

مدلسازی ریاضی

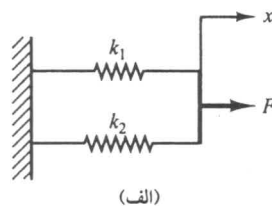
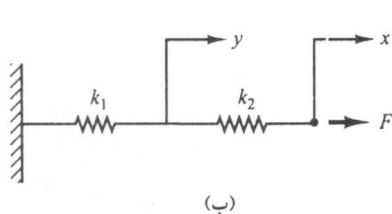
سیستمهای مکانیکی و سیستمهای الکتریکی

۱-۳ مقدمه

در این فصل مدلسازی ریاضی سیستمهای مکانیکی و الکتریکی را معرفی می‌کنیم. در فصل ۲ مدل‌های ریاضی یک مدار الکتریکی ساده و یک سیستم مکانیکی ساده را به دست آوردیم. در این فصل مدلسازی ریاضی سیستمهای مکانیکی و الکتریکی متنوعی را در نظر می‌گیریم که در سیستمهای کنترل با آنها روبه‌رو می‌شویم. قانون پایه‌ای حاکم بر سیستمهای مکانیکی قانون دوم نیوتن است. در بخش ۲-۳ این قانون را به سیستمهای مکانیکی مختلفی اعمال کرده، مدل تابع تبدیل و مدل فضای حالت این سیستمها را به دست می‌آوریم. قوانین بنیادی حاکم بر مدارهای الکتریکی قوانین کیرشهف هستند. در بخش ۳-۳ مدل‌های تابع تبدیل و فضای حالت مدارهای الکتریکی مختلف، و مدارهای آپامپی را به دست می‌آوریم؛ به مدارهایی نظر داریم که در سیستمهای کنترل کاربرد دارند.

۲-۳ مدلسازی ریاضی سیستمهای مکانیکی

در این بخش ابتدا در مورد سیستمهای ساده دارای فنر و ضربه‌گیر صحبت می‌کنیم. سپس مدل‌های تابع تبدیل و فضای حالت سیستمهای مکانیکی متنوعی را به دست می‌آوریم.



شکل ۱-۳

(الف) سیستم متشکل از دو فنر موازی؛ (ب) سیستم متشکل از دو فنر سری.

ثابت فنر معادل سیستمهای نشان داده شده در شکل‌های ۱-۳ (الف) و (ب) را بیابید.

مثال ۱-۳

برای فنرهای موازی [شکل ۱-۳ (الف)] ثابت فنر معادل k_{eq} را به صورت زیر می‌یابیم

$$k_1 x + k_2 x = F = k_{eq} x$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

یا

برای فنرهای سری [شکل ۱-۳ (ب)] نیروی وارد بر هر دو فنر یکی است. پس

$$k_1 y = F, \quad k_2 (x - y) = F$$

حذف y از این دو معادله به دست می‌دهد

$$k_2 \left(x - \frac{F}{k_1} \right) = F$$

$$k_2 x = F + \frac{k_2}{k_1} F = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F$$

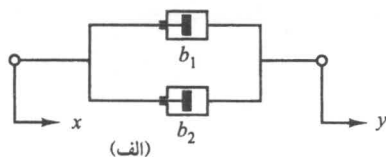
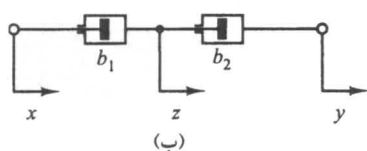
یا

پس ثابت فنر معادل k_{eq} در این حالت عبارت است از

$$k_{eq} = \frac{F}{x} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

ضریب اصطکاک چسبندگی معادل b_{eq} هر یک از سیستمهای شکل ۲-۳ (الف) و (ب) را بیابید. میراساز روغنی را معمولاً ضربه‌گیر می‌نامند. ضربه‌گیر وسیله‌ای است که اصطکاک چسبندگی، یا میرایی ایجاد می‌کند. ضربه‌گیر از یک استوانه پر شده از روغن و یک پیستون تشکیل شده است. هر حرکت نسبی بین میله پیستون و استوانه با مقاومت روبه‌رو می‌شود، چرا که برای رخ دادن چنین حرکتی باید روغن از یک طرف پیستون به طرف دیگر آن برود (روغن از اطراف پیستون یا روزنه‌های تعبیه شده در آن از یک طرف پیستون به طرف دیگر آن می‌رود). ضربه‌گیر در واقع انرژی جذب می‌کند. انرژی جذب شده به گرما تبدیل می‌شود؛ ضربه‌گیر نمی‌تواند انرژی جنبشی یا پتانسیل در خود ذخیره کند.

مثال ۲-۳



شکل ۲-۳

(الف) دو میراساز موازی شده؛ (ب) دو میراساز سری شده.

(الف) نیروی f ناشی از میراسازها عبارت است از

$$f = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x})$$

نیروی f بر حسب ضریب اصطکاک چسبندگی معادل b_{eq} عبارت است از

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

$$b_{eq} = b_1 + b_2$$

پس

(ب) نیروی f ناشی از هر میراساز عبارت است از

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_2(\dot{y} - \dot{z}) \quad (۱-۳)$$

که در آن z جابه جایی نقطه بین میراسازهای b_1 و b_2 است. (توجه کنید که میله نیروی یکسانی را منتقل می کند.) با توجه به معادله (۱-۳) داریم

$$(b_1 + b_2)\dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

یا

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \quad (۲-۳)$$

نیروی f بر حسب ضریب اصطکاک چسبندگی معادل b_{eq} عبارت است از

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

با گذاشتن معادله (۲-۳) در معادله (۱-۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} f &= b_2(\dot{y} - \dot{z}) = b_2 \left[\dot{y} - \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \right] \\ &= \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x}) = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x})$$

پس

و در نتیجه

$$b_{eq} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}$$

مثال ۳-۳

سیستم جرم - فنر - ضربه‌گیر سوار بر گاری بی‌جرم شکل ۳-۳ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم برای این سیستم سوار بر گاری یک مدل ریاضی بیابیم، با این فرض که در $t < 0$ گاری ساکن بوده و سیستم جرم - فنر - ضربه‌گیر سوار بر گاری نیز ساکن بوده است. در این سیستم $u(t)$ جابه‌جایی گاری است و ورودی سیستم به حساب می‌آید. در $t = 0$ گاری با سرعت ثابت به حرکت درمی‌آید، یعنی $\dot{u} = \text{ثابت}$. جابه‌جایی $y(t)$ جرم، خروجی سیستم است. (جابه‌جایی نسبت به زمین سنجیده می‌شود) در این سیستم m جرم، b ضریب اصطکاک چسبندگی و k ثابت فنر است. فرض می‌کنیم نیروی اصطکاکی ضربه‌گیر با $\dot{y} - \dot{u}$ متناسب است و فنر خطی است؛ یعنی نیروی فنر با $y - u$ متناسب است.

قانون دوم نیوتن برای سیستمهای جابه‌جا شونده می‌گوید

$$ma = \Sigma F$$

که در آن m جرم، a شتاب جرم و ΣF جمع نیروهای وارد بر جرم است. با اعمال قانون دوم نیوتن به این سیستم، و توجه به این که گاری بی‌جرم است به دست می‌آوریم

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - k(y - u)$$

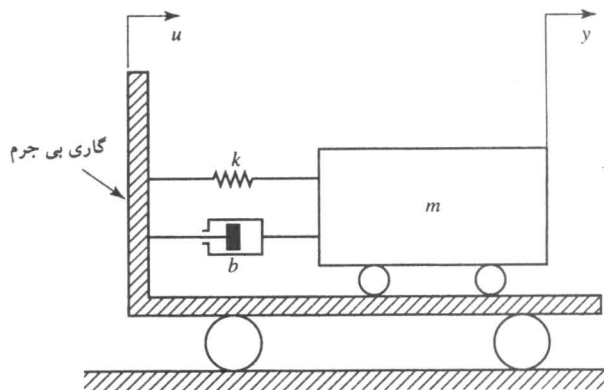
یا

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{du}{dt} + ku$$

این معادله یک مدل ریاضی برای سیستم مورد نظر است. اگر از معادله اخیر، با شرط صفر بودن شرایط اولیه، تبدیل لاپلاس بگیریم به دست می‌آوریم

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

با تشکیل نسبت $Y(s)$ به $U(s)$ تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر می‌یابیم



شکل ۳-۳

سیستم فنر - جرم - ضربه‌گیر
سوار در گاری بی‌جرم.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

این نوع نمایش مدل ریاضی یا تابع تبدیل در مهندسی کنترل بسیار به کار می‌رود. حال مدل فضای حالت این سیستم را به دست می‌آوریم. ابتدا معادله دیفرانسیل این سیستم، یعنی

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

را با معادله استاندارد زیر مقایسه می‌کنیم

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u$$

و a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 را به صورت زیر تشخیص می‌دهیم

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

با توجه به معادله (۲-۳۵) تعریف می‌کنیم

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

حال با توجه به معادله (۲-۳۴) تعریف می‌کنیم

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

با توجه به معادله (۲-۳۶) داریم

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

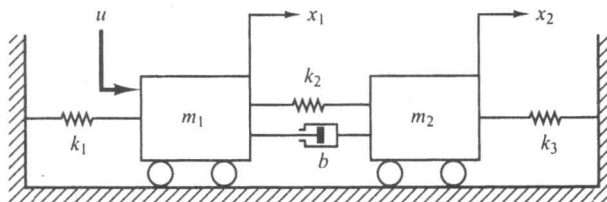
$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

و معادله خروجی عبارت است از

$$y = x_1$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u \quad (3-3)$$



شکل ۴-۳
سیستم مکانیکی.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (۴-۳)$$

معادلات (۳-۳) و (۴-۳) نمایش فضای حالت سیستم را به دست می دهند. (توجه کنید که این تنها نمایش فضای حالت ممکن نیست. برای این سیستم بینهایت نمایش فضای حالت وجود دارد.)

تابع تبدیل $X_1(s)/U(s)$ و $X_2(s)/U(s)$ سیستم مکانیکی شکل ۴-۳ را بیابید.

مثال ۴-۳

معادلات حرکت سیستم شکل ۴-۳ عبارت است از

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1) - b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

با ساده کردن به دست می آوریم

$$m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 = b \dot{x}_2 + k_2 x_2 + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 = b \dot{x}_1 + k_2 x_1$$

از این دو معادله با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می گیریم و به دست می آوریم

$$\left[m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_2) \right] X_1(s) = (bs + k_2) X_2(s) + U(s) \quad (۵-۳)$$

$$\left[m_2 s^2 + bs + (k_2 + k_3) \right] X_2(s) = (bs + k_2) X_1(s) \quad (۶-۳)$$

$X_2(s)$ را از معادله (۶-۳) به دست آورده آن را در معادله (۵-۳) قرار می دهیم، و پس از ساده کردن به دست می آوریم

$$\begin{aligned} & [(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2] X_1(s) \\ & = (m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) U(s) \end{aligned}$$

که به دست می دهد

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \quad (۷-۳)$$

از معادلات (۶-۳) و (۷-۳) به دست می آوریم

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \quad (۸-۳)$$

معادلات (۷-۳) و (۸-۳) به ترتیب توابع تبدیل $X_1(s)/U(s)$ و $X_2(s)/U(s)$ هستند.

مثال ۵-۳

شکل ۵-۳ (الف) یک آونگ وارون سوار بر ارابه موتوردار را نشان می‌دهد. این مدل سیستم کنترل راستای یک موشک در هنگام پرتاب را نشان می‌دهد. (هدف سیستم کنترل راستا، قائم نگهداشتن موشک است.) آونگ وارون ناپایدار است، یعنی در هر لحظه می‌تواند در هر جهتی واژگون شود، مگر این که نیروی کنترلی مناسبی اعمال شود. در اینجا یک مسئله دویعده را در نظر می‌گیریم که در آن آونگ در تنها صفحه کاغذ حرکت می‌کند. نیروی کنترل کننده u به ارابه اعمال می‌شود. فرض کنید مرکز گرانش میله آونگ در مرکز هندسی آن است. مدل ریاضی این سیستم را بنویسید.

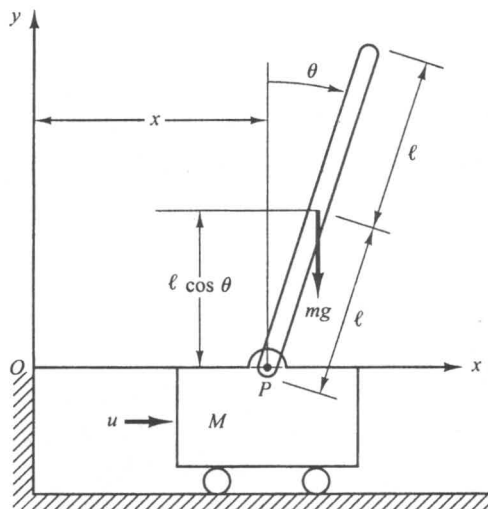
زاویه میله نسبت به خط قائم را θ فرض کنید. مختصات (x, y) مرکز گرانش میله آونگ را (x_G, y_G) تعریف می‌کنیم. پس

$$x_G = x + l \sin \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

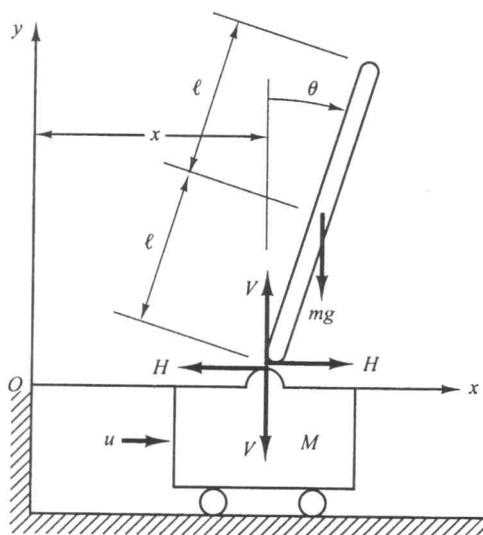
برای یافتن معادلات حرکت سیستم نمودار جسم آزاد شکل ۵-۳ (ب) را در نظر بگیرید. حرکت دورانی میله آونگ حول مرکز جرم را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد

$$I \ddot{\theta} = V l \sin \theta - H l \cos \theta \quad (۹-۳)$$



شکل ۵-۳

(الف) سیستم آونگ وارون؛



شکل ۳-۵

(ب) نمودار جسم آزاد.

که در آن I لختی دورانی میله حول مرکز گرانش آن است.

حرکت افقی مرکز گرانش میله عبارت است از

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (10-3)$$

حرکت قائم مرکز گرانش میله عبارت است از

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (11-3)$$

حرکت افقی ارابه به صورت زیر توصیف می شود :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (12-3)$$

چون باید آونگ وارون را قائم نگه داشت ، می توان فرض کرد که $\theta(t)$ و $\dot{\theta}(t)$ کمیات کوچکی هستند، یعنی $\cos \theta \approx 1$ ، $\sin \theta \approx 0$ و $\theta \dot{\theta} \approx 0$. پس معادلات (۹-۳) تا (۱۱-۳) را می توان خطی کرد. معادلات خطی شده

عبارت اند از

$$I \ddot{\theta} = V l \theta - H l \quad (13-3)$$

$$m (\ddot{x} + l \ddot{\theta}) = H \quad (14-3)$$

$$0 = V - mg \quad (15-3)$$

از معادلات (۱۲-۳) تا (۱۴-۳) به دست می آوریم

$$(M + m) \ddot{x} + m l \ddot{\theta} = u \quad (16-3)$$

با توجه به معادلات (۱۳-۳)، (۱۴-۳)، و (۱۵-۳) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mg l \theta - H l \\ &= mg l \theta - l(m\ddot{x} - ml\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

یا

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mg l \theta \quad (۱۷-۳)$$

معادلات (۱۶-۳) و (۱۷-۳) حرکت سیستم آونگ وارون سوار بر ارابه را توصیف می کند. اینها یک مدل ریاضی برای سیستم به حساب می آیند.

مثال ۳-۶

سیستم آونگ وارون شکل ۳-۶ را در نظر بگیرید. چون در این سیستم جرم در بالای میله متمرکز است، مرکز گرانش در مرکز گلوله بالای میله قرار دارد. مدل تابع تبدیل و فضای حالت این سیستم را به دست آورید.

در این حالت لختی دورانی آونگ حول مرکز گرانش کوچک است و فرض می کنیم در معادله (۱۷-۳) داریم $I = 0$. پس مدل ریاضی این سیستم به صورت زیر است

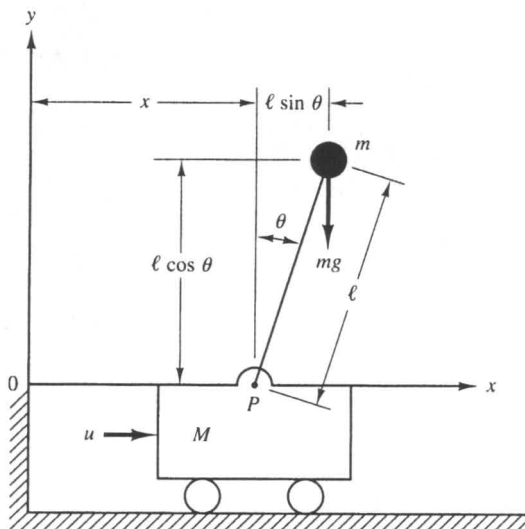
$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (۱۸-۳)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mg l \theta \quad (۱۹-۳)$$

از معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) می توان نتیجه گرفت

$$M l \ddot{\theta} = (M + m) g \theta - u \quad (۲۰-۳)$$

$$M \ddot{x} = u - m g \theta \quad (۲۱-۳)$$



شکل ۳-۶

سیستم آونگ وارون.

معادله (۲۰-۳) با حذف $\ddot{\theta}$ از معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) به دست آمده است. معادله (۲۱-۳) با حذف $\ddot{\theta}$ از معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) به دست آمده است. از معادله (۲۰-۳) می توان تابع تبدیل دستگاه را به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{M l s^2 - (M+m)g}$$

$$= \frac{1}{M l \left(s + \sqrt{\frac{M+m}{M l}} g \right) \left(s - \sqrt{\frac{M+m}{M l}} g \right)}$$

آونگ وارون یک قطب روی بخش منفی محور حقیقی و یک قطب روی بخش مثبت محور حقیقی، در $s = -\left(\sqrt{M+m}/\sqrt{M l}\right)\sqrt{g}$ و $s = \left(\sqrt{M+m}/\sqrt{M l}\right)\sqrt{g}$ دارد. پس در حالت حلقه باز ناپایدار است. متغیرهای حالت x_1, x_2, x_3, x_4 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

توجه کنید که زاویه θ چرخش میله آونگ حول محور P را نشان می دهد، و x محل اربابه است. اگر x و θ را خروجی های سیستم در نظر بگیریم، داریم

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که هم x و هم θ کمیتی هستند که به راحتی می توان اندازه گیری کرد. پس طبق تعریف متغیرهای حالت و معادلات (۲۰-۳) و (۲۱-۳) به دست می آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{M l} g x_1 - \frac{1}{M l} u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u$$

این معادلات را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{M l} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M l} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (22-3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (۲۳-۳)$$

معادلات (۲۲-۳) و (۲۳-۳) نمایش فضای حالت سیستم آونگ وارون را به دست می دهد (به یاد داشته باشید که نمایش فضای حالت یک سیستم یکتا نیست. برای یک سیستم بینهایت نمایش فضای حالت وجود دارد).

۳-۳ مدل سازی ریاضی سیستم های الکتریکی

قوانین پایه ای حاکم بر مدارهای الکتریکی قوانین ولتاژ و جریان کیرشهف هستند. قانون جریان کیرشهف (قانون گره) می گوید مجموع جبری جریان هایی که به یک گره وارد می شود، یا از آن خارج می شود، صفر است. (این قانون را می توان به این صورت نیز بیان کرد: مجموع جریان هایی که وارد یک گره می شود با مجموع جریان هایی که از گره خارج می شود، برابر است.) قانون ولتاژ کیرشهف (قانون حلقه) می گوید در هر لحظه مجموع جبری ولتاژها حول هر حلقه بسته ای صفر است. (این قانون را نیز می توان به این شکل بیان کرد: مجموع افزایش ولتاژهای حول هر حلقه با مجموع افت ولتاژهای آن حلقه برابر است.) مدل ریاضی یک مدار الکتریکی را می توان با اعمال یک یا هر دو قانون کیرشهف به دست آورد.

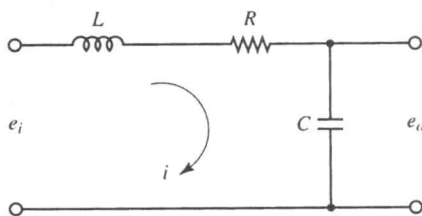
در این بخش ابتدا به مدارهای الکتریکی ساده می پردازیم. سپس مدل سازی ریاضی سیستم های آبامپی را در نظر می گیریم.

مدار RCL. مدار الکتریکی شکل ۷-۳ را در نظر بگیرید. این مدار از یک القاکنایی L هنری، یک مقاومت R اهمی، و یک خازن C فارادی تشکیل شده است. با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف به این سیستم معادلات زیر را می یابیم:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i \quad (۲۴-۳)$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o \quad (۲۵-۳)$$

معادلات (۲۴-۳) و (۲۵-۳) مدل ریاضی این سیستم را به دست می دهند.



شکل ۷-۳
مدار الکتریکی.

مدل تابع تبدیلی مدار را می‌توان به این ترتیب به دست آورد: با فرض صفر بودن شرایط اولیه از معادلات (۲۴-۳) و (۲۵-۳) تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

اگر e_i را ورودی و e_o را خروجی فرض کنیم، تابع تبدیل به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (26-3)$$

مدل فضای حالت سیستم شکل ۳-۷ را می‌توان به این ترتیب یافت: ابتدا معادله دیفرانسیل سیستم را می‌توان از معادله (۲۶-۳) به دست آورد

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L} \dot{e}_o + \frac{1}{LC} e_o = \frac{1}{LC} e_i$$

متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = e_o$$

$$x_2 = \dot{e}_o$$

متغیرهای ورودی و خروجی عبارت‌اند از

$$u = e_i$$

$$y = e_o = x_1$$

پس به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

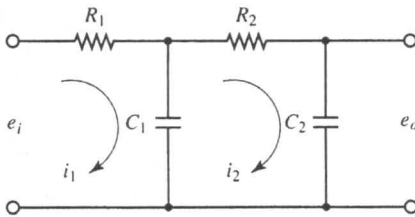
و

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

این دو معادله مدل ریاضی سیستم در فضای حالت را به دست می‌دهد.

تابع تبدیل اجزای متوالی. بسیاری از سیستم‌های فیدبک‌دار عناصری دارند که بر یکدیگر اثر بارگذاری دارند. سیستم شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید. e_i را ورودی و e_o را خروجی فرض کنید. خازنها در ابتدا بدون بار هستند. در این سیستم طبقه دوم مدار (بخش $R_2 C_2$) بر بخش اول (بخش $R_1 C_1$) اثر بارگذاری دارد. معادلات این سیستم عبارت‌اند از

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + R_1 i_1 = e_i \quad (27-3)$$



شکل ۳-۸ سیستم الکتریکی.

$$\frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = 0 \quad (28-3)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_o \quad (29-3)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات (۲۷-۳) تا (۲۹-۳)، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می آوریم

$$\frac{1}{C_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \quad (30-3)$$

$$\frac{1}{C_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_1 s} I_1(s) = 0 \quad (31-3)$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \quad (32-3)$$

$I_1(s)$ را از معادلات (۳۰-۳) و (۳۱-۳) حذف کرده، $E_i(s)$ را بر حسب $I_2(s)$ می نویسیم و تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ را به صورت زیر می یابیم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{1}{R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned} \quad (33-3)$$

جمله $R_1 C_2 s$ مخرج تابع تبدیل، اندرکنش دو مدار RC را بر هم نشان می دهد. چون

$$(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)^2 > 4 R_1 C_1 R_2 C_2$$

دو ریشه مخرج معادله (۳۳-۳) حقیقی اند.

این تحلیل نشان داد که اگر دو مدار RC متوالی شوند، به نحوی که خروجی اولی ورودی دومی به حساب آید، تابع تبدیل کل حاصل ضرب $1/(R_1 C_1 s + 1)$ و $1/(R_2 C_2 s + 1)$ نیست. علت این است که در یافتن تابع تبدیل یک مدار، به طور ضمنی فرض می کنیم باری به خروجی وصل نیست. به عبارت دیگر امیدانس بار بی نهایت فرض می شود، یعنی توانی از خروجی گرفته نمی شود. با اتصال مدار دوم به خروجی مدار اول توانی از خروجی گرفته می شود، بنابراین فرض نبودن اثر بارگذاری نقض می شود. پس تابع تبدیلی که با فرض صفر بودن اثر بارگذاری به دست آمده است، دیگر اعتبار ندارد. میزان اثر بارگذاری تعیین می کند که تابع تبدیل چقدر اصلاح لازم دارد.

امپدانس مختلط. در یافتن تابع تبدیل مدارهای الکتریکی نوشتن مستقیم معادلات مربوط به تبدیل لاپلاس کمیات مناسبتر از نوشتن معادلات دیفرانسیل است. سیستم شکل ۳-۹ (الف) را در نظر بگیرید. در این سیستم Z_1 و Z_2 امپدانسهای مختلط هستند. امپدانس مختلط $Z(s)$ یک مدار دو پایانه‌ای نسبت تبدیل لاپلاس ولتاژ روی پایانه‌ها $E(s)$ به تبدیل لاپلاس جریان گذرنده از پایانه‌ها $I(s)$ ، هنگام صفر بودن شرایط اولیه، است یعنی $Z(s) = E(s)/I(s)$. اگر مدار دو پایانه‌ای مقاومت R خازن C یا القاگر L باشد، امپدانس مختلط به ترتیب R یا $1/Cs$ یا Ls است. اگر امپدانسهای مختلط سری باشند، امپدانس کل با مجموع امپدانسهای مختلط برابر است.

به خاطر داشته باشید که مفهوم امپدانس تنها به شرط صفر بودن شرایط اولیه قابل اعمال است. چون تابع تبدیل به ازای شرایط اولیه صفر به دست می‌آید، برای یافتن آن می‌توان از مفهوم امپدانس استفاده کرد. این رهیافت یافتن تابع تبدیل مدارهای الکتریکی را بسیار ساده می‌کند.

مدار شکل ۳-۹ (ب) را در نظر بگیرید، ولتاژهای e_i و e_o را به ترتیب ورودی و خروجی سیستم فرض کنید. تابع تبدیل این سیستم عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

برای سیستم شکل ۳-۷

$$Z_1 = Ls + R, \quad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

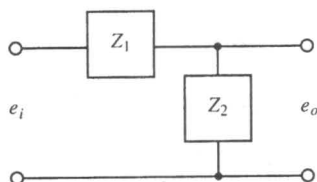
پس تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

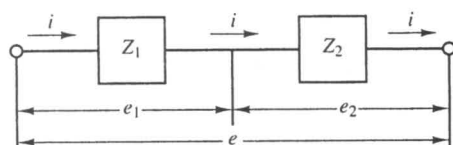
که با معادله (۳-۲۶) یکی است

باز هم سیستم شکل ۳-۸ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ را با استفاده از رهیافت امپدانسهای مختلط به دست آورید. (خازنهای C_1 و C_2 بار اولیه ندارند).

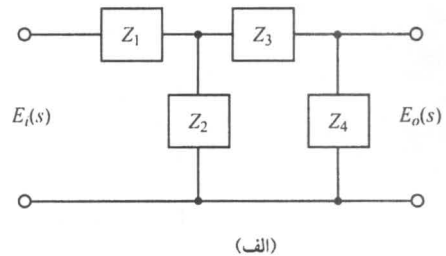
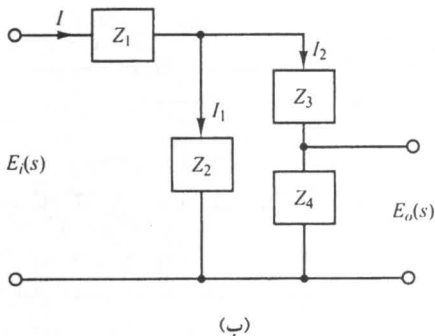
مثال ۳-۷



(ب)



(الف)



شکل ۱۰-۳ (الف) مدار شکل ۸-۳ برحسب امپدانس؛ (ب) مدار معادل.

مدار شکل ۸-۳ را می توان به صورت شکل ۱۰-۳ (الف) رسم کرد، که آن هم قابل تبدیل به مدار شکل ۱۰-۳ (ب) است.

در سیستم شکل ۱۰-۳ (ب) جریان I به دو جریان I_1 و I_2 تقسیم می شود. با توجه به این که

$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2, \quad I_1 + I_2 = I$$

به دست می آوریم

$$I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I, \quad I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

و با توجه به این که

$$E_i(s) = Z_1 I + Z_2 I_1 = \left[Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$E_o(s) = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

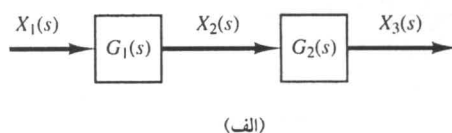
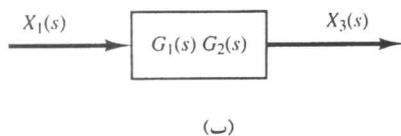
به دست می آوریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

با جایگذاری $Z_4 = 1/(C_2 s)$ و $Z_3 = R_2$, $Z_2 = 1/(C_1 s)$, $Z_1 = R_1$ در معادله اخیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{\frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{C_2 s}}{R_1 \left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right) + \frac{1}{C_1 s} \left(R_2 + \frac{1}{C_2 s} \right)} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

که همان معادله (۳۳-۳) است.



شکل ۳-۱۱ (الف) سیستم متشکل از دو جزء فاقد اثر بارگذاری؛ (ب) سیستم معادل.

تابع تبدیل عناصر متوالی فاقد اثر بارگذاری. تابع تبدیل سیستمی را که از دو جزء متوالی شده فاقد اثر بارگذاری تشکیل شده است، می‌توان با حذف ورودی و خروجی میانی به دست آورد. مثلاً سیستم شکل ۳-۱۱ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل اجزاء عبارت است از

$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad \text{و} \quad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

اگر امپدانس ورودی جزء دوم بی‌نهایت باشد، جزء دوم بر جزء اول اثر بارگذاری ندارد. بنابراین تابع تبدیل کل به صورت زیر است

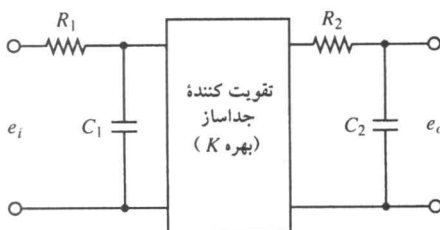
$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = G_1(s) G_2(s)$$

پس تابع تبدیل سیستم کل حاصلضرب توابع تبدیل اجزاء است. شکل ۳-۱۱ (ب) این هم‌ارزی را نشان می‌دهد.

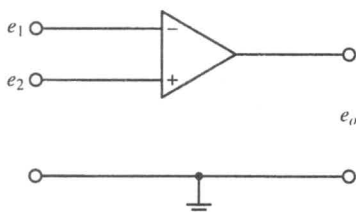
سیستم شکل ۳-۱۲ را به عنوان مثال در نظر بگیرید. با گذاشتن تقویت کننده جداساز بین مدارها اثر بارگذاری حذف می‌شود، این کاری است که معمولاً در ترکیب مدارها انجام می‌شود. چون امپدانس ورودی تقویت کننده بسیار بزرگ است، وجود آن در مدار فرض نبودن اثر بارگذاری را معتبر می‌کند. دو مدار ساده RC که مطابق شکل ۳-۱۲ توسط تقویت کننده جداساز از هم مجزا شده‌اند، اثر بارگذاری

ناچیزی دارند و تابع تبدیل کل حاصلضرب تک‌تک توابع تبدیل است، پس در این حالت

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \left(\frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \right) (K) \left(\frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} \end{aligned}$$



شکل ۳-۱۲ سیستم الکتریکی.



شکل ۳-۱۳ تقویت کننده عملیاتی.

کنترل کننده های الکترونیکی. در ادامه راجع به کنترل کننده های الکترونیکی ساخته شده با تقویت کننده های عملیاتی (آپامپ) صحبت می کنیم. کار را با یافتن تابع تبدیل یک مدار آپامپی ساده شروع می کنیم. سپس تابع تبدیل چند کنترل کننده آپامپی را به دست می آوریم. سرانجام کنترل کننده های آپامپی و توابع تبدیلیشان را به صورت یک جدول معرفی می کنیم.

تقویت کننده عملیاتی. تقویت کننده عملیاتی، که غالباً آپامپ خوانده می شود، برای تقویت سیگنالهای گرفته شده از حس کننده ها بسیار به کار می رود. در فیلترهایی که به عنوان جبران کننده به کار می روند نیز از آپامپ بسیار استفاده می شود. شکل ۳-۱۳ یک آپامپ را نشان می دهد. معمولاً پتانسیل زمین ۰V فرض شده ولتاژهای ورودی e_1 و e_2 نسبت به آن سنجیده می شوند. ورودی e_1 پایانه منفی آپامپ وارون می شود، ولی ورودی e_2 پایانه مثبت وارون نمی شود. پس ورودی کل آپامپ $e_2 - e_1$ است. برای مدل شکل ۳-۱۳ داریم

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$$

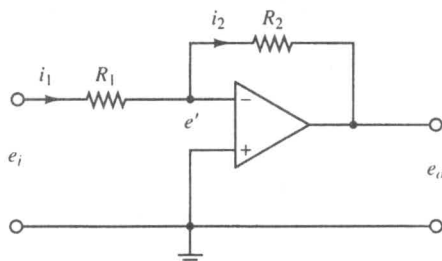
ورودیهای e_1 و e_2 می توانند سیگنال dc یا ac باشند و K بهره تفاضلی یا بهره ولتاژ است. اندازه K برای سیگنال dc و سیگنالهای ac دارای فرکانس کمتر از حدود ۱۰ Hz تقریباً حدود 10^5 تا 10^6 است. (بهره تفاضلی K با افزایش فرکانس کم می شود و در فرکانسهای حدود ۱ MHz تا ۵۰ MHz به یک می رسد). توجه کنید که آپامپ تفاضل ولتاژهای e_1 و e_2 را تقویت می کند. چنین تقویت کننده ای را تقویت کننده تفاضلی می نامند. چون بهره آپامپ بسیار بزرگ است، برای پایدار شدن تقویت کننده باید فیدبک منفی از خروجی به ورودی برقرار شود. (فیدبک از خروجی به پایانه منفی آپامپ ایجاد می شود تا نوع فیدبک منفی باشد).

در آپامپ ایده آل جریان پایانه های ورودی صفر است و بار متصل به پایانه خروجی بر خروجی اثر بارگذاری ندارد. به عبارت دیگر امپدانس ورودی آپامپ بی نهایت و امپدانس خروجی آن صفر است. در آپامپ های واقعی جریان کوچکی (تقریباً ناچیز) از پایانه های ورودی می گذرد و نمی توان از خروجی آپامپ جریان زیادی کشید. در تحلیلهایی که خواهد آمد، آپامپ ایده آل فرض می شود.

تقویت کننده وارون ساز. مدار آپامپی شکل ۳-۱۴ را در نظر بگیرید. بیایید ولتاژ خروجی e_o را بیابیم. معادله این مدار را می توان به صورت زیر یافت: تعریف می کنیم

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1} \quad , \quad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

چون جریان وارد شده به آپامپ ناچیز است، جریان i_2 باید با جریان i_1 برابر باشد. پس



شکل ۳-۱۴

تقویت کننده وارون ساز.

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

چون $K(0 - e') = e_o$ و $K \gg 1$ ، e' باید تقریباً برابر صفر باشد، یا $e' \approx 0$. پس داریم

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

یا

پس مدار نشان داده شده یک تقویت کننده وارون ساز است. به ازای $R_1 = R_2$ مدار به صورت تغییر دهنده علامت عمل می کند.

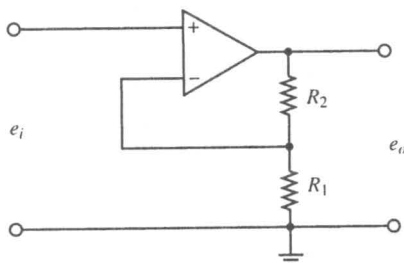
تقویت کننده ناوارون ساز. شکل ۳-۱۵ (الف) یک تقویت کننده ناوارون ساز را نشان می دهد. شکل ۳-۱۵ (ب)

مداری معادل با این تقویت کننده را نشان می دهد. برای مدار شکل ۳-۱۵ (ب) داریم

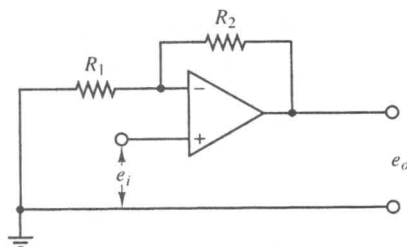
$$e_o = K \left(e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o \right)$$

که در آن K بهره تفاضلی آپامپ است. از این معادله به دست می آوریم

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K} \right) e_o$$

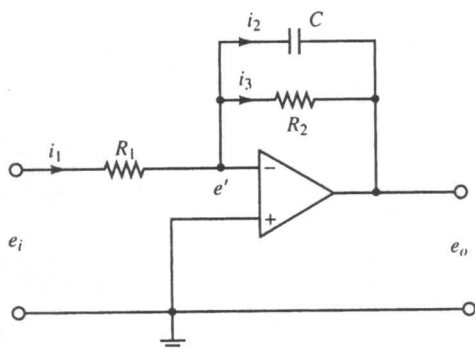


(ب)



(الف)

شکل ۳-۱۵ (الف) تقویت کننده آپامپی ناوارون ساز؛ (ب) مدار معادل.



شکل ۱۶-۳

مدار پسفاز مرتبه اول با آپامپ.

چون $K \gg 1$ ، اگر $R_1/(R_1 + R_2) \gg (1/K)$ ، آنگاه

$$e_o = K \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e_i$$

این معادله ولتاژ خروجی e_o را به دست می‌دهد. چون e_i و e_o هم علامت‌اند، مدار آپامپی شکل ۱۵-۳ (الف) ناوارونساز است.

شکل ۱۶-۳ یک مدار الکتریکی آپامپی را نشان می‌دهد. خروجی e_o را بیابید.

مثال ۸-۳

تعریف می‌کنیم

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \quad i_2 = C \frac{d(e' - e_o)}{dt}, \quad i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

با توجه به این که جریان ورودی آپامپ ناچیز است، داریم

$$i_1 = i_2 + i_3$$

پس

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C \frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

چون $e' \approx 0$ داریم

$$\frac{e_i}{R_1} = -C \frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس این معادله، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می‌آوریم

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\frac{R_2 C s + 1}{R_2} E_o(s)$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2 C s + 1}$$

مدار آپامپی شکل ۱۶-۳ یک مدار پسفاز مرتبه اول است. (در جدول ۳-۱ تعدادی مدار آپامپی و تابع تبدیلیشان نشان داده شده است).

رهیافت امیدانس برای یافتن تابع تبدیل. مدار آپامپی شکل ۱۷-۳ را در نظر بگیرید. می‌توانیم رهیافت امیدانس را، که قبلاً در مورد مدارهای الکتریکی به کار بردیم، برای یافتن تابع تبدیل مدارهای آپامپی نیز به کار ببریم. برای مدار شکل ۱۷-۳ داریم

$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E_o(s)}{Z_2}$$

و چون $E'(s) \approx 0$ ، داریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (۳-۳۴)$$

تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار آپامپی شکل ۱۶-۳ را با استفاده از رهیافت امیدانس بیابید.

مثال ۳-۹

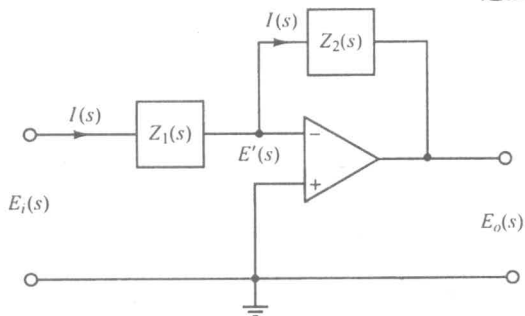
امپدانسهای مختلط $Z_1(s)$ و $Z_2(s)$ این مدار عبارت است از

$$Z_2(s) = \frac{1}{C s + (1/R_2)} = \frac{R_2}{R_2 C s + 1}, \quad Z_1(s) = R_1$$

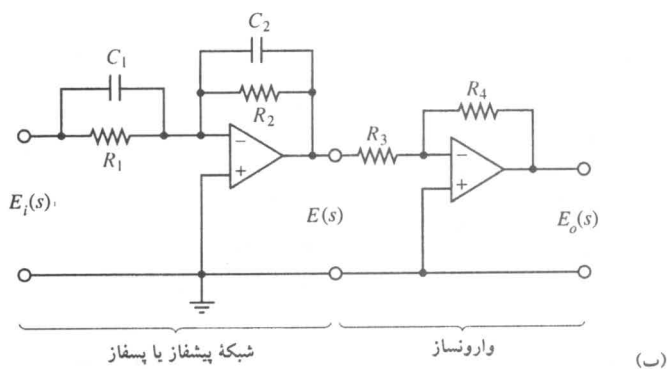
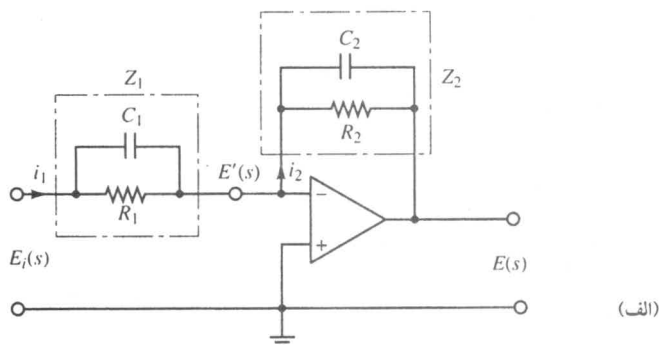
پس تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{R_2 C s + 1}$$

که البته همان تابع تبدیل به دست آمده در مثال ۳-۸ است.



شکل ۱۷-۳ مدار آپامپی.



شکل ۱۸-۳

(الف) مدار آپامپی؛ (ب) مدار آپامپی که به عنوان جبران‌ساز پیشفاز یا پسفاز به کار می‌رود.

شبکه‌های پیشفاز و پسفاز آپامپی. شکل ۱۸-۳ (الف) یک مدار الکترونیکی آپامپی را نشان می‌دهد. تابع تبدیل این مدار را به این صورت می‌یابیم: امپدانس ورودی را Z_1 و امپدانس فیدبک را Z_2 می‌نامیم. پس

$$Z_2 = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} \quad \text{و} \quad Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

پس با توجه به معادله (۳-۳۴) داریم

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{s + (1/R_1 C_1)}{s + (1/R_2 C_2)} \quad (۳-۳۵)$$

توجه کنید که تابع تبدیل معادله (۳-۳۵) یک علامت منفی دارد، پس این مدار وارونساز است. اگر در کاربرد مورد نظر این وارونساز مطلوب نباشد، می‌توان در ورودی یا خروجی مدار شکل ۱۸-۳ (الف) یک مدار وارونساز گذاشت. شکل ۱۸-۳ (ب) یک مدار نمونه را نشان می‌دهد. تابع تبدیل وارونساز عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_F}{R_T}$$

بهره مدار وارونساز R_f/R_r است. پس تابع تبدیل مدار شکل ۱۸-۳ (ب) به صورت زیر است:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_f R_r}{R_1 R_r} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_r C_r s + 1} = \frac{R_f C_1}{R_r C_r} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_r C_r}} \quad (۳۶-۳)$$

$$= K_c \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

که در آن

$$T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_r C_r, \quad K_c = \frac{R_f C_1}{R_r C_r}$$

توجه کنید که

$$K_c \alpha = \frac{R_f C_1}{R_r C_r} \frac{R_r C_r}{R_1 C_1} = \frac{R_f R_r}{R_1 R_r}, \quad \alpha = \frac{R_r C_r}{R_1 C_1}$$

بهره dc این شبکه $K_c \alpha = R_f R_r / (R_1 R_r)$ است.

توجه کنید که این شبکه به ازای $R_1 C_1 > R_r C_r$ یا $\alpha < 1$ یک شبکه پیشفاز است. این شبکه به ازای $R_1 C_1 < R_r C_r$ پسفاز است.

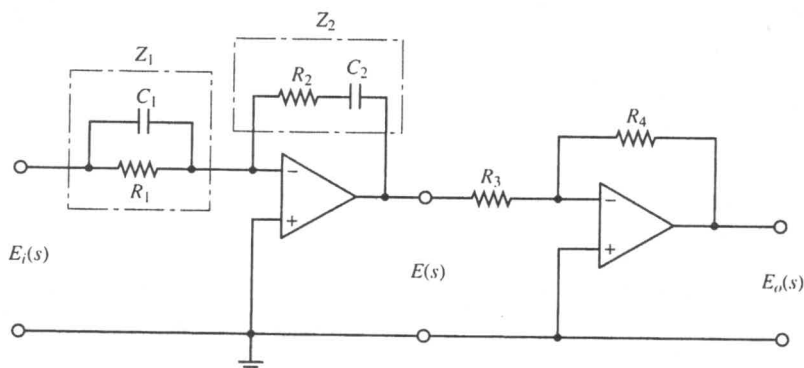
کنترل کننده PID آبامپی. شکل ۱۹-۳ یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی (PID) آبامپی را نشان

می دهد. تابع تبدیل $E(s)/E_i(s)$ عبارت است از

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_r}{Z_1}$$

که در آن

$$Z_r = \frac{R_r C_r s + 1}{C_r s}, \quad Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$



شکل ۱۹-۳ کنترل کننده PID الکتریکی.

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = - \left(\frac{R_f C_f s + 1}{C_f s} \right) \left(\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} \right) \quad \text{پس}$$

با توجه به این که

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = - \frac{R_f}{R_r}$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_f R_f}{R_1 R_r} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_f + C_f s + 1)}{R_f C_f s} \\ &= \frac{R_f R_f}{R_1 R_r} \left(\frac{R_1 C_1 + R_f C_f}{R_f C_f} + \frac{1}{R_f C_f s} + R_1 C_1 s \right) \\ &= \frac{R_f (R_1 C_1 + R_f C_f)}{R_r R_1 C_f} \left[1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_f C_f)s} + \frac{R_1 C_1 R_f C_f}{R_1 C_1 + R_f C_f} s \right] \quad (37-3) \end{aligned}$$

توجه کنید که مدار آپامپی دوم هم به عنوان وارون ساز و هم به عنوان تنظیم کننده بهره عمل می کند.

هنگام بیان کنترل کننده PID به صورت

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left(1 + \frac{T_i}{s} + T_d s \right)$$

K_p بهره تناسبی، T_i زمان انتگرال، و T_d زمان مشتق نامیده می شود. با توجه به معادله (37-3) بهره تناسبی

K_p ، زمان انتگرال T_i ، و زمان مشتق T_d را به صورت زیر می یابیم

$$K_p = \frac{R_f (R_1 C_1 + R_f C_f)}{R_r R_1 C_f}$$

$$T_i = \frac{1}{R_1 C_1 + R_f C_f}$$

$$T_d = \frac{R_1 C_1 R_f C_f}{R_1 C_1 + R_f C_f}$$

اگر کنترل کننده PID به صورت زیر بیان شود

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

K_p را بهره تناسبی، K_i را بهره انتگرال گیری، و K_d را بهره مشتق گیری می نامند. در این صورت برای این

کنترل کننده

$$K_p = \frac{R_f (R_1 C_1 + R_f C_f)}{R_r R_1 C_f}$$

$$K_i = \frac{R_f}{R_r R_1 C_f}$$

$$K_d = \frac{R_f R_r C_1}{R_r}$$

جدول ۳-۱ سیاهه‌ای از مدارهای آب‌امپی را که می‌توانند به عنوان کنترل‌کننده یا جبران‌ساز به کار روند نشان می‌دهد.

مسائل نمونه و حلشان

الف ۳-۱ شکل ۳-۲۰ (الف) نمودار طرح گونه سیستم تعلیق یک خودرو را نشان می‌دهد. با حرکت خودرو در جاده، جابه‌جایی قائم تایرها به عنوان حرکت تحریک کننده سیستم تعلیق خودرو عمل می‌کند. حرکت این سیستم از یک حرکت انتقالی مرکز جرم و یک حرکت دورانی حول مرکز جرم تشکیل شده است. مدل‌سازی ریاضی سیستم کامل بسیار پیچیده است.

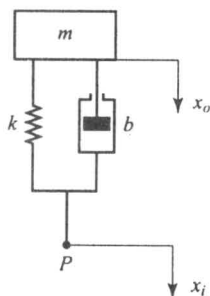
شکل ۳-۲۰ (ب) گونه بسیار ساده شده‌ای از این سیستم تعلیق را نشان می‌دهد. با فرض این که حرکت x_i نقطه P ورودی سیستم و حرکت قائم x_o خروجی سیستم است، تابع تبدیل $X_o(s)/X_i(s)$ را بیابید. (تنها حرکت در راستای قائم را در نظر بگیرید.) جابه‌جایی x_o نسبت به وضعیت تعادل حاصل از صفر بودن ورودی x_i سنجیده می‌شود.

حل: معادله حرکت سیستم شکل ۳-۲۰ (ب) عبارت است از

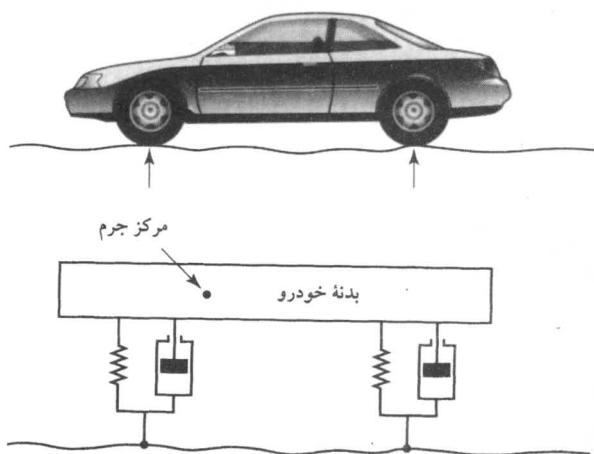
$$m \ddot{x}_o + b(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k(x_o - x_i) = 0$$

$$m \ddot{x}_o + b \dot{x}_o + k x_o = b \dot{x}_i + k x_i$$

یا



(ب)



(الف)

شکل ۳-۲۰ (الف) سیستم تعلیق خودرو. (ب) سیستم تعلیق ساده شده.

شکل ۳-۲۰

جدول ۱-۳ مدارهای آپامپی که می توان به عنوان جبران ساز به کار برد.

	عمل کنترلی	$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$	مدار تقویت کننده آپامپی
1	P	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1}$	
2	I	$\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_1 C_2 s}$	
3	PD	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} (R_1 C_1 s + 1)$	
4	PI	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s}$	
5	PID	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1) (R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$	
6	پیشفاز یا پسفاز	$\frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$	
7	پس فاز - پیش فاز	$\frac{R_6}{R_5} \frac{R_4}{R_3} \frac{[(R_1 + R_3) C_1 s + 1] (R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1) [(R_2 + R_4) C_2 s + 1]}$	

از معادلهٔ اخیر با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) = (bs + k)X_i(s)$$

پس تابع تبدیل $X_o(s)/X_i(s)$ عبارت است از

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

الف ۳-۲ تابع تبدیل $Y(s)/U(s)$ سیستم شکل ۳-۲۱ را در نظر بگیرید. (این سیستم نیز مانند سیستم مسئله الف-۳-۱ گونهٔ ساده شده‌ای از سیستم تعلیق خودرو یا موتور سیکلت است.)

حل: فرض می‌کنیم جابه‌جایی‌های x و y نسبت به وضعیت حالت ماندگار، در نبود ورودی u ، سنجیده می‌شود. با اعمال قانون دوم نیوتن به این سیستم به دست می‌آوریم

$$m_1 \ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_2 \ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

پس داریم

$$m_1 \ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2y + k_1u$$

$$m_2 \ddot{y} + b\dot{y} + k_2y = b\dot{x} + k_2x$$

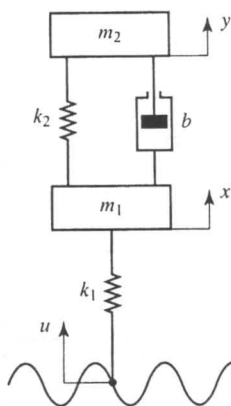
با فرض صفر بودن شرایط اولیه از این دو معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$[m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X(s) = [bs + k_2]Y(s) + k_1U(s)$$

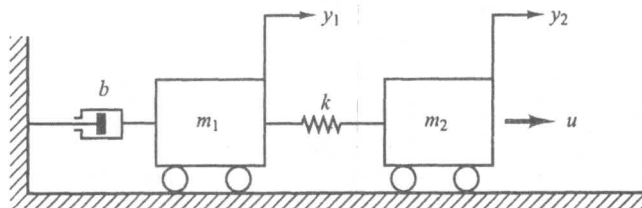
$$[m_2 s^2 + bs + k_2]Y(s) = (bs + k_2)X(s)$$

از دو معادلهٔ بالا $X(s)$ را حذف کرده، به دست می‌آوریم

$$(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2) \frac{m_2 s^2 + bs + k_2}{bs + k_2} Y(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$



شکل ۳-۲۱ سیستم تعلیق.



شکل ۳- ۲۲

سیستم مکانیکی.

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1(b s + k_2)}{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2) b s + [k_1 m_2 + (m_1 + m_2) k_2] s^2 + k_1 b s + k_1 k_2}$$

الف ۳- ۳ برای سیستم شکل ۲۲- ۳ یک نمایش فضای حالت به دست آورید.

حل: معادلات سیستم عبارت است از

$$m_1 \ddot{y}_1 + b \dot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = u$$

متغیرهای خروجی این سیستم y_1 و y_2 هستند. متغیرهای حالت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = \dot{y}_1$$

$$x_3 = y_2$$

$$x_4 = \dot{y}_2$$

و معادلات زیر را به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1} [-b \dot{y}_1 - k(y_1 - y_2)] = -\frac{k}{m_1} x_1 - \frac{b}{m_1} x_2 + \frac{k}{m_1} x_3$$

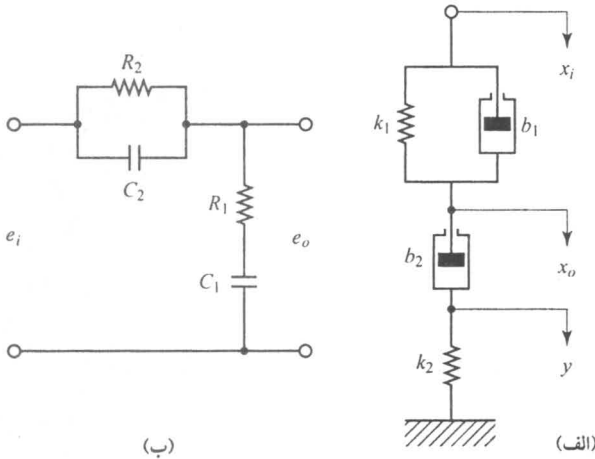
$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} [-k(y_2 - y_1) + u] = \frac{k}{m_2} x_1 - \frac{k}{m_2} x_3 + \frac{1}{m_2} u$$

پس معادلات حالت عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

و معادله خروجی به صورت زیر است



شکل ۳-۲۳

(الف) سیستم مکانیکی؛

(ب) سیستم الکتریکی متشابه.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

الف ۳-۴ تابع تبدیل $X_o(s)/X_i(s)$ سیستم مکانیکی شکل ۳-۲۳ (الف) را بیابید. همچنین تابع تبدیل سیستم الکترونیکی شکل ۳-۲۳ (ب) را بیابید. نشان دهید که تابع تبدیل دو سیستم شکل یکسانی دارند و بنابراین دو سیستم متشابه هستند.

حل: در شکل ۳-۲۳ (الف) فرض می کنیم جابه جایی های x_i ، x_o ، و y نسبت به موقعیت حالت ماندگارشان سنجیده می شوند. پس معادلات حرکت سیستم مکانیکی شکل ۳-۲۳ (الف) عبارت است از

$$b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) = b_2(\dot{x}_o - \dot{y})$$

$$b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_2 y$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این دو معادله، با فرض صفر بودن شرایط اولیه، به دست می آوریم

$$b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] = b_2[sX_o(s) - sY(s)]$$

$$b_2[sX_o(s) - sY(s)] = k_2 Y(s)$$

اگر از دو معادله بالا $Y(s)$ را حذف کنیم، نتیجه می گیریم

$$b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] = b_2 s X_o(s) - b_2 s \frac{b_2 s X_o(s)}{b_2 s + k_2}$$

یا

$$(b_1 s + k_1) X_i(s) = \left(b_1 s + k_1 + b_2 s - b_2 s \frac{b_2 s}{b_2 s + k_2} \right) X_o(s)$$

پس تابع تبدیل $X_o(s)/X_i(s)$ را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right) + \frac{b_2}{k_1}s}$$

برای سیستم الکتریکی شکل ۳-۲۳ (ب) تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R_1 + \frac{1}{C_1s}}{\frac{1}{(1/R_2) + C_2s} + R_1 + \frac{1}{C_1s}} \\ &= \frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1) + R_2C_1s}\end{aligned}$$

مقایسه دو تابع تبدیل نشان می‌دهد که سیستمهای داده شده در شکل‌های ۳-۲۳ (الف) و (ب) مشابه‌اند.

الف ۳-۵ توابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ شبکه‌های T پل‌دار نشان داده شده در شکل‌های ۳-۲۴ (الف) و (ب) را بیابید.

حل: هر دو شبکه T پل‌دار را می‌توان به صورت شبکه شکل ۳-۲۵ (الف) نشان داد. سپس این شبکه را می‌توان به صورت شبکه شکل ۳-۲۵ (ب) ساده کرد.

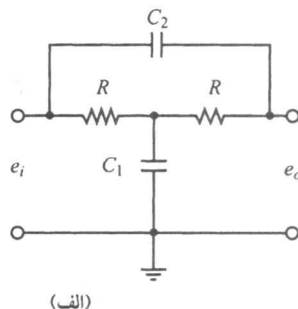
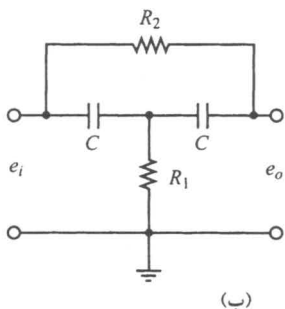
در شکل ۳-۲۵ (ب) داریم

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_2 Z_1 = (Z_3 + Z_4) I_3$$

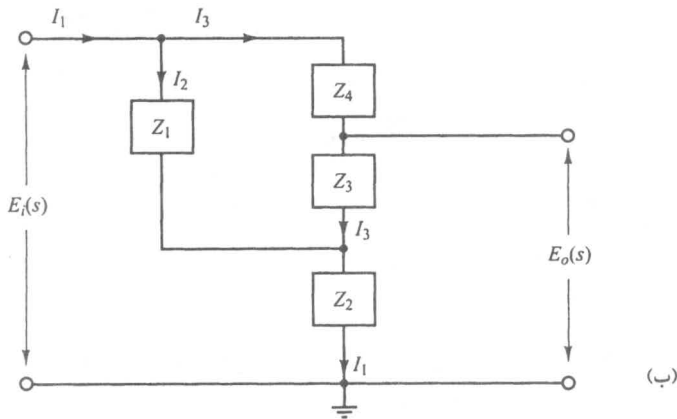
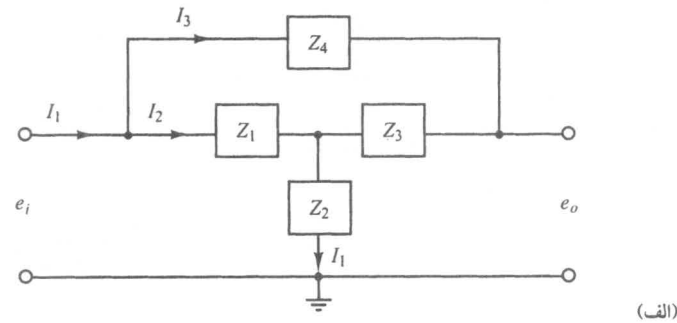
بنابراین

$$I_2 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1, \quad I_3 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1$$

اکنون می‌توانیم ولتاژهای $E_o(s)$ و $E_i(s)$ را به صورت زیر بیابیم:



شکل ۳-۲۴ شبکه‌های T پل‌دار.



شکل ۳-۲۵

(الف) شبکه T پل دار برحسب

امپدانسهای مختلط؛ (ب) شبکه معادل.

$$\begin{aligned}
 E_i(s) &= Z_1 I_1 + Z_2 I_1 \\
 &= \left[Z_2 + \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \right] I_1 \\
 &= \frac{Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_o(s) &= Z_3 I_1 + Z_4 I_1 \\
 &= \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 + Z_4 I_1 \\
 &= \frac{Z_3 Z_1 + Z_4(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1
 \end{aligned}$$

پس تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ شبکه شکل ۳-۲۵ (الف) به صورت زیر است

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_3 Z_1 + Z_4(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4} \quad (۳-۳۸)$$

برای شبکه T پل دار شکل ۳-۲۴ (الف)، در معادله (۳-۳۸) قرار می دهیم

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{C_1 s}, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$$

به این ترتیب تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R + \frac{1}{C_1 s} \left(R + R + \frac{1}{C_2 s} \right)}{\frac{1}{C_1 s} \left(R + R + \frac{1}{C_2 s} \right) + R + R \frac{1}{C_2 s}} \\ &= \frac{RC_1 RC_2 s^2 + 2RC_2 s + 1}{RC_1 RC_2 s^2 + (2RC_2 + RC_1)s + 1} \end{aligned}$$

به نحوی مشابه برای شبکه T پل‌دار شکل ۳-۲۴ (ب) در معادله (۳-۳۸) قرار می‌دهیم

$$Z_1 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_2 = R_1, \quad Z_3 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_4 = R_2$$

و تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ زیر را می‌یابیم

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{\frac{1}{Cs} \frac{1}{Cs} + R_1 \left(\frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R_2 \right)}{R_1 \left(\frac{1}{Cs} + \frac{1}{Cs} + R_2 \right) + \frac{1}{Cs} \frac{1}{Cs} + R_2 \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{R_1 C R_2 C s^2 + 2R_1 C s + 1}{R_1 C R_2 C s^2 + (2R_1 C + R_2 C)s + 1} \end{aligned}$$

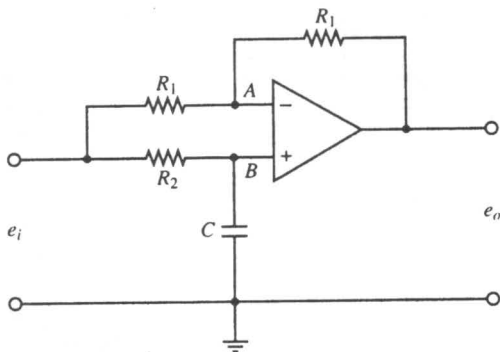
الف ۳-۶ تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار آپ‌امپی شکل ۳-۲۶ را بیابید.

حل: ولتاژ گره A عبارت است از

$$e_A = \frac{1}{2}(e_i - e_o) + e_o$$

شکل تبدیل لاپلاسی این معادله به صورت زیر است

$$E_A(s) = \frac{1}{2}[E_i(s) + E_o(s)]$$



شکل ۳-۲۶ مدار آپ‌امپی.

ولتاژ گره B عبارت است از

$$E_B(s) = \frac{(1/Cs)}{(1/Cs) + R_f} E_I(s) = \frac{1}{R_f Cs + 1} E_I(s)$$

چون $E_B(s) = E_A(s)$ ، باید داشته باشیم $K \gg 1$ و $[E_B(s) - E_A(s)] = K = E_o$

$$\frac{1}{f} [E_I(s) + E_o(s)] = \frac{1}{R_f Cs + 1} E_I(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_I(s)} = - \frac{R_f Cs - 1}{R_f Cs + 1} = - \frac{s - \frac{1}{R_f C}}{s + \frac{1}{R_f C}}$$

بنابراین

الف ۳-۷ تابع تبدیل $E_o(s)/E_I(s)$ سیستم آپامپی شکل ۳-۲۷ را برحسب امپدانسهای مختلط Z_1 ، Z_2 ، Z_3 و Z_4 را بیابید. با استفاده از نتایج به دست آمده تابع تبدیل $E_o(s)/E_I(s)$ سیستم آپامپی شکل ۳-۲۶ را بیابید.

حل: با توجه به شکل ۳-۲۷ داریم

$$\frac{E_I(s) - E_A(s)}{Z_f} = \frac{E_A(s) - E_o(s)}{Z_f}$$

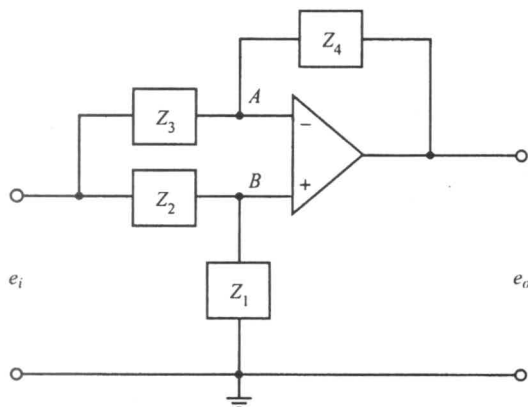
یا

$$E_I(s) - \left(1 + \frac{Z_f}{Z_f}\right) E_A(s) = -\frac{Z_f}{Z_f} E_o(s) \quad (3-39)$$

چون

$$E_A(s) = E_B(s) = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_f} E_I(s) \quad (3-40)$$

با گذاشتن معادله (۳-۴۰) در معادله (۳-۳۹) به دست می آوریم



شکل ۳-۲۷

مدار تقویت کننده عملیاتی.

$$\left[\frac{Z_F Z_1 + Z_F Z_F - Z_F Z_1 - Z_F Z_1}{Z_F (Z_1 + Z_F)} \right] E_i(s) = -\frac{Z_F}{Z_F} E_o(s)$$

که از آن می‌توانیم تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ را به صورت زیر بیابیم:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_F Z_F - Z_F Z_1}{Z_F (Z_1 + Z_F)} \quad (۳-۴۱)$$

برای یافتن تابع تبدیل مدار شکل ۳-۲۶ باید در معادله (۳-۴۱) قرار دهیم

$$Z_1 = \frac{1}{Cs}, \quad Z_F = R_F, \quad Z_3 = R_1, \quad Z_F = R_1$$

نتیجه عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_1 R_F - R_1 \frac{1}{Cs}}{R_1 \left(\frac{1}{Cs} + R_F \right)} = -\frac{R_F Cs - 1}{R_F Cs + 1}$$

که صد البته با نتیجه به دست آمده در مسئله الف-۳-۶ یکی است.

الف ۳-۸: تابع تبدیل مدار آپامپی شکل ۳-۲۸ را بیابید.

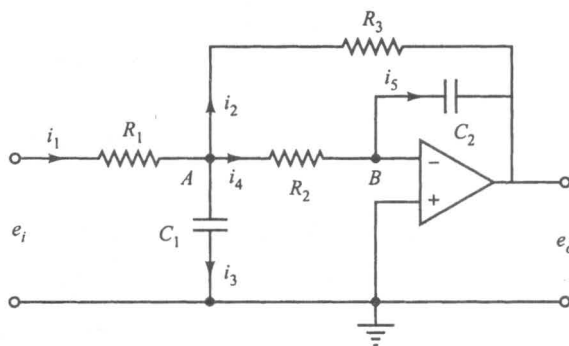
حل: ابتدا جریانهای i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 و i_o را می‌یابیم. سپس معادلات گره در گره‌های A و B را به کار می‌بریم.

$$i_1 = \frac{e_i - e_A}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e_A - e_o}{R_F}, \quad i_3 = \frac{de_A}{dt}$$

$$i_4 = \frac{e_A}{R_F}, \quad i_5 = C_F \frac{-de_o}{dt}$$

در گره A داریم $i_1 = i_2 + i_3 + i_4$ ، یا

$$\frac{e_i - e_A}{R_1} = \frac{e_A - e_o}{R_F} + C_F \frac{de_A}{dt} + \frac{e_A}{R_F} \quad (۳-۴۲)$$



شکل ۳-۲۸

مدار آپامپی.

در گره B داریم $i_4 = i_5$ ، یا

$$\frac{e_A}{R_r} = C_r \frac{-de_o}{dt} \quad (۴۳-۳)$$

از معادله (۴۲-۳) به دست می آوریم

$$C_1 \frac{de_A}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_r} \right) e_A = \frac{e_i}{R_1} + \frac{e_o}{R_r} \quad (۴۴-۳)$$

از معادله (۴۳-۳) به دست می آوریم

$$e_A = -R_r C_r \frac{de_o}{dt} \quad (۴۵-۳)$$

با گذاشتن معادله (۴۵-۳) در معادله (۴۴-۳) به دست می آوریم

$$C_1 \left(-R_r C_r \frac{d^2 e_o}{dt^2} \right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_r} \right) (-R_r C_r) \frac{de_o}{dt} = \frac{e_i}{R_1} + \frac{e_o}{R_r}$$

از این معادله با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می گیریم

$$-C_1 C_r R_r s^2 E_o(s) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_r} \right) (-R_r C_r) s E_o(s) - \frac{1}{R_r} E_o(s) = \frac{E_i(s)}{R_1}$$

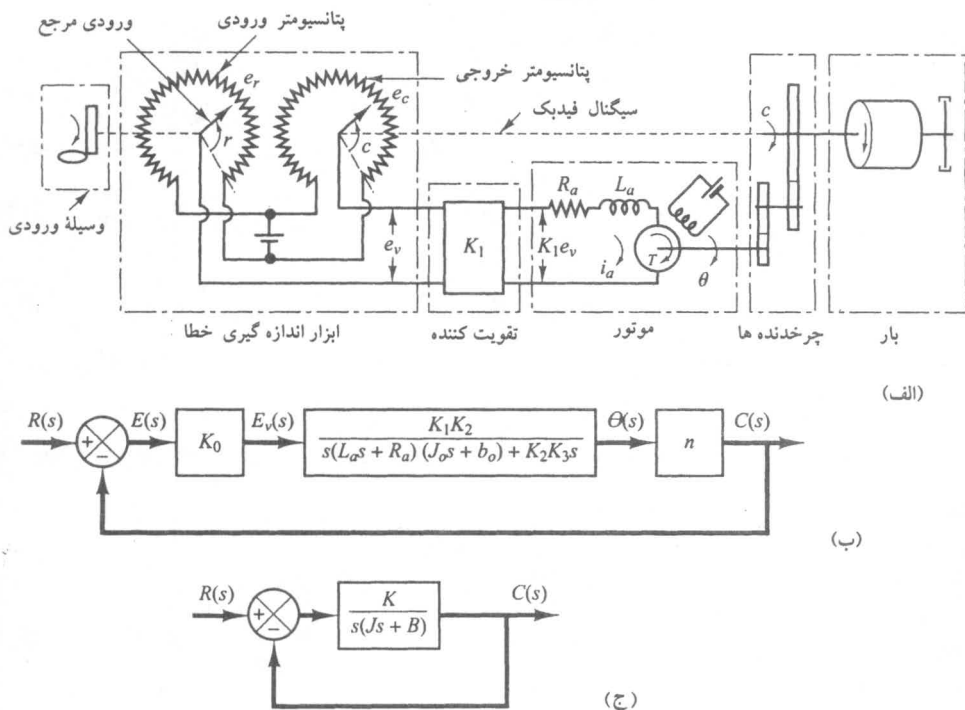
که تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ را به صورت زیر به دست می دهد

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{1}{R_1 C_1 R_r C_r s^2 + [R_r C_r + R_1 C_r + (R_1/R_r) R_r C_r] s + (R_1/R_r)}$$

الف ۳-۹ سیستم سرووی نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ (الف) را در نظر بگیرید. موتور نشان داده شده یک سرووموتور است، یک موتور dc که مخصوص سیستمهای کنترلی طراحی شده است. طرز کار سیستم به این ترتیب است: دو پتانسیومتر به صورت ابزارهای اندازه گیری خطا عمل می کنند. اینها محلهای ورودی و خروجی را به سیگنالهای الکتریکی متناسب تبدیل می کنند. سیگنال فرمان ورودی موقعیت زاویه ای r جازوی پتانسیومتر ورودی را تعیین می کند. موقعیت زاویه ای r ورودی مرجع سیستم است و پتانسیل الکتریکی روی جارو با موقعیت زاویه ای آن متناسب است. موقعیت محور خروجی، موقعیت زاویه ای c جازوی پتانسیومتر خروجی را تعیین می کند. تفاضل بین موقعیت زاویه ای ورودی r و موقعیت زاویه ای خروجی c سیگنال خطای e است، یعنی

$$e = r - c$$

اختلاف پتانسیل $e_r - e_c = e_v$ ولتاژ خطا است. در این رابطه e_r با r و e_c با c متناسب است؛ یعنی $e_r = K_r r$ و $e_c = K_c c$ ، که در آنها K ثابت تناسب است. ولتاژ خطای ایجاد شده در پایانه های پتانسیومترها توسط تقویت کننده ای با بهره K_1 تقویت می شود. ولتاژ خروجی این تقویت کننده به مدار آرمیچر موتور dc اعمال می شود. ولتاژ ثابتی به پیچک میدان اعمال شده است. اگر خطایی وجود داشته باشد،



شکل ۳-۲۹ (الف) نمودار شماتیک سیستم سروو؛ (ب) نمودار بلوکی سیستم؛ (ج) نمودار بلوکی ساده شده.

موتور گشتاوری برای چرخاندن بار، در جهت کاهش خطا به صفر ایجاد می‌کند. گشتاور موتور به ازای جریان ثابت عبارت است از

$$T = K_T i_a$$

که در آن K_T ثابت گشتاور موتور و i_a جریان آرمیچر است.

با چرخش آرمیچر ولتاژی متناسب با حاصلضرب شار و سرعت زاویه‌ای در آرمیچر القا می‌شود. به ازای شار ثابت ولتاژ e_b القا شده با سرعت زاویه‌ای $d\theta/dt$ تناسب مستقیم دارد، یعنی

$$e_b = K_V \frac{d\theta}{dt}$$

که در آن e_b نیروی محرکه القایی emf معکوس، K_V ثابت emf موتور، و θ جابجایی زاویه‌ای موتور است.

تابع تبدیل بین جابجایی زاویه‌ای محور موتور θ و ولتاژ خطای e_v را بیابید. همچنین یک نمودار بلوکی برای سیستم رسم کنید و آن را به ازای L_a ناچیز ساده کنید.

حل: سرعت سروو موتور dc کنترل شده با جریان آرمیچر توسط ولتاژ آرمیچر e_a کنترل می‌شود. (ولتاژ

آرمیچر $e_a = K_1 e_v$ خروجی تقویت کننده است.) معادله دیفرانسیل مدار آرمیچر عبارت است از

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

یا

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_r \frac{d\theta}{dt} = K_v e_v \quad (۴۶-۳)$$

معادله موازنه گشتاورها عبارت است از

$$J_o \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_o \frac{d\theta}{dt} = T = K_r i_a \quad (۴۷-۳)$$

که در آن J_o لختی کل موتور، بار، و جعبه دنده است که به محور منتقل شده باشد، و b_o ضریب چسبندگی کل موتور، بار، و جعبه دنده است که آن هم به محور منتقل شده باشد.

تابع تبدیل بین جابه جایی محور موتور و ولتاژ خطا با حذف i_a از معادلات بالا به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_v K_r}{s(L_a s + R_a)(J_o s + b_o) + K_r K_r s} \quad (۴۸-۳)$$

فرض می کنیم نسبت تبدیل دور در جعبه دنده به نحوی است که با چرخش یک دور موتور، محور خروجی n دور می چرخد. یعنی

$$C(s) = n\Theta(s) \quad (۴۹-۳)$$

رابطه بین $E_v(s)$ ، $R(s)$ ، و $C(s)$ عبارت است از

$$E_v(s) = K_o [R(s) - C(s)] = K_o E(s) \quad (۵۰-۳)$$

نمودار بلوکی این سیستم را می توان با توجه به معادلات (۴۸-۳)، (۴۹-۳)، و (۵۰-۳) به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ (ب) رسم کرد. تابع تبدیل در مسیر پیشخورد این سیستم عبارت است از

$$G(s) = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_o K_v K_r n}{s[(L_a s + R_a)(J_o s + b_o) + K_r K_r]}$$

اگر L_a کوچک باشد می توان آن را نادیده گرفت و تابع تبدیل مسیر پیشخورد را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_o K_v K_r n}{s[R_a (J_o s + b_o) + K_r K_r]} \\ &= \frac{K_o K_v K_r n / R_a}{J_o s^2 + [b_o + (K_r K_r / R_a)]s} \end{aligned} \quad (۵۱-۳)$$

جمله $[b_o + (K_r K_r / R_a)]s$ نشان می دهد که emf معکوس معادل افزایش اصطکاک چسبندگی موثر سیستم است. لختی J_o و ضریب اصطکاک چسبندگی $b_o + (K_r K_r / R_a)$ در محور موتور محاسبه شده اند. اگر J_o و $b_o + (K_r K_r / R_a)$ در $1/n^2$ ضرب شوند، لختی و ضریب اصطکاک چسبندگی در محور خروجی به دست

می‌آید. پارامترهای جدید زیر را معرفی می‌کنیم

$$J = J_0 / n^2 = \text{لختی دورانی در محور خروجی}$$

$$B = [b_0 + (K_f K_r / R_a)] / n^2 = \text{ضریب اصطکاک چسبندگی در محور خروجی}$$

$$K = K_0 K_1 K_r / n R_a$$

به این ترتیب می‌توانیم تابع تبدیل $G(s)$ معادله (۳-۵۱) را به شکل زیر ساده کنیم

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

یا

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

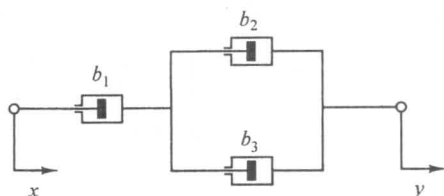
که در آن

$$T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_f K_r}, \quad K_m = \frac{K}{B}$$

پس نمودار بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۲۹ (ب) را می‌توان به صورت نمودار بلوکی شکل ۳-۲۹ (ج) ساده کرد.

مسائل

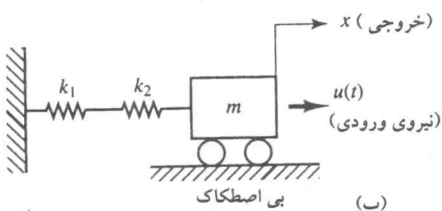
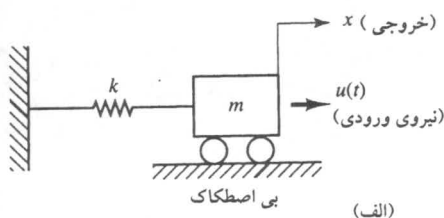
ب ۳-۱ ضریب اصطکاک چسبندگی معادل سیستم شکل ۳-۳۰ را بیابید.



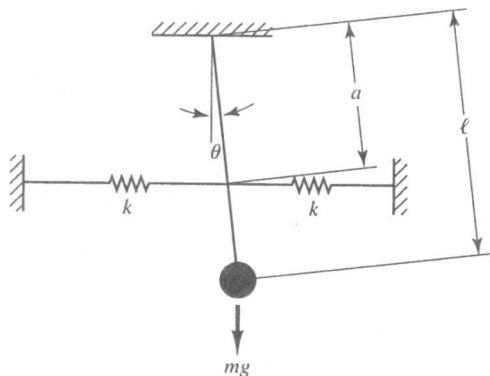
شکل ۳-۳۰ سیستم میراساز.

ب ۳-۲ مدل ریاضی سیستمهای مکانیکی شکلهای ۳-۳۱ (الف) و (ب) را بیابید.

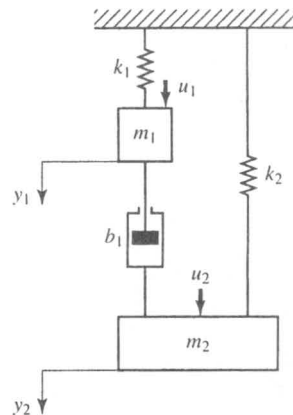
ب ۳-۳ نمایش فضای حالت سیستم مکانیکی شکل ۳-۳۲ را بیابید. u_1 و u_2 ورودیهای سیستم، و y_1 و y_2 خروجیهای آن هستند.



شکل ۳-۳۱ سیستمهای مکانیکی.



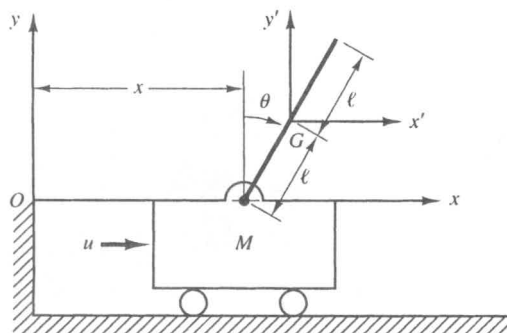
شکل ۳-۳۳ سیستم آونگ فنر دار.



شکل ۳-۳۲ سیستم مکانیکی.

سیستم را به صورت معادله دیفرانسیل، تابع تبدیل، و نمایش فضای حالت بیابید.

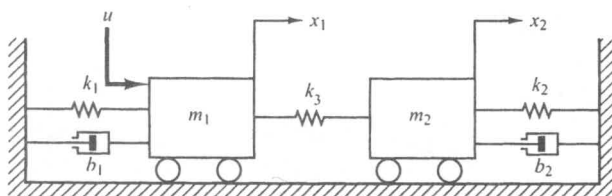
ب ۳-۶ برای سیستم مکانیکی شکل ۳-۳۵ توابع تبدیل $X_1(s)/U(s)$ و $X_2(s)/U(s)$ را بیابید.



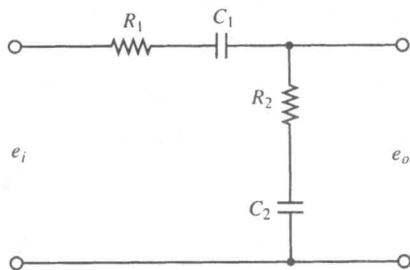
شکل ۳-۳۴ سیستم آونگ وارون.

ب ۳-۴ سیستم آونگ فنر دار شکل ۳-۳۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید نیروی فنرها در حالت قائم بودن آونگ یا $\theta = 0$ صفر است. همچنین فرض کنید اصطکاک ناچیز و زاویه نوسان θ کوچک است. مدل ریاضی این سیستم را بیابید.

ب ۳-۵ با توجه به مثالهای ۳-۵ و ۳-۶ سیستم آونگ وارون شکل ۳-۳۴ را در نظر بگیرید. جرم آونگ وارون m و به طور یکنواخت در تمام طول آونگ توزیع شده است (مرکز گرانش آونگ وسط میله آن است). با فرض کوچک بودن θ مدل ریاضی

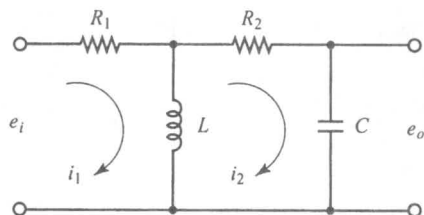


شکل ۳-۳۵ سیستم مکانیکی.



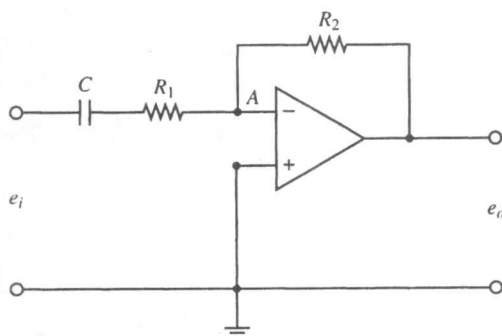
شکل ۳-۳۸ مدار الکتریکی.

ب ۷-۳ تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار الکتریکی شکل ۳-۳۶ را بیابید.



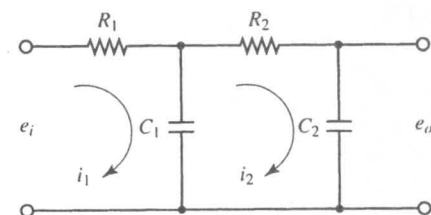
شکل ۳-۳۶ مدار الکتریکی.

ب ۱۰-۳ تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار آپامپی شکل ۳-۳۹ را بیابید.



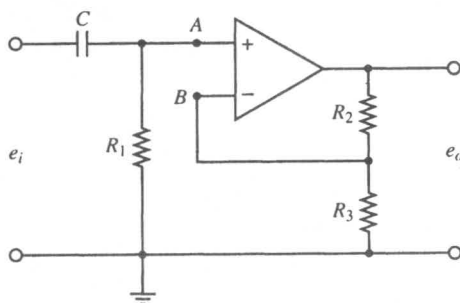
شکل ۳-۳۹ مدار آپامپی.

ب ۸-۳ تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار الکتریکی شکل ۳-۳۷ را با استفاده از رهیافت نمودار بلوکی بیابید.



شکل ۳-۳۷ مدار الکتریکی.

ب ۱۱-۳ تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار آپامپی شکل ۳-۴۰ را بیابید.



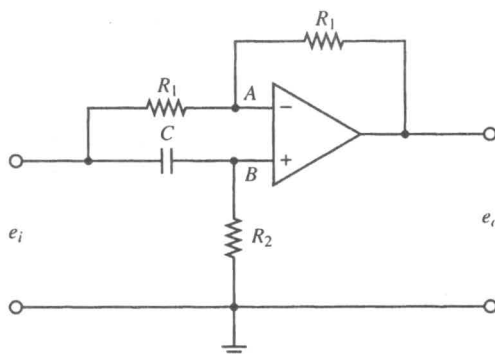
شکل ۳-۴۰ مدار آپامپی.

ب ۹-۳ تابع تبدیل سیستم الکتریکی شکل ۳-۳۸ را بیابید. نمودار طرح گونه یک سیستم مکانیکی معادل را رسم کنید.

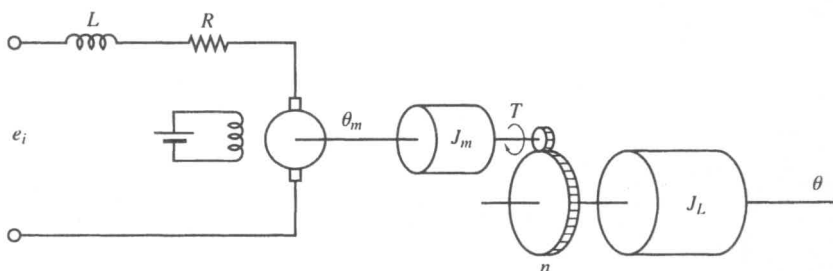
ب ۱۲-۳ تابع تبدیل $E_o(s)/E_i(s)$ مدار آپامپی شکل ۴۱-۳ را با استفاده از رهیافت امپدانس بیابید.

ب ۱۳-۳ سیستم مکانیکی شکل ۴۲-۳ را در نظر بگیرید. یک سروو موتور dc کنترل شده با آرمیچر باری متشکل از لغختی دورانی J_L را حرکت می‌دهد.

گشتاوری که موتور تولید می‌کند T است. لغختی دورانی موتور J_m است. جابه‌جایی دورانی موتور و بار به ترتیب θ_m و θ است. نسبت چرخنده $n = \theta/\theta_m$ است. تابع تبدیل $\Theta(s)/E_i(s)$ را بیابید.



شکل ۴۱-۳ مدار آپامپی.



شکل ۴۲-۳ سیستم سروو موتور dc کنترل شده با آرمیچر.