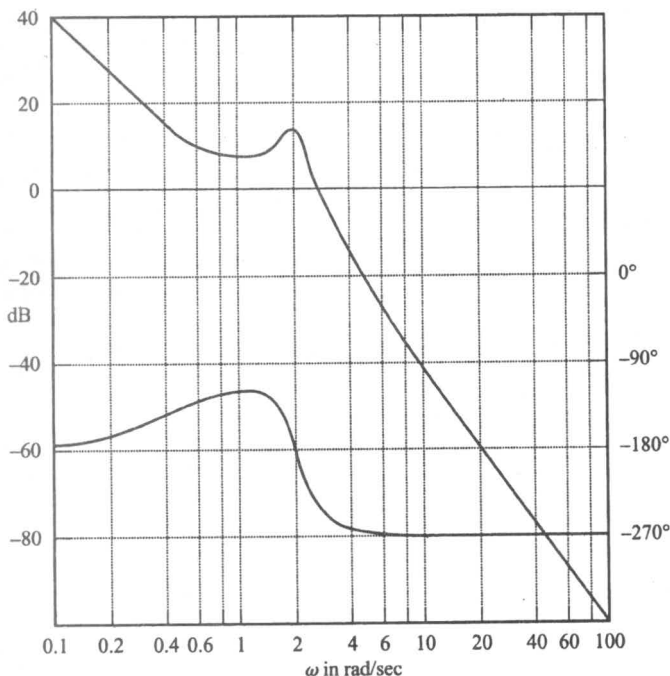
یعنی تابع تبدیل جبران‌ساز عبارت است از

$$G_c(s) = ۹/۵۲۳۸ \frac{s + ۳/۰۱۰۱}{s + ۱۴/۳۳۳۹} = ۲ \frac{۰/۳۳۲۲s + ۱}{۰/۰۶۹۷۶s + ۱}$$

برنامه ۷-۲۶ نمودار بوده این جبران‌ساز را که در شکل ۷-۱۴۷ نشان داده شده است، به دست می‌دهد.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم طراحی شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = ۹/۵۲۳۸ \frac{s + ۳/۰۱۰۱}{s + ۱۴/۳۳۳۹} \frac{۱۰}{s(s+۱)} = \frac{۹۵/۲۳۸s + ۲۸۶/۶۷۵۹}{s^2 + ۱۵/۳۳۳۹s + ۱۴/۳۳۳۹s}$$



شکل ۱۶۴-۷

نمودار بودی تابع تبدیل
حلقه باز یک سیستم کنترل
با فیدبک واحد.

و کنترل کننده PD زیر را رسم کنید.

$$G_c(s) = 5(1 + 0.5s)$$

ب ۷-۳۱ شکل ۷-۱۶۵ نمودار بلوکی سیستم کنترل ارتفاع یک فضاپیما را نشان می‌دهد. ثابت بهره K_p و زمان مشتقگیری T_d را به نحوی تعیین کنید که پهنای باند سیستم حلقه بسته 4 rad/s تا 0.5 rad/s باشد. (توجه کنید که پهنای باند حلقه بسته نزدیک فرکانس عبور بهره است.) حاشیه فاز سیستم باید به حد کافی باشد. نمودارهای بوده پاسخ فرکانسی حلقه باز و حلقه بسته را بیاورید.

بهره K را به نحوی تعیین کنید که دامنه قلّه تشدید پاسخ فرکانسی ۲ dB باشد، یعنی داشته باشیم $M_r = 2 \text{ dB}$.

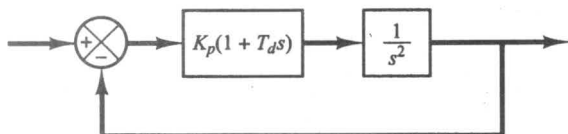
ب ۷-۲۹ نمودار بودی تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد در شکل ۷-۱۶۴ نشان داده شده است. می‌دانیم که تابع تبدیل حلقه باز می‌نیم فاز است. این نمودار نشان می‌دهد که یک زوج قطب مختلط در $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ وجود دارد. نسبت میرایی جمله مرتبه دوم متناظر با این قطبها را بیابید. تابع تبدیل $G(s)$ را نیز تعیین کنید.

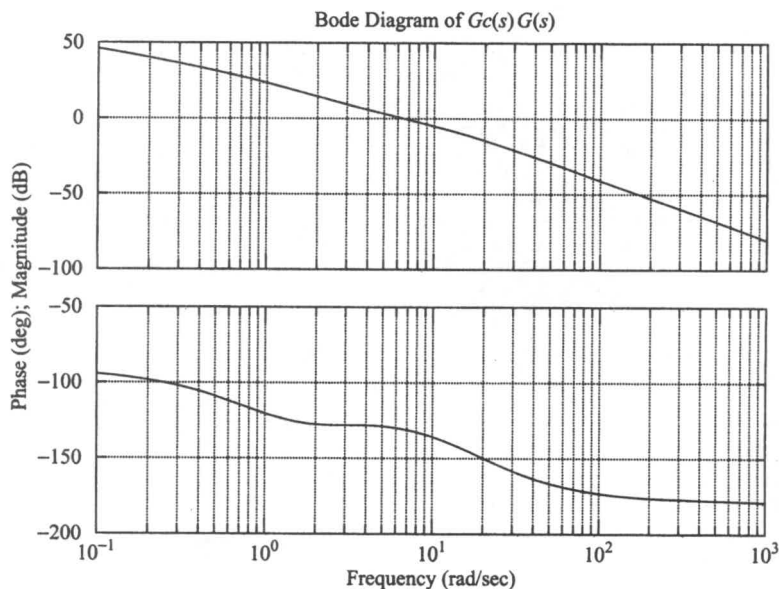
ب ۷-۳۰ نمودار بوده کنترل کننده PI زیر

$$G_c(s) = 5 \left(1 + \frac{1}{2s} \right)$$

شکل ۱۶۵-۷

نمودار بلوکی سیستم کنترل ارتفاع فضاپیما.





شکل ۷-۱۴۸
نمودار بوده $G_c(s)G(s)$.

مسئله باید مشخصات پاسخ گذرا را بررسی کنیم.

پاسخ پله: باید پاسخ پله سیستم جبران شده و پاسخ پله سیستم جبران نشده اولیه را مقایسه کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم جبران نشده اولیه عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم جبران شده عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95/238s + 286/6759}{s^3 + 15/3339s^2 + 110/5719s + 286/6759}$$

برنامه ۷-۲۸ پاسخ پله سیستمهای جبران شده و جبران نشده را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ در شکل ۷-۱۴۹ نشان داده شده‌اند. سیستم جبران شده به وضوح پاسخ رضایتبخش دارد. محل صفر و قطبهای حلقه بسته به شرح زیر است:

$$s = -3/0101$$

صفر در

$$s = -5/2880 \pm j5/6824, \quad s = -4/7579 \quad \text{قطبها در}$$

پاسخ شیب: بررسی پاسخ شیب سیستم جبران شده نیز به زحمتش می‌ارزد. چون $K_D = 20 \text{ sec}^{-1}$ ، خطای حالت ماندگار به ازای ورودی شیب $1/K_D = 0/05$ است. ثابت خطای ایستای سرعت سیستم جبران نشده 10 sec^{-1} است. پس خطای حالت ماندگار سیستم جبران نشده اولیه در دنبال کردن ورودی شیب دو برابر سیستم جبران شده است.