

# مدلسازی ریاضی سیستمهای دینامیکی

## ۱-۲ مقدمه

هنگام مطالعه سیستمهای کنترل خواننده باید بتواند سیستمهای دینامیکی را مدل کرده، مشخصات دینامیکی شان را تحلیل کند. مدل ریاضی سیستم دینامیکی طبق تعریف یک مجموعه معادله است که رفتار دینامیکی سیستم را دقیقاً، یا حداقل به خوبی، نمایش می‌دهد. توجه کنید که مدل ریاضی برای یک سیستم معین یکتا نیست. یک سیستم را می‌توان به صورتهای متفاوتی نمایش داد، بنابراین بسته به دیدگاه شخص مدل‌های ریاضی متفاوتی برای یک سیستم وجود دارد.

رفتار دینامیکی بسیاری از سیستمها را، اعم از سیستمهای مکانیکی، الکترونیکی، حرارتی، اقتصادی، زیست‌شناسی و غیره، می‌توان برحسب معادلات دیفرانسیل توصیف کرد. این معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم، مثلاً قوانین نیوتن برای سیستمهای مکانیکی و قوانین کیرشهف برای سیستمهای الکتریکی به دست آورد. همیشه به خاطر خواهیم داشت که یافتن یک مدل ریاضی مناسب مهمترین بخش تحلیل سیستم کنترل است.

در این کتاب فرض می‌کنیم اصل علیت بر سیستمهای مورد نظر حاکم است، یعنی خروجی فعلی سیستم (مثلاً در  $t = 0$ ) به ورودی‌های گذشته سیستم (در  $t < 0$ ) بستگی دارد، ولی به ورودی‌های بعدی سیستم (در  $t > 0$ ) بستگی ندارد.

**مدلهای ریاضی.** مدل‌های ریاضی شکلهای متفاوتی دارند. این که برای یک سیستم چه مدلی مناسب است به خود سیستم و وضعیتهای جنبی بستگی دارد. مثلاً در مسائل مربوط به کنترل بهینه، استفاده از نمایش فضای

حالت مفیدتر است. ولی برای تحلیل پاسخ گذرا یا پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی مستقل از زمان یک ورودی - یک خروجی، نمایش تابع تبدیل می تواند مناسب ترین راه باشد. پس از تعیین یک مدل ریاضی برای سیستم، می توان ابزارهای تحلیلی و کامپیوتری مختلفی را برای مقاصد تحلیل و طراحی به کار برد.

**سادگی در برابر دقت.** در یافتن مدل ریاضی باید مصالحه ای بین سادگی مدل و دقت نتایج تحلیل صورت دهیم. در یافتن مدل ریاضی دارای سادگی معقول، غالباً لازم است بعضی ویژگی های ذاتی فیزیکی سیستم ندیده گرفته شود. به طور خاص وقتی به دنبال یک مدل ریاضی خطی با عناصر فشرده هستیم (یعنی مدلی که تنها شامل معادلات دیفرانسیل معمولی باشد) باید از بعضی ویژگی های غیرخطی و پارامترهای توزیع شده موجود در سیستم (یعنی پارامترهایی که به معادلات دیفرانسیل پاره ای منجر می شوند) چشم پوشیم. اگر اثر این ویژگی های ندیده گرفته شده بر پاسخ کم باشد، بین نتایج حاصل از تحلیل مدل ریاضی و نتایجی که از بررسی تجربی سیستم فیزیکی به دست می آید، توافق خوبی برقرار است.

در حالت کلی هنگام حل یک مسئله جدید بهتر است ابتدا مدل ساده شده ای به کار ببریم تا یک حس کلی نسبت به حل پیدا کنیم. سپس می توانیم برای تحلیل کاملتر مدل ریاضی کاملتری به کار ببریم. باید نسبت به این نکته کاملاً آگاه باشیم که یک مدل خطی با عناصر فشرده، که در فرکانس پایین معتبر است، می تواند در فرکانسهای به حد کافی بزرگ معتبر نباشد، زیرا در این فرکانسها ویژگی های چشم پوشی شده عناصر توزیع شده، عامل مهمی در رفتار دینامیکی سیستم هستند. مثلاً در فرکانس پایین ممکن است بتوان جرم فنر را ندیده گرفت، ولی در فرکانسهای بالا این جرم به خاصیت مهمی تبدیل می شود. (در مواردی که مدل ریاضی خطاهای فاحشی دارد باید نظریه کنترل مقاوم را به کار برد. نظریه کنترل مقاوم در فصل ۱۰ معرفی شده است.)

**سیستمهای خطی.** سیستمی خطی است که اصل برهم نهی در موردش صادق باشد. اصل برهم نهی می گوید پاسخ ناشی از اعمال همزمان دو تابع تحریک با مجموع پاسخ به تک تک آن تحریکها برابر است. پس برای سیستمهای خطی پاسخ به چند ورودی را می توان با در نظر گرفتن ورودیها به طور جدا از هم و جمع پاسخهای حاصل از آنها به دست آورد. این اصل ساختن حلهای پیچیده معادله دیفرانسیل خطی از حلهای ساده تر را ممکن می کند.

در بررسی تجربی یک سیستم دینامیکی، اگر علت و معلول متناسب باشند، اصل برهم نهی صادق است و می توان سیستم را خطی فرض کرد.

**سیستمهای خطی مستقل از زمان و سیستمهای خطی متغیر با زمان.** یک معادله دیفرانسیل خطی است، اگر ضرایب ثابت یا تنها تابعی از متغیر مستقل باشند. هر سیستم دینامیکی متشکل از عناصر فشرده خطی مستقل از زمان را می توان با معادلات دیفرانسیل خطی مستقل از زمان (یعنی دارای ضرایب ثابت) توصیف کرد. چنین سیستمی را **سیستم خطی مستقل از زمان** (یا **خطی با ضرایب ثابت**) می نامند. سیستمهایی که معادلات دیفرانسیل توصیف کننده شان ضرایب تابع زمان دارند، سیستمهای **خطی متغیر با زمان** نامیده می شوند. سیستم کنترل هواپیما نمونه ای از سیستمهای کنترل متغیر با زمان است. (جرم هواپیما به خاطر مصرف سوخت تغییر می کند.)

**نمای کلی فصل.** بخش ۱-۲ مقدمه‌ای راجع به مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های دینامیکی است. در بخش ۲-۲ تابع تبدیل و پاسخ ضربه معرفی می‌شود. بخش ۳-۲ به معرفی سیستم‌های خودکار و بخش ۴-۲ به مفاهیم مدل‌سازی در فضای حالت اختصاص دارد. در بخش ۵-۲ راجع به نمایش فضای حالت سیستم‌های دینامیکی صحبت می‌شود. بخش ۶-۲ به تبدیل مدل‌های ریاضی با استفاده از MATLAB اختصاص دارد. در بخش ۷-۲ خطی‌سازی مدل‌های ریاضی غیرخطی در نظر گرفته خواهد شد.

## ۲-۲ تابع تبدیل و پاسخ ضربه

در نظریه کنترل برای مشخص کردن روابط ورودی - خروجی عناصر یا سیستم‌های توصیف‌پذیر با معادل دیفرانسیل خطی مستقل از زمان، توابعی موسوم به توابع تبدیل به کار می‌روند. از تعریف تابع تبدیل شروع کرده، تابع تبدیل یک سیستم مکانیکی را به دست می‌آوریم. سپس در مورد تابع پاسخ ضربه صحبت می‌کنیم.

**تابع تبدیل.** تابع تبدیل یک معادله دیفرانسیل خطی مستقل از زمان، طبق تعریف نسبت تبدیل لاپلاس خروجی (تابع پاسخ) به تبدیل لاپلاس ورودی (تابع تحریک) است، به شرطی که تمام شرایط اولیه صفر باشد. سیستم خطی مستقل از زمان توصیف شده یا معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} \dot{x} + \dots + b_1 \dot{x} + b_0 x \quad (n \geq m)$$

که در آن  $y$  خروجی سیستم و  $x$  ورودی آن است. تابع تبدیل این سیستم، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی، هنگام صفر بودن شرایط اولیه است: یا

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل} = G(s) &= \frac{\mathcal{L}[\text{خروجی}]}{\mathcal{L}[\text{ورودی}]} \bigg|_{\text{شرایط اولیه صفر}} \\ &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

با استفاده از مفهوم تابع تبدیل می‌توان رفتار دینامیکی سیستم را با معادلات جبری برحسب  $s$  توصیف کرد. اگر بالاترین توان  $s$  مخرج تابع تبدیل  $n$  باشد، سیستم را سیستم مرتبه  $n$  می‌نامند.

**توضیحاتی راجع به تابع تبدیل.** مفهوم تابع تبدیل تنها به سیستم‌های معادله دیفرانسیل خطی مستقل از زمان قابل اعمال است. رهیافت تابع تبدیل در تحلیل و طراحی چنین سیستم‌های بسیار به کار می‌رود. در ادامه توضیحات مهم مربوط به تابع تبدیل عنوان شده است. (در این توضیحات منظور از سیستم، سیستمی است که با یک معادله دیفرانسیل خطی مستقل از زمان توصیف می‌شود.)

۱. تابع تبدیل یک مدل ریاضی است، از این لحاظ که یک روش عملگری برای بیان معادله دیفرانسیلی است که متغیر خروجی را به متغیر ورودی مرتبط می‌کند.

۲. تابع تبدیل مشخصه‌ای از خود سیستم، مستقل از اندازه و طبیعت ورودی یا تابع تحریک، است.

۳. تابع تبدیل واحدهای لازم برای مرتبط کردن ورودی و خروجی را دربر دارد؛ ولی هیچ اطلاعی راجع

به ساختار فیزیکی سیستم به دست نمی‌دهد. (توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی متفاوت و متعددی می‌تواند یکسان باشد).

۴. اگر تابع تبدیل یک سیستم معلوم باشد، می‌توان خروجی یا پاسخ به شکل‌های مختلف ورودی را بررسی کرد و در این کار به فهم طبیعت سیستم نظر داشت.

۵. تابع تبدیل یک سیستم را می‌توان به طور تجربی، با اعمال ورودی‌های معلوم و مطالعه خروجی سیستم تعیین کرد. تابع تبدیل توصیف کاملی از مشخصات دینامیکی سیستم را در بر دارد، ولی چنانچه گفتیم توصیف فیزیکی سیستم از آن بر نمی‌آید.

**انتگرال کانولوشن.** تابع تبدیل یک سیستم خطی مستقل از زمان به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

که در آن  $Y(s)$  تبدیل لاپلاس خروجی و  $X(s)$  تبدیل لاپلاس ورودی است، و تمام شرایط اولیه صفر فرض شده است. بنابراین خروجی  $Y(s)$  را می‌توان به صورت حاصلضرب  $G(s)$  و  $X(s)$  نوشت

$$Y(s) = G(s) X(s) \quad (1-2)$$

توجه کنید که ضرب در حوزه مختلط با کانولوشن در حوزه زمان هم ارزست (پیوست الف را ببینید). بنابراین عکس تبدیل لاپلاس معادله (۱-۲) انتگرال کانولوشن زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) dt \\ &= \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) dt \end{aligned}$$

که در آن به ازای  $t < 0$  و  $g(t) = 0$  و  $x(t) = 0$ .

**تابع پاسخ ضربه.** خروجی (پاسخ) یک سیستم خطی مستقل از زمان به یک ورودی ضربه واحد، هنگام صفر بودن شرایط اولیه را در نظر بگیرید. چون تبدیل لاپلاس تابع ضربه واحد یک است، تبدیل لاپلاس خروجی سیستم عبارت است از

$$Y(s) = G(s) \quad (2-2)$$

عکس تبدیل لاپلاس خروجی داده شده توسط معادله (۲-۲) پاسخ ضربه سیستم است. عکس تبدیل لاپلاس  $G(s)$ ، یعنی

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

پاسخ ضربه سیستم نامیده می‌شود. تابع  $g(t)$  را تابع وزندهی سیستم نیز می‌خوانند.

پس تابع پاسخ ضربه  $g(t)$ ، پاسخ یک سیستم خطی به ورودی ضربه واحد، هنگام صفر بودن شرایط اولیه است. تبدیل لاپلاس این تابع، تابع تبدیل سیستم است. پس تابع تبدیل و تابع پاسخ ضربه یک سیستم خطی مستقل از زمان اطلاعات یکسانی از رفتار دینامیکی سیستم در بر دارند. بنابراین می‌توان با تحریک سیستم با

یک ورودی ضربه‌ای و یافتن پاسخ، اطلاعات کامل مربوط به مشخصات دینامیکی را به دست آورد. (در عمل می‌توان پالسی با عمر کوتاه در مقایسه با ثابت زمانی‌های مهم سیستم، را ضربه در نظر گرفت).

## ۳-۲ سیستمهای کنترل خودکار

هر سیستم کنترل می‌تواند از چند جزء تشکیل شده باشد. در مهندسی کنترل برای نشان دادن عملی که هر یک از اجزاء انجام می‌دهد از نموداری موسوم به **نمودار بلوکی** استفاده می‌کنیم. در این بخش توضیح می‌دهیم که نمودار بلوکی چیست، روشی برای یافتن نمودار بلوکی یک سیستم فیزیکی معرفی می‌کنیم، و سرانجام روشهای ساده کردن نمودارهای بلوکی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

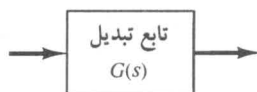
**نمودار بلوکی.** نمودار بلوکی یک سیستم نمایشی ترسیمی است که کاری را که هر عنصر انجام می‌دهد و چگونگی انتقال سیگنالها را نشان می‌دهد. این نمودار ارتباطهای موجود بین اجزاء را نیز نشان می‌دهد. نمودار بلوکی برخلاف نمایش ریاضی محض، این مزیت را دارد که عبور سیگنال در سیستم واقعی را خیلی محسوس‌تر نشان می‌دهد.

در نمودار بلوکی تمام متغیرهای سیستم از طریق بلوکهای کارکردی به هم مرتبط می‌شود. بلوک کارکردی که آن را بلوک تنها نیز می‌نامیم، چیزی جز یک نماد برای نشان دادن عمل ریاضی انجام شده بر روی ورودی بلوک، برای ایجاد خروجی بلوک نیست. تابع تبدیل عناصر معمولاً در بلوک قید می‌شوند، بلوکها با پیکانهایی که جهت عبور سیگنال را نشان می‌دهند به هم وصل می‌شوند. توجه کنید که سیگنال تنها در جهت پیکانها می‌تواند عبور کند. بنابراین نمودار بلوکی یک سیستم کنترل صراحتاً ویژگی یکطرفه بودن را نشان می‌دهد.

شکل ۱-۲ یک جزء نمودار بلوکی را نشان می‌دهد. پیکانی که به بلوک وارد می‌شود ورودی، و پیکانی که از آن خارج می‌شود خروجی را نشان می‌دهد. این پیکانها را **سیگنال** در نظر می‌گیریم.

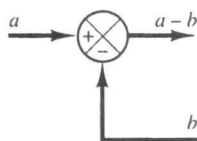
توجه کنید که بُعد سیگنال خروجی بلوک، حاصلضرب بُعد سیگنال ورودی در بعد تابع تبدیل بلوک است. مزیت نمایش نمودار بلوکی سیستمها در این است که تشکیل نمودار بلوکی کل، با اتصال بلوکها براساس جهت عبور سیگنال کار ساده‌ای است و همچنین می‌توان اثر هر عنصر در عملکرد کلی سیستم را بررسی کرد. در حالت کلی عمل کارکردی سیستم با بررسی نمودار بلوکی، ساده‌تر از بررسی خود سیستم فیزیکی به ذهن متبادر می‌شود. نمودار بلوکی اطلاعات راجع به رفتار دینامیکی سیستم را دربر دارد، ولی در مورد ساختار فیزیکی سیستم چیزی نمی‌گوید. به همین دلیل بسیاری از سیستمهای نامشابه و نامرتبط را می‌توان با یک نمودار بلوکی نمایش داد.

باید تذکر دهیم که نمودار بلوکی منبع اصلی انرژی را صراحتاً نشان نمی‌دهد و برای یک سیستم نمودار



شکل ۱-۲

یک جزء نمودار بلوکی.



شکل ۲-۲ نقطه جمع.

بلوکی یکتایی وجود ندارد. برای یک سیستم، بسته به دیدی که نسبت به تحلیل مورد نظر داریم، می‌توانیم نمودارهای بلوکی متفاوتی رسم کنیم.

**نقطه جمع.** دایره‌ای با علامت ضرب در داخل آن، شکل ۲-۲، نمادی است که عمل جمع را نشان می‌دهد. علامت جمع یا منهایی که نزدیک هر پیکان وجود دارد، مشخص می‌کند که سیگنال باید جمع یا تفریق شود. مهم این است که سیگنال‌هایی که با هم جمع یا از هم کم می‌شوند دارای بعد یکسانی و واحد یکسانی باشند.

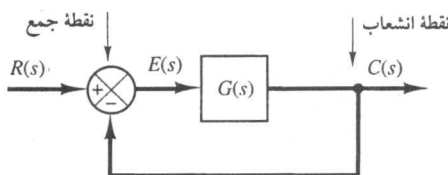
**نقطه انشعاب.** نقطه انشعاب نقطه‌ای است که از آن سیگنال یک بلوک به بلوکها یا نقاط دیگر می‌رود.

**نمودار بلوکی یک سیستم حلقه بسته.** شکل ۲-۳ نمونه‌ای از نمودارهای بلوکی سیستم‌های حلقه بسته را نشان می‌دهد. خروجی  $C(s)$  به نقطه جمع فیدبک، و در آنجا با ورودی مرجع  $R(s)$  مقایسه می‌شود. حلقه بسته بودن سیستم به وضوح در شکل آشکار است. خروجی سیستم، در اینجا  $C(s)$ ، با ضرب تابع تبدیل بلوک  $G(s)$  در ورودی بلوک،  $E(s)$  به دست می‌آید. هر سیستم کنترل خطی را می‌توان با یک نمودار بلوکی متشکل از بلوکها، نقاط جمع و نقاط انشعاب نشان داد.

وقتی خروجی برای مقایسه با ورودی به نقطه جمع فیدبک می‌شود، باید شکل آن نیز به شکل سیگنال ورودی درآید. مثلاً در یک سیستم کنترل دما خروجی سیستم معمولاً دمای تحت کنترل است. سیگنال خروجی، که دارای بعد دماست باید به نیرو یا وضعیت یا ولتاژ تبدیل شود، تا بتوان آن را با سیگنال ورودی مقایسه کرد. این تبدیل توسط عنصر فیدبک، که مطابق شکل ۲-۴ تابع تبدیلی برابر  $H(s)$  دارد، انجام می‌شود. نقش عنصر فیدبک، تصحیح خروجی قبل از مقایسه با ورودی است. (در اکثر موارد عنصر فیدبک یک حس کننده است که خروجی سیستم را اندازه می‌گیرد. خروجی حس کننده با ورودی مقایسه شده، سیگنال خطای عملگر ایجاد می‌شود.) در این مثال سیگنال فیدبک شده به نقطه جمع برای مقایسه با ورودی  $B(s) = H(s) C(s)$  است.

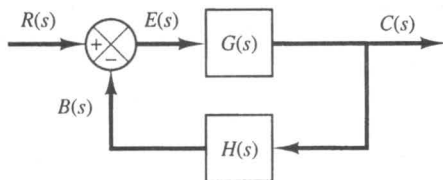
**تابع تبدیل حلقه باز و تابع تبدیل پیش‌خور.** در شکل ۲-۴ نسبت سیگنال فیدبک شده  $B(s)$  به سیگنال خطای کارانداز  $E(s)$  **تابع تبدیل حلقه باز** خوانده می‌شود. یعنی

$$\text{تابع تبدیل حلقه باز} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$



شکل ۲-۳

نمودار بلوکی یک سیستم حلقه بسته.



شکل ۲-۴

نمودار بلوکی یک سیستم حلقه بسته.

نسبت خروجی  $C(s)$  به سیگنال خطای کارانداز  $E(s)$  **تابع تبدیل پیشخورد** نامیده می شود، یعنی

$$\text{تابع تبدیل پیشخورد} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

اگر تابع تبدیل فیدبک  $H(s)$  برابر یک باشد، تابع تبدیل حلقه باز و تابع تبدیل پیشخورد یکسان می شوند.

**تابع تبدیل حلقه بسته.** برای سیستم شکل ۲-۴ خروجی  $C(s)$  و ورودی  $R(s)$  به صورت زیر به هم مربوط اند

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) \\ &= R(s) - H(s)C(s) \end{aligned}$$

با حذف  $E(s)$  از دو معادله بالا به دست می آوریم

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

یا

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (۳-۲)$$

تابع تبدیلی که  $C(s)$  و  $R(s)$  را به هم مرتبط می کند، تابع تبدیل حلقه بسته نام دارد. این تابع تبدیل رفتار دینامیکی سیستم حلقه بسته را براساس رفتار دینامیکی عنصر پیشخورد و عنصر فیدبک بیان می کند.

$C(s)$  با توجه به معادله (۳-۲) عبارت است از

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

پس خروجی سیستم حلقه بسته هم به تابع تبدیل حلقه بسته و هم به طبیعت ورودی بستگی دارد.

**یافتن تابع تبدیل متوالی، موازی و فیدبک (حلقه بسته) با MATLAB.** در تحلیل سیستمهای کنترل غالباً

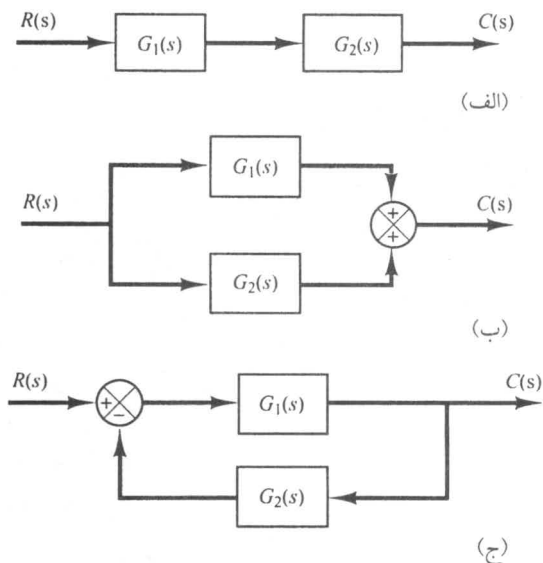
لازم می شود که تابع تبدیل اتصالهای متوالی، موازی و فیدبک دار (حلقه بسته) را حساب کنیم. MATLAB

دستورهای مناسبی برای محاسبه توابع تبدیل متوالی شده، موازی شده، و فیدبک دار (حلقه بسته) دارد.

فرض کنید دو جزء با توابع تبدیل  $G_1(s)$ ،  $G_2(s)$  به صورتهای متفاوت نشان داده شده در شکل ۲-۵ به

هم متصل اند و

$$G_1(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}} \quad G_2(s) = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$



شکل ۲-۵

(الف) سیستم متوالی؛ (ب) سیستم موازی؛

(ج) سیستم فیدبک دار (حلقه بسته).

برای به دست آوردن تابع تبدیل سیستم‌های متوالی شده، موازی شده، یا فیدبک دار (حلقه بسته) می‌توان دستورهایی زیر را به کار برد

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{series}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2})$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{parallel}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2})$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{feedback}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2})$$

مثلاً حالت زیر را در نظر بگیرید

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{\text{num1}}{\text{den1}} \quad G_2(s) = \frac{5}{s + 5} = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

برنامه ۲-۱ تابع تبدیل  $C(s)/R(s) = \text{num}/\text{den}$  هر یک از آرایشهای  $G_1(s)$  و  $G_2(s)$  را نشان می‌دهد. به دستور زیر توجه کنید.

```
printsys (num , den)
```

این دستور  $\text{num} / \text{den}$  [یعنی تابع تبدیل  $C(s)/R(s)$ ] سیستم مورد نظر را نشان می‌دهد.

**کنترل کننده خودکار.** کنترل کننده خودکار مقدار واقعی خروجی دستگاه را با ورودی مرجع (مقدار مطلوب) مقایسه کرده، انحراف آنها از یکدیگر را تعیین می‌کند و سیگنال کنترل کننده‌ای به وجود می‌آورد که انحراف را به صفر یا مقداری کوچک برساند. روش ایجاد سیگنال کنترل توسط کنترل کننده خودکار عمل کنترلی نام دارد. شکل ۲-۶ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل خودکار صنعتی را نشان می‌دهد که یک کنترل کننده خودکار، یک کارانداز، دستگاه و یک حس کننده (عنصر اندازه‌گیر) دارد. کنترل کننده سیگنال خطای کارانداز را که معمولاً توان بسیار کمی دارد تشخیص می‌دهد، سپس آن را به میزان لازم تقویت می‌کند. خروجی کنترل کننده به یک کارانداز (یا عملگر)، مثل موتور یا شیر نیوماتیکی، موتور هیدرولیکی، یا موتور الکترونیکی داده می‌شود.



**MATLAB Program 2-1**

```

num1 = [10];
den1 = [1 2 10];
num2 = [5];
den2 = [1 5];
[num, den] = series(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

          50
      -----
      s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = parallel(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

      5s^2 + 20s + 100
      -----
      s^3 + 7s^2 + 20s + 50

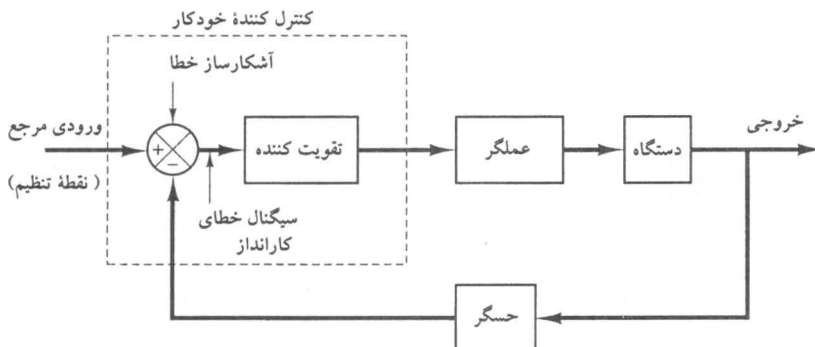
[num, den] = feedback(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

      10s + 50
      -----
      s^3 + 7s^2 + 20s + 100

```

کارانداز یک وسیله قدرتی است که بسته به سیگنال کنترل، ورودی مناسبی برای دستگاه تأمین می‌کند تا سیگنال خروجی به سیگنال ورودی مرجع نزدیک شود.



**شکل ۲-۶** نمودار بلوکی یک سیستم کنترل صنعتی که از یک کنترل کننده خودکار، یک کارانداز، دستگاه و یک حس کننده (عنصر اندازه گیر) تشکیل شده است.

حس کننده یا اندازه‌گیر وسیله‌ای است که متغیر خروجی را به متغیر مناسب دیگری چون جابه‌جایی، فشار یا ولتاژ تبدیل می‌کند، تا بتوان آن را با سیگنال مرجع ورودی مقایسه کرد. این عنصر در مسیر فیدبک سیستم حلقه بسته قرار می‌گیرد. نقطه تنظیم کنترل‌کننده باید به یک ورودی مرجع، با همان یکای سیگنال فیدبک شده توسط حس کننده یا عنصر اندازه‌گیر تبدیل شود.

**طبقه‌بندی کنترل‌کننده‌های صنعتی.** کنترل‌کننده‌های صنعتی را می‌توان برحسب عمل کنترلی‌شان به صورت زیر طبقه‌بندی کرد:

۱. کنترل‌کننده‌های دو وضعیتی یا خاموش - روشن
۲. کنترل‌کننده‌های تناسبی
۳. کنترل‌کننده‌های انتگرالی
۴. کنترل‌کننده‌های تناسبی - انتگرالی
۵. کنترل‌کننده‌های تناسبی - مشتقی
۶. کنترل‌کننده‌های تناسبی - انتگرالی - مشتقی

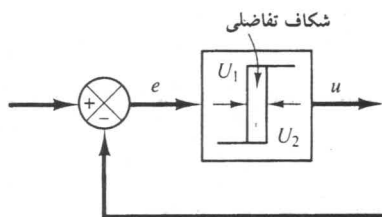
در بسیاری کنترل‌کننده‌های صنعتی از برق یا سیال تحت فشار، مثل روغن یا هوا به عنوان منبع توان استفاده می‌شود. کنترل‌کننده‌ها را می‌توان برحسب منبع توان نیز طبقه‌بندی کرد، مثل کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی، کنترل‌کننده‌های هیدرولیکی و کنترل‌کننده‌های الکترونیکی. انتخاب نوع کنترل‌کننده باید براساس طبیعت دستگاه و شرایط کاری، شامل مسائل ایمنی، هزینه، سهولت دستیابی، قابلیت اطمینان، دقت، وزن و اندازه صورت گیرد.

**عمل کنترل دو وضعیتی یا خاموش - روشن.** در یک سیستم کنترل دو وضعیتی، عنصر عمل کننده تنها دو وضعیت ثابت دارد، که در بسیاری از موارد چیزی جز روشن و خاموش نیستند. کنترل دو وضعیتی یا خاموش - روشن نسبتاً ساده و ارزان است و به همین خاطر در سیستم‌های کنترل صنعتی و خانگی بسیار به کار می‌رود. سیگنال خروجی کنترل‌کننده را  $u(t)$  و سیگنال خطای کارانداز را  $e(t)$  فرض کنید. در کنترل دو وضعیتی سیگنال  $u(t)$  در یکی از دو مقدار ماکزیمم و می‌نیم، بسته به مثبت یا منفی بودن سیگنال خطای کارانداز، باقی می‌ماند. پس

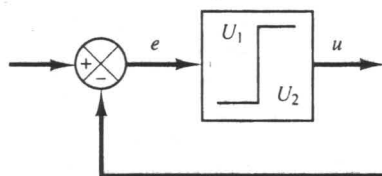
$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 & e(t) > 0 & \text{به ازای} \\ &= U_2 & e(t) < 0 & \text{به ازای} \end{aligned}$$

که در آن  $U_1$  و  $U_2$  ثابت‌اند. مقدار می‌نیم  $U_2$  معمولاً یا صفر است یا  $-U_1$ . کنترل‌کننده‌های دو وضعیتی عموماً وسایل الکتریکی‌اند، در این کنترل‌کننده‌ها از شیرهای مغناطیسی زیاد استفاده می‌شود. کنترل‌کننده‌های نیوماتیکی دارای بهره زیاد، مثل کنترل‌کننده‌های دو وضعیتی هستند و گاهی کنترل‌کننده‌های دو وضعیتی نیوماتیکی نامیده می‌شوند.

شکل‌های ۲-۷ (الف) و (ب) نمودارهای بلوکی دو کنترل کننده دو وضعیتی را نشان می‌دهند. فاصله‌ای که سیگنال خطا باید بپیماید تا تغییر حالت رخ بدهد شکاف تفاضلی نامیده می‌شود. شکل ۲-۷ (ب) شکاف تفاضلی را نشان می‌دهد. وجود این شکاف تفاضلی باعث می‌شود تا وقتی سیگنال خطا از حول صفر کمی

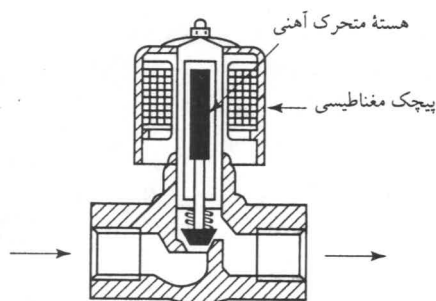


(ب)

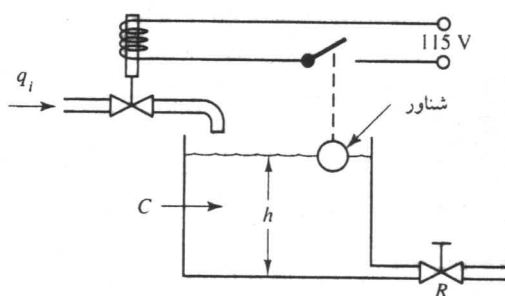


(الف)

شکل ۷-۲ (الف) نمودار بلوکی کنترل کننده دو وضعیتی؛ (ب) نمودار بلوکی کنترل کننده دو وضعیتی با شکاف تفاضلی.



(ب)



(الف)

شکل ۸-۲ (الف) سیستم کنترل سطح مایع؛ (ب) شیر مغناطیسی.

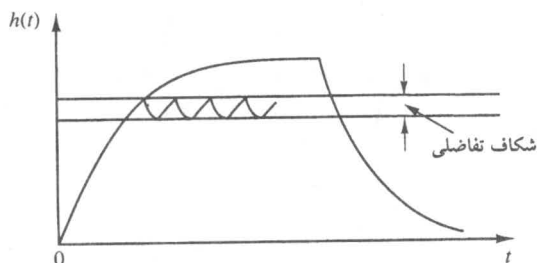
دورتر نشده، خروجی کنترل کننده  $u(t)$  مقدار فعلی اش را حفظ کند. در بعضی مواقع شکاف تفاضلی از اصطکاک ناخواسته ناشی می شود؛ ولی غالباً این شکاف عمداً و برای ممانعت از تعدد بیش از حد تغییر حالت مکانیسم روشن - خاموش تعبیه می شود.

سیستم کنترل سطح مایع شکل ۸-۲ (الف) را در نظر بگیرید. در این سیستم شیر مغناطیسی شکل ۸-۲ (ب) برای کنترل عبور سیال ورودی به کار رفته است. این شیر یا بسته است یا باز. به این ترتیب آهنگ ورود آب یا صفر است یا یک مقدار ثابت. همانطور که شکل ۹-۲ نشان می دهد، سیگنال خروجی دائماً بین دو حدی که باعث رفتن کارانداز از یک وضعیت به وضعیتی دیگر می شود، جابه جا می شود. منحنی خروجی بخشی از دو منحنی نمایشی است، منحنی پر شدن مخزن و منحنی تخلیه مخزن. این گونه نوسان بین دو حد مشخصه، پاسخ نوعی سیستم هایی است که با کنترل کننده های دو وضعیتی کنترل می شوند.

منحنی شکل ۹-۲ نشان می دهد که دامنه نوسان خروجی را می توان با کم کردن شکاف تفاضلی کم کرد. ولی کاهش شکاف تفاضلی تعداد خاموش - روشن شدن در واحد زمان را زیاد می کند و از عمر مفید وسیله می کاهد. اندازه شکاف تفاضلی باید با توجه به ملاحظات چون دقت لازم و عمر وسیله تعیین شود.

**عمل کنترل تناسبی.** در کنترل کننده های تناسبی رابطه بین خروجی کنترل کننده  $u(t)$  و سیگنال خطا  $e(t)$  به صورت زیر است

$$u(t) = K_p e(t)$$



شکل ۲-۹

منحنی ارتفاع  $h(t)$  بر حسب  $t$ ،

برای سیستم شکل ۲-۸.

و بر حسب تبدیل لاپلاس کمیت‌ها

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$K_p$  بهره تناسبی است.

مکانیسم کارانداز و توان به کار رفته هر چه باشد، کنترل‌کننده تناسبی اساساً یک تقویت‌کننده با بهره قابل تنظیم است.

**عمل کنترل انتگرالی.** در کنترل‌کننده انتگرالی خروجی کنترل‌کننده  $u(t)$  با آهنگی متناسب با سیگنال خطا  $e(t)$  تغییر می‌کند، یعنی

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

یا

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

$K_i$  یک ثابت قابل تنظیم است. تابع تبدیل کنترل‌کننده انتگرالی عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

**عمل کنترلی تناسبی - انتگرالی.** عمل کنترلی تناسبی - انتگرالی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

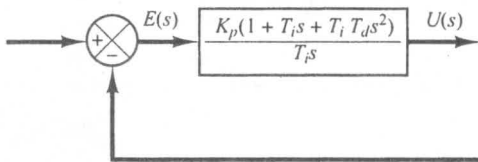
تابع تبدیل کنترل‌کننده عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$T_i$  زمان انتگرال نامیده می‌شود.

**عمل کنترلی تناسبی - مشتقی.** عمل کنترل تناسبی - مشتقی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$



شکل ۱۰-۲

نمودار بلوکی کنترل کننده  
تناسبی - انتگرالی - مشتقی.

و تابع تبدیل آن عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

$T_d$  زمان مشتق نامیده می شود.

**عمل کنترلی تناسبی - انتگرالی - مشتقی.** ترکیب عملهای کنترلی تناسبی، انتگرالی، و مشتقی، کنترل تناسبی - انتگرالی - مشتقی را به وجود می آورد. این عمل مرکب تمام مزایای سه کنترل تنها را دارد. معادله کنترل کننده تناسبی - انتگرالی - مشتقی عبارت است از

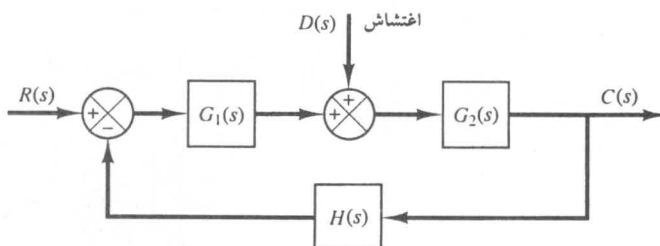
$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

تابع تبدیل کنترل کننده عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$K_p$  بهره تناسبی،  $T_i$  زمان انتگرال و  $T_d$  زمان مشتق است. نمودار بلوکی این کنترل کننده در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است.

**سیستمهای حلقه بسته در معرض اغتشاش.** شکل ۱۱-۲ یک سیستم حلقه بسته در معرض اغتشاش را نشان می دهد. وقتی یک سیستم خطی دو ورودی دارد (ورودی مرجع و ورودی اغتشاش)، می توان هر ورودی را به طور جدا و مستقل از دیگری بررسی کرده، خروجیهای متناظر با تک تک ورودیها را با هم جمع کرد تا پاسخ کامل به دست آید. نحوه افزوده شدن هر ورودی به سیستم در نقطه جمع با علامتهای + یا - مشخص می شود. سیستم شکل ۱۱-۲ را در نظر بگیرید. در بررسی اثر اغتشاش  $D(s)$  فرض می کنیم ورودی مرجع صفر است، سپس پاسخ  $C_D(s)$  به اغتشاش تنها را محاسبه می کنیم. این پاسخ عبارت است از



شکل ۱۱-۲

سیستم حلقه بسته در معرض اغتشاش.

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_Y(s)}{1 + G_1(s)G_Y(s)H(s)}$$

همچنین هنگام در نظر گرفتن ورودی مرجع  $R(s)$  را صفر می کنیم. پاسخ  $C_R(s)$  به ورودی مرجع به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_Y(s)}{1 + G_1(s)G_Y(s)H(s)}$$

پاسخ سیستم به اعمال همزمان ورودی مرجع و اغتشاش را می توان با جمع کردن دو پاسخ به دست آورد. به عبارت دیگر  $C(s)$  ناشی از اعمال همزمان ورودی مرجع  $R(s)$  و اغتشاش  $D(s)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_D(s) \\ &= \frac{G_Y(s)}{1 + G_1(s)G_Y(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)] \end{aligned}$$

اکنون وضعیتی را در نظر بگیرید که  $|G_1(s)H(s)| \gg 1$  و  $|G_1(s)G_Y(s)H(s)| \gg 1$ . در این حالت تابع تبدیل حلقه بسته  $C_D(s)/D(s)$  تقریباً صفر است و اثر اغتشاش فرو نشانده می شود. این یک مزیت سیستم حلقه بسته است.

از طرف دیگر با افزایش  $G_1(s)G_Y(s)H(s)$  تابع تبدیل حلقه بسته  $C_R(s)/R(s)$  به  $1/H(s)$  میل می کند. یعنی اگر  $|G_1(s)G_Y(s)H(s)| \gg 1$ ، آنگاه تابع تبدیل حلقه بسته  $C_R(s)/R(s)$  مستقل از  $G_1(s)$  و  $G_Y(s)$  شده، با عکس  $H(s)$  متناسب می شود. یعنی تغییرات  $G_1(s)$  و  $G_Y(s)$  بر تابع تبدیل حلقه بسته  $C_R(s)/R(s)$  اثری ندارد. این مزیت دیگر حلقه بسته است. به سادگی می توان دید که هر سیستم حلقه بسته دارای فیدبک واحد،  $H(s)=1$ ، در جهت یکسان کردن ورودی و خروجی عمل می کند.

**روشهای رسم نمودار بلوکی.** برای رسم نمودار بلوکی یک سیستم ابتدا معادلاتی را که رفتار دینامیکی هر عنصر را توصیف می کنند، بنویسید. سپس با فرض صفر بودن شرایط اولیه از معادلات تبدیل لاپلاس بگیرید، و هر معادله تبدیل لاپلاسی را با یک بلوک نمایش دهید. سرانجام بلوکها را به صورت یک نمودار بلوکی کامل به هم وصل کنید.

به عنوان مثال مدار  $RC$  شکل ۲-۱۲ (الف) را در نظر بگیرید. معادلات حاکم بر این مدار عبارت اند از:

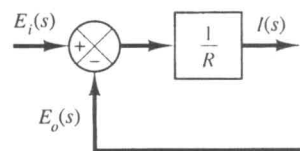
$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \quad (۴-۲)$$

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad (۵-۲)$$

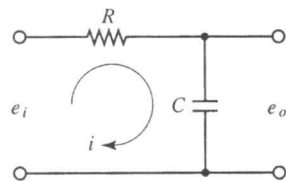
تبدیل لاپلاس معادلات (۴-۲) و (۵-۲) با فرض صفر بودن شرایط اولیه، عبارت اند از:

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \quad (۶-۲)$$

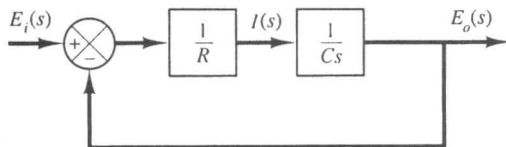
$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs} \quad (۷-۲)$$



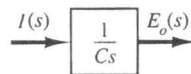
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

**شکل ۱۲-۲** (الف) مدار RC؛ (ب) نمودار بلوکی معادله (۶-۲)؛ (ج) نمایش بلوکی معادله (۷-۲)؛ (د) نمودار بلوکی مدار RC.

معادله (۶-۲) یک عمل جمع را نشان می‌دهد که با نمودار بلوکی شکل ۱۲-۲ (ب) نمایش داده می‌شود. معادله (۷-۲) با بلوک شکل ۱۲-۲ (ج) توصیف می‌شود. با اتصال این دو عنصر نمودار بلوکی کامل شکل ۱۲-۲ (د) حاصل می‌شود.

**ساده کردن نمودار بلوکی.** توجه به این نکته مهم است که تنها به شرطی می‌توان دو بلوک را سری کرد که بلوک بعدی بر خروجی بلوک اول اثری نداشته باشد. در صورت وجود اثر بارگذاری بین عناصر، باید آن عناصر را در یک بلوک ادغام کرد.

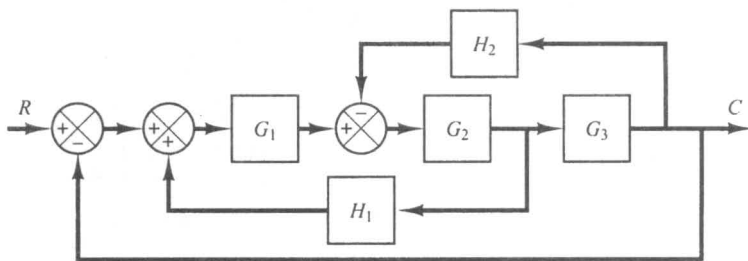
چند بلوک متوالی را که بر هم اثر بارگذاری نداشته باشند، می‌توان با یک بلوک تنها نشان داد. تابع تبدیل این بلوک حاصلضرب توابع تبدیل بلوکهای متوالی است.

یک نمودار بلوکی پیچیده، مشتمل بر حلقه‌های متعدد فیدبک، را می‌توان به کمک قواعد جبر بلوکی، با تغییر آرایش گام به گام ساده کرد. ساده کردن نمودار بلوکی با تغییر آرایش و جایگذاری زحمت تحلیل‌های ریاضی بعدی را بسیار کم می‌کند. البته باید توجه کرد که با ساده شدن نمودار بلوکی توابع تبدیل بلوک‌های جدید پیچیده‌تر می‌شوند، زیرا صفرها و قطبهای جدیدی به وجود می‌آیند.

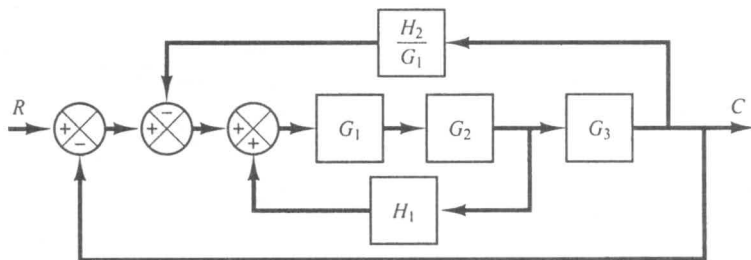
سیستم شکل ۱۳-۲ (الف) را در نظر بگیرید. این نمودار را ساده کنید.

**مثال ۱-۲**

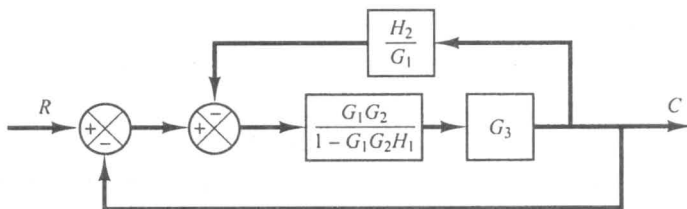
با بردن نقطه جمع حلقه فیدبک منفی شامل  $H_2$  به بیرون حلقه فیدبک مثبت  $H_1$ ، شکل ۱۳-۲ (ب) را به دست می‌آوریم. با حذف حلقه فیدبک مثبت به شکل ۱۳-۲ (ج) می‌رسیم. حذف حلقه شامل  $H_2 / G_1$  به شکل ۱۳-۲ (د) منجر می‌شود. سرانجام با حذف حلقه فیدبک به شکل ۱۳-۲ (ه) می‌رسیم.



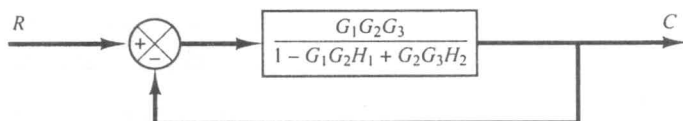
(الف)



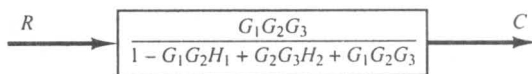
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل ۲-۱۳ (الف) سیستم چند حلقه‌ای؛ (ب) تا (ه) ساده کردن های متوالی نمودار بلوکی (الف).

توجه کنید که صورت تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  حاصلضرب توابع تبدیل مسیر پیشخورد است،

مخرج  $C(s)/R(s)$  عبارت است از

$$1 + \sum (\text{حاصلضرب توابع تبدیل حول هر حلقه})$$

$$= 1 - (G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3)$$

$$= 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3$$

(حلقه فیدبک مثبت یک جمله منفی در مخرج ایجاد می‌کند.)



## ۴-۲ مدلسازی در فضای حالت

در این بخش مطالب مقدماتی راجع به تحلیل سیستمهای کنترل در فضای حالت را بیان می‌کنیم.

**نظریه نوین کنترل.** روند نوین در مهندسی سیستمها به سمت پیچیدگی بیشتر است؛ علت اصلی این امر لزوم انجام کارهای پیچیده با دقت بیشتر است. سیستمهای پیچیده می‌توانند چند ورودی و چند خروجی داشته، متغیر با زمان باشند. از حدود ۱۹۶۰ به بعد به خاطر لزوم برآوردن قیدهای سخت‌تر بر عملکرد سیستمهای کنترل، افزایش پیچیدگی و سهولت دسترسی به کامپیوتر، رهیافت جدیدی در تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل پیچیده پیش گرفته شد که نظریه نوین کنترل نام گرفت. این رهیافت جدید بر مفهوم حالت بنا نهاده شده است. مفهوم حالت به خودی خود جدید نیست، زیرا مدت زیادی در دینامیک کلاسیک و دیگر زمینه‌ها مطرح بوده است.

**مقایسه نظریه نوین و نظریه کلاسیک کنترل.** نظریه نوین کنترل را می‌توان به سیستمهای چند ورودی - چند خروجی، خطی یا غیرخطی، و مستقل از زمان یا متغیر با زمان اعمال کرد، حال آن که نظریه کلاسیک تنها به سیستمهای خطی، مستقل از زمان و یک ورودی - یک خروجی قابل اعمال است. همچنین نظریه نوین کنترل اساساً یک رهیافت حوزه زمان است، حال آنکه نظریه کلاسیک رهیافت حوزه فرکانس دارد. قبل از این که بیشتر برویم باید حالت، متغیر حالت، بردار حالت، و فضای حالت را تعریف کنیم.

**حالت.** منظور از حالت یک سیستم دینامیکی کوچکترین مجموعه متغیر (موسوم به متغیرهای حالت) است که اگر در  $t = t_0$  معلوم باشند، به همراه ورودی در  $t \geq t_0$ ، رفتار سیستم را در  $t \geq t_0$  به طور کامل مشخص می‌کنند.

توجه کنید که مفهوم حالت به هیچ وجه به سیستمهای فیزیکی محدود نمی‌شود. این مفهوم به سیستمهای بیولوژیکی، اقتصادی، اجتماعی و غیره نیز قابل اعمال است.

**متغیرهای حالت.** متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی متغیرهایی هستند که کوچکترین مجموعه تعیین کننده حالت سیستم را تشکیل می‌دهند. اگر برای توصیف کامل رفتار یک سیستم دینامیکی حداقل  $n$  متغیر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  لازم باشد (به نحوی که با مشخص شدن ورودی در  $t \geq t_0$  و حالت‌های اولیه در  $t = t_0$ ، رفتار آینده سیستم کاملاً مشخص شود) این  $n$  متغیر مجموعه متغیرهای حالت را تشکیل می‌دهند.

توجه کنید که متغیرهای حالت لازم نیست کمیات فیزیکی قابل مشاهده و قابل اندازه‌گیری باشند. متغیرهایی که کمیات فیزیکی نیستند، و متغیرهایی که نه قابل اندازه‌گیری هستند و نه مشاهده‌پذیر نیز می‌توانند به عنوان متغیر حالت انتخاب شوند. این آزادی انتخاب متغیرهای حالت یکی از مزایای روش فضای حالت است. ولی در عمل، انتخاب کمیاتی که بتوان به سادگی اندازه‌گیری‌شان کرد مناسبتر است، (البته در صورتی که چنین انتخابی ممکن باشد) زیرا در کنترل بهینه باید تمام متغیرهای حالت با وزنه‌ای مناسب فیدبک شوند.

**بردار حالت.** اگر برای توصیف کامل رفتار سیستم  $n$  متغیر حالت لازم باشد، این  $n$  متغیر حالت را می توان  $n$  درایه بردار  $x$  در نظر گرفت. این بردار را **بردار حالت** می نامند. پس بردار حالت برداری است که حالت سیستم  $x(t)$  را در هر زمان  $t \geq t_0$  معین می کند، به شرطی که حالت در  $t = t_0$  و ورودی  $u(t)$  در  $t \geq t_0$  مشخص شده باشد.

**فضای حالت.** فضای  $n$  بعدی که محورهای مختصات آن محور  $x_1$ ، محور  $x_2$ ، ...، و محور  $x_n$  هستند، **فضای حالت** نامیده می شود. هر حالت را می توان با یک نقطه در فضای حالت مشخص کرد.

**معادلات فضای حالت.** در تحلیل فضای حالت با سه نوع متغیر که در مدل کردن رفتار دینامیکی سیستم دخیل اند، سر و کار داریم: متغیرهای ورودی، متغیرهای خروجی، و متغیرهای حالت. چنانچه در بخش ۲-۵ خواهیم دید، نمایش فضای حالت یک سیستم نمایش یکتایی نیست، برای یک سیستم تنها تعداد متغیرهای حالت در تمام نمایش های فضای حالت ممکن یکسان است.

سیستم دینامیکی باید عناصری داشته باشد که مقادیر ورودی در  $t \geq t_0$  را به خاطر بسپارند. چون در سیستم های کنترل پیوسته در زمان انتگرالگیر عنصر حافظه به حساب می آید، خروجی انتگرالگیرها را می توان متغیرهایی در نظر گرفت که حالت داخلی سیستم را به طور کامل توصیف می کنند. پس تعداد متغیرهای حالتی که رفتار دینامیکی سیستم را به طور کامل تعیین می کنند با تعداد انتگرالگیرهای موجود در سیستم برابر است.

فرض کنید یک سیستم چند ورودی - چند خروجی  $n$  انتگرالگیر دارد. همچنین فرض کنید که سیستم  $r$  ورودی  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ ، و  $m$  خروجی  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  دارد.  $n$  خروجی انتگرالگیرها را متغیرهای حالت تعریف می کنیم:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . پس سیستم را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\quad (۸-۲)$$

خروجیهای  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  سیستم را می توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}\quad (۹-۲)$$

تعریف می کنیم

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

به این ترتیب معادلات (۸-۲) و (۹-۲) به شکل زیر درمی آیند.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (10-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (11-2)$$

معادله (۱۰-۲) معادله حالت و معادله (۱۱-۲) معادله خروجی است. اگر توابع  $\mathbf{f}$  و  $\mathbf{g}$  شامل  $t$  باشند، سیستم متغیر با زمان است.

با خطی کردن معادلات (۱۰-۲) و (۱۱-۲) حول نقطه کار، معادله حالت و معادله خروجی خطی شده زیر حاصل می شود.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (12-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (13-2)$$

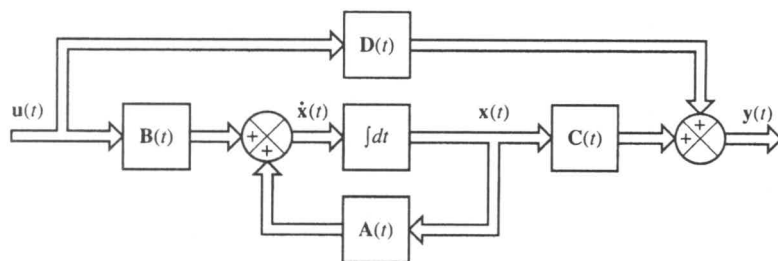
که در آن  $\mathbf{A}(t)$  ماتریس حالت،  $\mathbf{B}(t)$  ماتریس ورودی،  $\mathbf{C}(t)$  ماتریس خروجی، و  $\mathbf{D}(t)$  ماتریس انتقال مستقیم خوانده می شود. (جزئیات خطی کردن سیستمهای غیرخطی حول نقطه کار در بخش ۷-۲ مورد بحث قرار می گیرد). شکل ۱۴-۲ نمودار بلوکی نمایش دهنده معادلات (۱۲-۲) و (۱۳-۲) است.

اگر در توابع  $\mathbf{f}$  و  $\mathbf{g}$  زمان  $t$  به طور صریح وارد نشود، سیستم خطی مستقل از زمان است. در این صورت معادلات (۱۲-۲) و (۱۳-۲) به شکل زیر ساده می شوند:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (14-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (15-2)$$

معادله (۱۴-۲) معادله حالت یک سیستم خطی مستقل از زمان است. معادله (۱۵-۲) معادله خروجی این سیستم است. در این کتاب عمدتاً با سیستمهای توصیف شده با معادلات (۱۴-۲) و (۱۵-۲) سر و کار داریم. در زیر مثالی از یافتن معادلات حالت و معادله خروجی ارائه می کنیم.



شکل ۱۴-۲ نمایش نمودار بلوکی یک سیستم کنترل خطی پیوسته در زمان توصیف شده با معادلات حالت.

## مثال ۲-۲

سیستم مکانیکی شکل ۲-۱۵ را در نظر بگیرید. سیستم را خطی فرض می کنیم. نیروی خارجی  $u(t)$  ورودی سیستم و جابه جایی  $y(t)$  جرم، خروجی سیستم است. جابه جایی  $y(t)$  نسبت به وضعیت تعادلی که در غیاب نیروی خارجی به وجود می آید، اندازه گیری می شود این سیستم تک ورودی - تک خروجی است.

با توجه به شکل معادله سیستم عبارت است از

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \quad (۱۶-۲)$$

این سیستم مرتبه دوم است. یعنی سیستم دو انتگرالگیر دارد. متغیرهای حالت  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

حال به دست می آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

یا

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۱۷-۲)$$

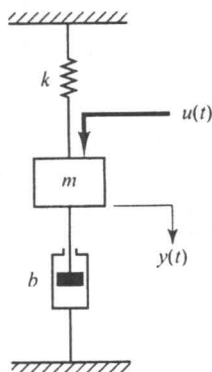
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \quad (۱۸-۲)$$

معادله خروجی عبارت است از

$$y = x_1 \quad (۱۹-۲)$$

معادلات (۱۷-۲) و (۱۸-۲) را می توان با استفاده از نماد ماتریسی به شکل زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (۲۰-۲)$$



شکل ۲-۱۵ سیستم مکانیکی.

همچنین معادله خروجی، معادله (۲-۱۹)، به شکل زیر درمی آید

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

معادله (۲-۲۰) معادله حالت و معادله (۲-۲۱) معادله خروجی سیستم است. معادلات (۲-۲۰) و (۲-۲۱) شکل استاندارد زیر را دارند

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

که در آنها

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

شکل ۲-۱۶ نمودار بلوکی سیستم را نشان می دهد. توجه کنید که متغیرهای حالت خروجی انتگرالگیرها هستند.

**رابطه تابع تبدیل و تابع فضای حالت.** در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه می توان تابع تبدیل یک سیستم یک ورودی - یک خروجی را از معادلات حالت آن به دست آورد. سیستمی با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (2-22)$$

این سیستم را می توان در فضای حالت با معادلات زیر توصیف کرد:

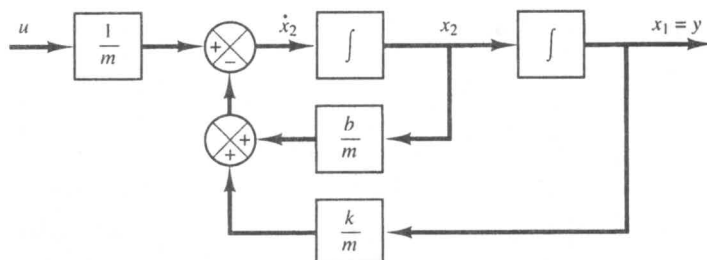
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2-23)$$

$$y = Cx + Du \quad (2-24)$$

که در آن  $x$  بردار حالت،  $u$  ورودی و  $y$  خروجی است. تبدیل لاپلاس معادلات (۲-۲۳) و (۲-۲۴) به صورت زیر است

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2-25)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2-26)$$



شکل ۲-۱۶

نمودار بلوکی سیستم مکانیکی شکل ۲-۱۵.

چون تابع تبدیل نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی به ازای شرایط اولیه صفر است، در معادله (۲۵-۲)  $x(0)$  را برابر صفر قرار می‌دهیم. پس داریم

$$sX(s) - A X(s) = B U(s)$$

یا

$$(sI - A)X(s) = B U(s)$$

با ضرب دو طرف در  $(sI - A)^{-1}$  به دست می‌آوریم

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s) \quad (27-2)$$

با گذاشتن معادله (۲۷-۲) در معادله (۲۶-۲) به دست می‌آوریم

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s) \quad (28-2)$$

مقایسه معادلات (۲۸-۲) و (۲۲-۲) نشان می‌دهد که

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (29-2)$$

که تابع تبدیل برحسب  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، و  $D$  است.

توجه کنید که طرف راست معادله (۲۹-۲) دارای عبارت  $(sI - A)^{-1}$  است. پس  $G(s)$  را می‌توان به شکل

زیر نوشت

$$G(s) = \frac{Q(s)}{sI - A}$$

که در آن  $Q(s)$  یک چندجمله‌ای برحسب  $s$  است. پس  $|sI - A|$  چند جمله‌ای مشخصه  $G(s)$  است. به عبارت دیگر مقادیر ویژه  $A$  قطبهای  $G(s)$  هستند.

باز هم سیستم مکانیکی شکل ۲-۱۵ را در نظر بگیرید. معادلات فضای حالت این سیستم معادلات (۲۰-۲) و (۲۱-۲) هستند. می‌خواهیم تابع تبدیل این سیستم را از معادلات حالت آن به دست آوریم.

مثال ۳-۲

با گذاشتن  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، و  $D$  در معادله (۲۹-۲) به دست می‌آوریم

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$= [1 \ 0] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0$$

$$= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

چون

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ \frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

فرمول وارون ماتریس  $2 \times 2$  در پیوست ج بیان شده است. داریم

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

که تابع تبدیل سیستم است. این تابع تبدیل را می توان از معادله  $(2-16)$  نیز به دست آورد.

**ماتریس انتقال.** حال یک سیستم چند ورودی - چند خروجی در نظر بگیرید. فرض کنید  $r$  ورودی  $u_1, u_2, \dots, u_r$  و  $m$  خروجی  $y_1, y_2, \dots, y_m$  داریم. پس تعریف می کنیم:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال  $G(s)$  خروجی  $Y(s)$  را به ورودی  $U(s)$  مرتبط می کند، یا

$$y(s) = G(s)U(s)$$

که در آن  $G(s)$  عبارت است از

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

[این معادله به همان روش معادله  $(2-29)$  به دست می آید.] چون بردار ورودی  $u$ ،  $r$  بعدی و بردار خروجی  $y$ ،  $m$  بعدی است، ماتریس انتقال  $m \times r$  است.

## ۵-۲ نمایش فضای حالت سیستمهای دینامیکی

یک سیستم دینامیکی متشکل از تعداد محدودی عنصر را می توان با معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف کرد که در آنها زمان متغیر مستقل است. با استفاده از نماد ماتریسی می توان یک معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  را به صورت یک معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول بیان کرد. اگر  $n$  درایه بردار، یک مجموعه متغیر حالت باشد، معادله دیفرانسیل ماتریسی همان معادله حالت است. در این بخش روشهایی برای یافتن نمایش فضای حالت سیستمهای پیوسته در زمان معرفی می کنیم.

نمایش فضای حالت سیستمهای بیان شده با معادلات دیفرانسیل خطی که در آن مشتقهای توابع تحریک ظاهر نمی شوند. سیستم مرتبه  $n$  را در نظر بگیرید

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_n y = u \quad (30-2)$$

توجه کنید که دانستن  $y(0)$ ،  $\dot{y}(0)$ ، ...،  $y^{(n-1)}(0)$  و ورودی  $u(t)$  در  $t \geq 0$  رفتار آینده سیستم را به طور کامل مشخص می کند.  $y(t)$ ،  $\dot{y}(t)$ ، ...،  $y^{(n-1)}(t)$  را به عنوان  $n$  متغیر حالت برمی گیریم (از لحاظ ریاضی انتخاب متغیرهای حالت امری دلخواه است. ولی در عمل چون به خاطر وجود نویز ذاتی سیستمهای فیزیکی مشتقهای مرتبه بالاتر دقت کمتری دارند، ممکن است این گزینش چندان مطلوب نباشد).  
تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

پس معادله (۳۰-۲) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

یا

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (31-2)$$

که در آن

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خروجی را می توان به شکل زیر بیان کرد

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

یا



$$y = Cx \quad (۳۲-۲)$$

که در آن

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

[توجه کنید که  $D$  معادله (۲۴-۲) صفر است.] معادله دیفرانسیل مرتبه اول، معادله (۳۱-۲) معادله حالت و معادله جبری (۳۲-۲) معادله خروجی است.

توجه کنید که نمایش فضای حالت سیستم تابع تبدیلی زیر، همان معادلات (۳۱-۲) و (۳۲-۲) است.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

**نمایش فضای حالت سیستمهای بیان شده با معادلات دیفرانسیل خطی که در آنها مشتق تابع تحریک ظاهر می‌شود.** اگر در معادله دیفرانسیل سیستم مشتق تابع تحریک نیز به صورت زیر ظاهر شود

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (۳۳-۲)$$

مشکل اصلی تعریف متغیر حالت در این مورد جملات شامل مشتق ورودی  $u$  است. متغیرهای حالت باید چنان باشند که مشتقهای  $u$  در معادلات حالت ظاهر نشوند.

یک راه یافتن معادله حالت و معادله خروجی این است که  $n$  متغیر زیر را به عنوان متغیر حالت به کار ببریم

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned} \quad (۳۴-۲)$$

که در آنها  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$  به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\vdots \\ \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - \dots - a_{n-2} \beta_1 - a_{n-1} \beta_0 \end{aligned} \quad (۳۵-۲)$$

با این انتخاب وجود و یکتایی جواب معادله حالت تضمین می‌شود. (توجه کنید که این تنها مجموعه متغیرهای حالت نیست.) به ازای این انتخاب به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
 \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u
 \end{aligned} \tag{۳۶-۲}$$

[برای اثبات معادله (۳۶-۲) مسئله الف-۲-۶ را ببینید] معادله (۳۶-۲) را می توان بر حسب معادلات ماتریسی به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_o u$$

یا

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{۳۷-۲}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \tag{۳۸-۲}$$

که در آن

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad D = \beta_o = b_o$$

در این نمایش ماتریس های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{C}$  دقیقاً همان ماتریس های معادله (۳۰-۲) هستند. مشتق های سمت راست

معادله (۳۳-۲) تنها بر داریه های ماتریس  $\mathbf{B}$  اثر می گذارد.

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

نمایش فضای حالت این تابع تبدیل نیز با معادلات (۳۷-۲) و (۳۸-۲) بیان می‌شود.

راه‌های مختلفی برای یافتن نمایش فضای حالت سیستمها وجود دارد. بعضی از این روشها در این فصل معرفی شده‌اند. روشهای یافتن نمایش‌های متعارف سیستمها در فضای حالت (مثلاً شکل متعارف کنترل‌پذیر، شکل متعارف مشاهده‌پذیر، شکل متعارف قطری، شکل متعارف جردن) در فصل ۹ معرفی خواهد شد. برای یافتن نمایش فضای حالت سیستم از نمایش تابع تبدیل و برعکس، می‌توان از MATLAB استفاده کرد. این موضوع را در بخش ۶-۲ بیان خواهیم کرد.

## ۶-۲ تبدیل مدل‌های ریاضی به کمک MATLAB

MATLAB ابزار مفیدی برای تبدیل مدل سیستم از تابع تبدیل به فضای حالت و برعکس است. بحث را با تبدیل تابع تبدیل به فضای حالت شروع می‌کنیم.

بیا باید تابع تبدیل حلقه بسته را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s \text{ چند جمله‌ای صورت بر حسب } s}{s \text{ چند جمله‌ای مخرج بر حسب } s} = \frac{\text{num}}{\text{den}}$$

پس از تعریف این تابع تبدیل، دستور زیر نمایش فضای حالت را به دست می‌دهد

$$[A, B, C, D] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

توجه به این نکته مهم است که نمایش فضای حالت یک سیستم نمایشی یکتا نیست. برای هر سیستمی تعداد زیادی (بی‌نهایت) نمایش فضای حالت وجود دارد. دستور MATLAB یکی از این نمایشهای فضای حالت را به دست می‌دهد.

**تبدیل تابع تبدیل به فضای حالت.** سیستم تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s}{(s+10)(s^2+4s+16)} \\ &= \frac{s}{s^3+14s^2+56s+160} \end{aligned} \quad (39-2)$$

برای این سیستم تعداد زیادی (بی‌نهایت) نمایش فضای حالت وجود دارد، که یکی به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

یک نمایش دیگر (از میان بی‌نهایت نمایش ممکن) به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -56 & -160 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (40-2)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (41-2)$$

MATLAB تابع تبدیل معادله (۳۹-۲) را به نمایش فضای حالت داده شده با معادلات (۴۰-۲) و (۴۱-۲) تبدیل می‌کند. برای این سیستم برنامه ۲-۲ ماتریسهای A، B، C، و D را به دست می‌دهد.

#### MATLAB Program 2-2

```
num = [1 0];
den = [1 14 56 160];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

A =

```
-14  -56  -160
     1    0    0
     0    1    0
```

B =

```
1
0
0
```

C =

```
0    1    0
```

D =

```
0
```

**تبدیل از فضای حالت به تابع تبدیل.** برای یافتن تابع تبدیل از معادلات فضای حالت دستور زیر را به کار

می‌بریم

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,iu)
```

برای سیستمهای با بیش از یک ورودی باید iu مشخص شود، مثلاً برای سیستمی با سه ورودی  $(u_1, u_2, u_3)$ ،

iu باید یکی از سه عدد ۱، ۲ یا ۳ باشد، ۱ ورودی  $u_1$ ، ۲ ورودی  $u_2$ ، و ۳ ورودی  $u_3$  را برمی‌گزیند.

اگر سیستم تنها یک ورودی داشته باشد، هر دو دستور زیر را می‌توان به کار برد

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, 1)$$

برای سیستم‌های با چند ورودی و چند خروجی مسئله الف-۲-۱۲ را ببینید.

تابع تبدیل سیستم تعریف شده با معادلات فضای حالت زیر را بیابید:

مثال ۴-۲

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -25 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -120 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

برنامه ۳-۲ تابع تبدیل سیستم را به دست می‌دهد. تابع تبدیل به دست آمده عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25s + 5}{s^3 + 5s^2 + 25s + 5}$$

### MATLAB Program 2-3

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -5 -25 -5];
```

```
B = [0; 25; -120];
```

```
C = [1 0 0];
```

```
D = [0];
```

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

```
num =
```

```
0 0.0000 25.0000 5.0000
```

```
den
```

```
1.0000 5.0000 25.0000 5.0000
```

```
% ***** The same result can be obtained by entering the following command: *****
```

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
```

```
num =
```

```
0 0.0000 25.0000 5.0000
```

```
den =
```

```
1.0000 5.0000 25.0000 5.0000
```

## ۲-۷ خطی کردن مدل‌های ریاضی غیر خطی

**سیستم غیرخطی.** سیستمی غیرخطی است که برای آن اصل برهم نهی قابل اعمال نباشد. پس برای یک سیستم غیرخطی نمی‌توان پاسخ ناشی از دو ورودی را با در نظر گرفتن اثر تک‌تک ورودی‌ها و جمع نتایج به دست آورد.

گرچه بسیاری از روابط فیزیکی غالباً با معادلات خطی بیان می‌شوند، ولی در اکثر موارد رابطه واقعاً خطی نیست. در واقع بررسی دقیق سیستم‌های فیزیکی نشان می‌دهد که حتی سیستم‌های مشهور به سیستم‌های خطی تنها در گستره کاری محدودی خطی هستند. در عمل بسیاری از سیستم‌های الکترومکانیکی، هیدرولیکی، نیوماتیکی و غیره دارای متغیرهایی با روابط غیرخطی هستند. مثلاً خروجی یک بخش ممکن است به ازای یک سیگنال ورودی بزرگ اشباع شود. ممکن است یک فاصله مرده وجود داشته باشد که بر سیگنالهای کوچک اثر بگذارد. (فاصله مرده گستره کوچکی از مقادیر ورودی است که وسیله به آن حساس نیست.) در بعضی اجزاء ممکن است اثرات غیرخطی مرتبه دوم وجود داشته باشد. مثلاً میراسازهایی که در سیستم‌های فیزیکی به کار می‌روند در سرعت‌های کم خطی هستند، ولی در سرعت‌های بالا ممکن است عملکردی غیرخطی داشته باشند. به نحوی که نیروی میراساز با مربع سرعت متناسب شود.

**خطی کردن سیستم غیرخطی.** در مهندسی کنترل عملکرد عادی سیستم ممکن است حول یک نقطه تعادل باشد، و ممکن است بتوان ورودی را سیگنال کوچکی حول نقطه تعادل دانست. (باید خاطر نشان کنیم که در بسیاری از مواقع وضعیت چنین نیست.) ولی اگر سیستم حول یک نقطه تعادل کار کند و سیگنالهای اعمالی کوچک باشند، می‌توان سیستم غیرخطی را به صورت یک سیستم خطی تقریب زد. این سیستم خطی در یک گستره کاری محدود با سیستم غیرخطی هم‌ارز است. این مدل خطی شده (مدل خطی مستقل از زمان) در مهندسی کنترل بسیار مهم است.

اساس روش خطی کردنی که در اینجا بیان می‌شود، بسط سری تیلور توابع غیرخطی حول نقطه کار و نگهداشتن جمله خطی و حذف بقیه جملات است. چون می‌خواهیم جملات مرتبه بالای سری تیلور را ندیده بگیریم این جملات باید کوچک باشند، یعنی متغیرها باید تنها به مقداری اندک از نقطه کار دور شوند.

**تقریب خطی مدل‌های ریاضی غیرخطی.** برای یافتن یک مدل ریاضی خطی برای یک سیستم غیرخطی فرض می‌کنیم متغیرها نسبت به مقادیر نقطه کار تغییرات اندکی دارند. سیستمی با ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  در نظر بگیریم. رابطه بین  $y(t)$  و  $x(t)$  عبارت است از

$$y = f(x) \quad (۴۲-۲)$$

اگر شرایط عادی کار با مقادیر  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  متناظر باشد، می‌توان بسط تیلور معادله (۴۲-۲) را حول نقطه کار به این صورت نوشت

$$y = f(x)$$

$$= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \quad (۴۳-۲)$$

که در آن مشتق‌های  $df/dx$ ،  $d^2f/dx^2$ ، ....، در  $x = \bar{x}$  حساب می‌شوند. اگر  $x - \bar{x}$  کوچک باشد، می‌توان جملات مرتبه بالای  $(x - \bar{x})$  را ندیده گرفت و معادله (۴۳-۲) را به صورت زیر نوشت

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \quad (۴۴-۲)$$

که در آن

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

معادله (۴۴-۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \quad (۴۵-۲)$$

که نشان می‌دهد  $y - \bar{y}$  با  $x - \bar{x}$  متناسب است. معادله (۴۵-۲) یک مدل ریاضی خطی برای سیستم غیرخطی توصیف شده با معادله (۴۲-۲) در نزدیکی نقطه کار  $x = \bar{x}$ ،  $y = \bar{y}$  است.

حال یک سیستم غیرخطی در نظر می‌گیریم که خروجی  $y$  آن تابعی از دو ورودی  $x_1$  و  $x_2$  است، یعنی

$$y = f(x_1, x_2) \quad (۴۶-۲)$$

برای یافتن تقریب خطی این سیستم غیرخطی می‌توان بسط سری تیلور معادله (۴۶-۲) را حول نقطه کار  $\bar{x}_1$  و  $\bar{x}_2$  نوشت. این کار به دست می‌دهد

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) \right]$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \dots$$

که در آن مشتق‌های جزئی در  $x_1 = \bar{x}_1$ ،  $x_2 = \bar{x}_2$  محاسبه می‌شوند. در حوالی نقطه کار می‌توان جملات مرتبه بالا را ندیده گرفت. به این ترتیب مدل ریاضی خطی این سیستم غیرخطی در حوالی نقطه کار به صورت زیر به دست می‌آید

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

که در آن

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

$$K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

روش خطی کردن معرفی شده در اینجا تنها در همسایگی نقطه کار معتبر است. اگر شرایط کار تغییرات شدیدی داشته باشند، این معادله خطی شده کافی نیست و باید از معادله غیر خطی اصلی استفاده شود. به یاد داشتن این نکته مهم است که یک مدل ریاضی خاص که در تحلیل و طراحی به کار می رود ممکن است رفتار دینامیکی سیستم واقعی را در شرایط کاری خاصی به طور دقیق بیان کند، ولی برای شرایط کاری دیگر دقیق نباشد.

## مثال ۲-۵

معادله غیرخطی زیر را در گستره  $5 \leq x \leq 7$ ،  $10 \leq y \leq 12$  خطی کنید:

$$z = xy$$

اگر معادله خطی شده را برای محاسبه  $z$  به ازای  $x=5$ ،  $y=10$  به کار ببریم، چقدر خطا ایجاد می شود؟

چون گستره مورد نظر  $5 \leq x \leq 7$ ،  $10 \leq y \leq 12$  است، انتخاب می کنیم  $\bar{x}=6$ ،  $\bar{y}=11$ . پس  $\bar{z} = \bar{x}\bar{y} = 66$ . حال یک معادله خطی شده در نزدیکی نقطه  $\bar{x}=6$ ،  $\bar{y}=11$  به دست می آوریم. با بسط معادله غیر خطی به صورت سری تیلور در حول نقطه  $x=\bar{x}$ ،  $y=\bar{y}$  و چشم پوشی از جملات مرتبه بالا به دست می آوریم.

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

که در آن

$$a = \left. \frac{\partial(xy)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \bar{y} = 11$$

$$b = \left. \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \bar{x} = 6$$

پس معادله خطی شده عبارت است از

$$z - 66 = 11(x - 6) + 6(y - 11)$$

یا

$$z = 11x + 6y - 66$$

به ازای  $x=5$ ،  $y=10$  مقدار  $z$  به دست آمده از معادله خطی شده عبارت است از

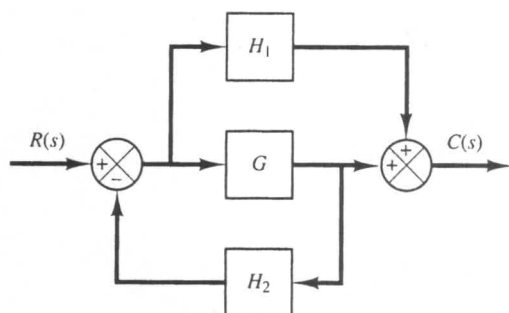
$$z = 11x + 6y - 66 = 55 + 60 - 66 = 49$$

مقدار دقیق  $z$  عبارت است از  $z = xy = 50$ . پس خطا  $50 - 49 = 1$  و برحسب درصد ۲٪ است.



## مسائل نمونه و حلشان

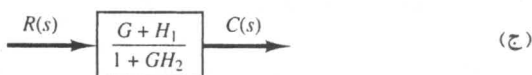
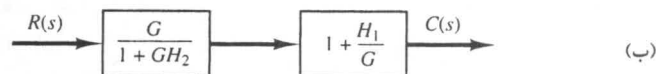
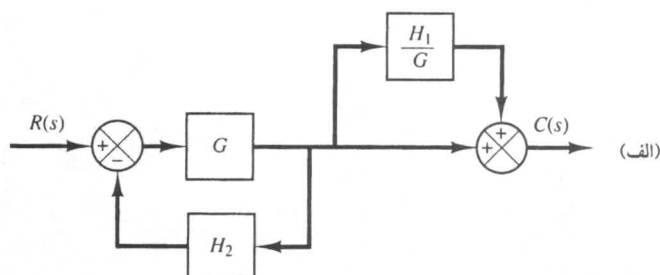
الف ۱-۲ نمودار بلوکی شکل ۱۷-۲ را ساده کنید.



شکل ۱۷-۲

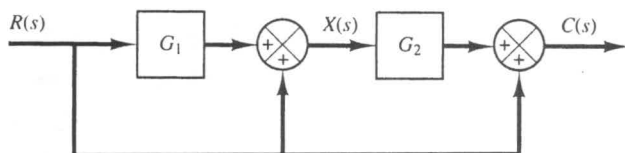
نمودار بلوکی یک سیستم.

حل: ابتدا نقطه انشعاب مشتمل بر  $H_1$  را مطابق شکل ۱۸-۲ (الف) به خارج حلقه مشتمل بر  $H_2$  منتقل می‌کنیم. سپس با حذف دو حلقه به شکل ۱۸-۲ (ب) می‌رسیم. سرانجام دو بلوک را مطابق شکل ۱۸-۲ (ج) درهم ادغام می‌کنیم.

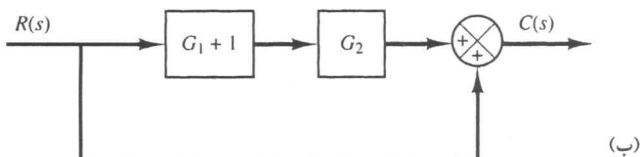
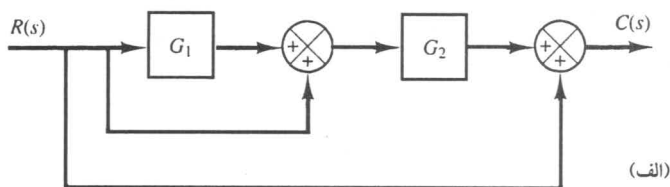


شکل ۱۸-۲ ساده کردن نمودار بلوکی شکل ۱۷-۲.

الف ۲-۲ نمودار بلوکی شکل ۱۹-۲ را ساده کنید. تابع تبدیل بین  $R(s)$  و  $C(s)$  را بیابید.



شکل ۱۹-۲ نمودار بلوکی یک سیستم.



شکل ۲-۲۰

ساده کردن نمودار بلوکی

حل: نمودار بلوکی شکل ۲-۱۹ را می توان به نمودار شکل ۲-۲۰ (الف) ساده کرد. با حذف مسیر بحرانی پیشخورد به نمودار شکل ۲-۲۰ (ب) می رسیم، و آن را به صورت نمودار شکل ۲-۲۰ (ج) ساده می کنیم. پس تابع تبدیل  $C(s)/R(s)$  عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 G_2 + G_2 + 1$$

به صورت زیر نیز می توان همین نتیجه را یافت؛ چون سیگنال  $X(s)$  جمع دو سیگنال  $G_1 R(s)$  و  $R(s)$  است، داریم

$$X(s) = G_1 R(s) + R(s)$$

سیگنال خروجی  $C(s)$  مجموع  $G_2 X(s)$  و  $R(s)$  است؛ پس

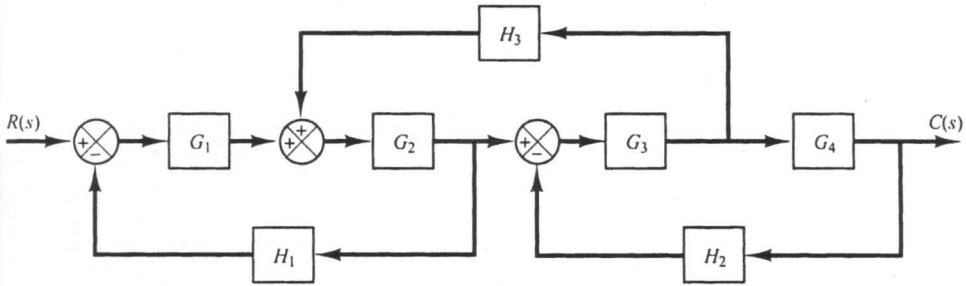
$$C(s) = G_2 X(s) + R(s) = G_2 [G_1 R(s) + R(s)] + R(s)$$

و همان نتیجه قبل به صورت زیر به دست می آید

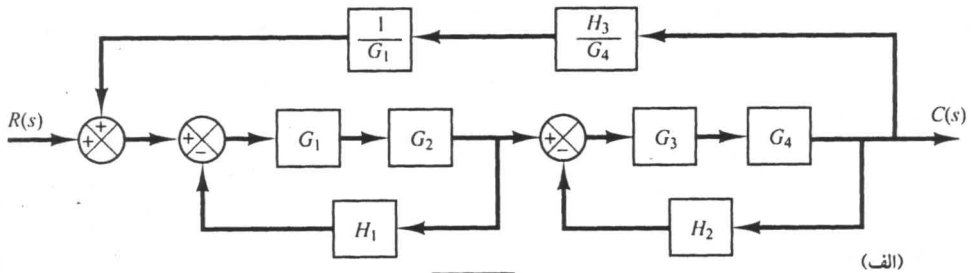
$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 G_2 + G_2 + 1$$

الف ۲-۳ نمودار بلوکی شکل ۲-۲۱ را ساده کنید. سپس تابع بین حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  را بیابید.

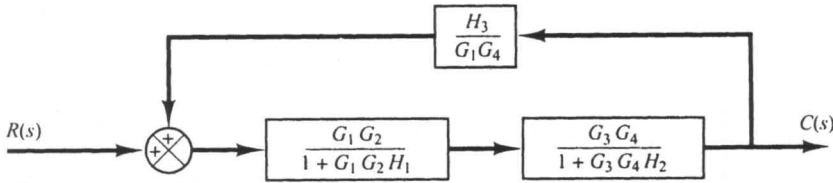
حل: ابتدا نقطه انشعاب بین  $G_3$  و  $G_4$  را به سمت راست حلقه مشتمل بر  $G_3$ ،  $G_4$ ، و  $H_2$  می بریم. سپس نقطه جمع بین  $G_1$  و  $G_2$  را به سمت چپ نقطه جمع اول منتقل می کنیم. شکل ۲-۲۲ (الف) را ببینید. با ساده کردن حلقه ها می توان نمودار بلوکی شکل ۲-۲۲ (ب) را به دست آورد. یک ساده سازی دیگر شکل ۲-۲۲ (ج) را به دست می دهد که با توجه به آن می توان تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  را به صورت زیر



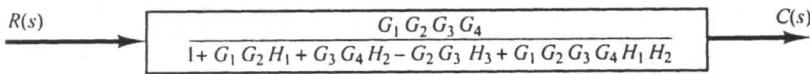
شکل ۲-۲۱ نمودار بلوکی یک سیستم.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۲-۲۲ مراحل متوالی ساده کردن سیستم شکل ۲-۲۱.

یافت

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_2 - G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_2}$$

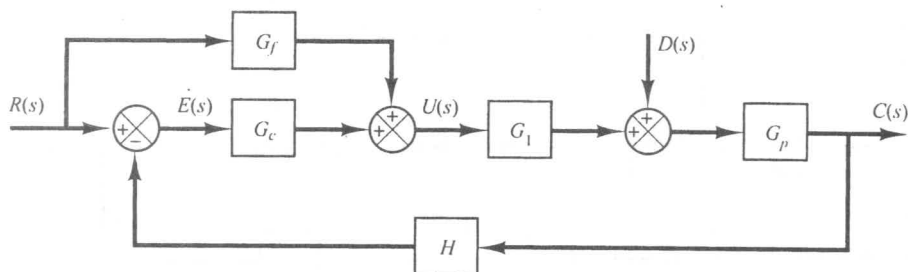
الف ۲-۴ توابع تبدیل  $C(s)/R(s)$  و  $C(s)/D(s)$  سیستم شکل ۲-۲۳ را بیابید.

حل: با توجه به شکل ۲-۲۳ داریم

$$U(s) = G_j R(s) + G_c E(s) \quad (۴۷-۲)$$

$$C(s) = G_p [D(s) + G_1 U(s)] \quad (۴۸-۲)$$

$$E(s) = R(s) - H C(s) \quad (۴۹-۲)$$



شکل ۲-۲۳ سیستم کنترل با ورودی مرجع و ورودی اغتشاش.

با گذاشتن معادله (۲-۴۷) در معادله (۲-۴۸) به دست می‌آوریم

$$C(s) = G_p D(s) + G_1 G_p [G_f R(s) + G_c E(s)] \quad (2-50)$$

با گذاشتن معادله (۲-۴۹) در معادله (۲-۵۰) به دست می‌آوریم

$$C(s) = G_p D(s) + G_1 G_p \{G_f R(s) + G_c [R(s) - HC(s)]\}$$

از معادله اخیر  $C(s)$  را به دست می‌آوریم

$$C(s) + G_1 G_p G_c HC(s) = G_p D(s) + G_1 G_p (G_f + G_c) R(s)$$

پس

$$C(s) = \frac{G_p D(s) + G_1 G_p (G_f + G_c) R(s)}{1 + G_1 G_p G_c H} \quad (2-51)$$

توجه کنید که معادله (۲-۵۱) پاسخ  $C(s)$  را هنگام وجود ورودی مرجع  $R(s)$  و ورودی اغتشاش  $D(s)$  به دست می‌دهد.

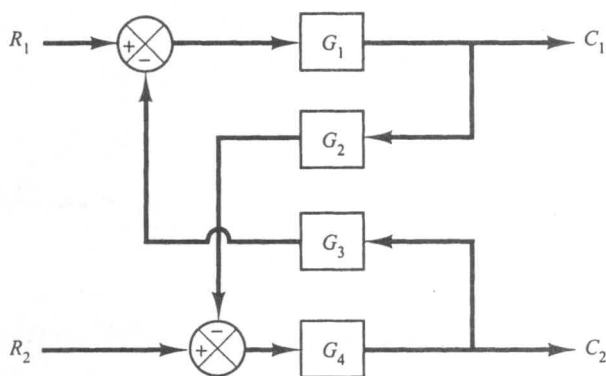
برای یافتن  $C(s)/R(s)$  در معادله (۲-۵۱) قرار می‌دهیم  $D(s) = 0$ . حال به دست می‌آوریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_p (G_f + G_c)}{1 + G_1 G_p G_c H}$$

به نحوی مشابه برای یافتن تابع تبدیل  $C(s)/D(s)$  در معادله (۲-۵۱) قرار می‌دهیم  $R(s) = 0$ .  $C(s)/D(s)$  به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_1 G_p G_c H}$$

الف ۲-۵ شکل ۲-۲۴ سیستمی با دو ورودی و دو خروجی را نشان می‌دهد.  $C_1(s)/R_1(s)$ ،  $C_1(s)/R_2(s)$ ،  $C_2(s)/R_1(s)$  و  $C_2(s)/R_2(s)$  را بیابید. (برای یافتن خروجی برحسب  $R_1(s)$ ، فرض کنید  $R_2(s)$  صفر است و برعکس.)



شکل ۲- ۲۴

سیستمی با دو ورودی و دو خروجی.

حل: با توجه به شکل به دست می‌آوریم

$$C_1 = G_1(R_1 - G_3 C_2) \quad (۵۲-۲)$$

$$C_2 = G_4(R_2 - G_2 C_1) \quad (۵۳-۲)$$

با قرار دادن معادله (۵۳-۲) در معادله (۵۲-۲) به دست می‌آوریم

$$C_1 = G_1[R_1 - G_3 G_4(R_2 - G_2 C_1)] \quad (۵۴-۲)$$

با جایگزینی معادله (۵۲-۲) در معادله (۵۳-۲) به دست می‌آوریم

$$C_2 = G_4[R_2 - G_2 G_1(R_1 - G_3 C_2)] \quad (۵۵-۲)$$

معادله (۵۴-۲) را برای یافتن  $C_1$  حل کرده، به دست می‌آوریم

$$C_1 = \frac{G_1 R_1 - G_1 G_3 G_4 R_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \quad (۵۶-۲)$$

 $C_2$  را با حل معادله (۵۵-۲) می‌یابیم

$$C_2 = \frac{-G_1 G_2 G_4 R_1 - G_4 R_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \quad (۵۷-۲)$$

می‌توانیم معادلات (۵۶-۲) و (۵۷-۲) را به صورت ماتریس انتقال زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} & \frac{-G_1 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \\ \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} & \frac{G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم توابع تبدیل  $C_1(s)/R_1(s)$ ،  $C_1(s)/R_2(s)$ ،  $C_2(s)/R_1(s)$  و  $C_2(s)/R_2(s)$  را به صورت زیر بیابیم:

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \quad , \quad \frac{C_1(s)}{R_2(s)} = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)} = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \quad , \quad \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

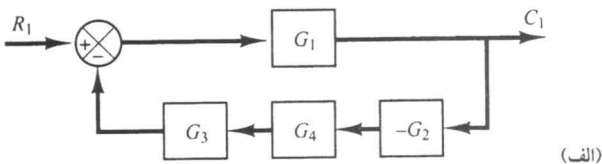
توجه کنید که معادلات (۲-۵۶) و (۲-۵۷) به ترتیب پاسخ های  $C_1$  و  $C_2$  را هنگام وجود هر دو ورودی  $R_1$  و  $R_2$  به دست می دهد.

توجه کنید که به ازای  $R_2(s) = 0$  نمودار بلوکی اصلی را می توان به صورت نشان داده شده در شکل های ۲-۲۵ الف) و ب) ساده کرد. به نحوی مشابه به ازای  $R_1(s) = 0$  نمودار بلوکی اصلی را می توان به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۲۵ ج) و د) ساده کرد. با توجه به این نمودار بلوکی ساده شده می توان  $C_1(s)/R_1(s)$ ،  $C_1(s)/R_2(s)$ ،  $C_2(s)/R_1(s)$  و  $C_2(s)/R_2(s)$  را به صورت نشان داده شده در بالا یافت.

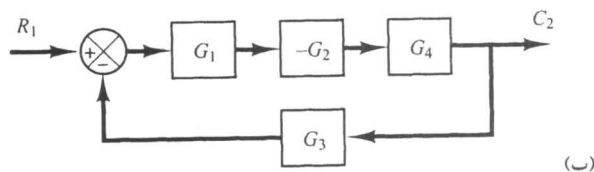
الف ۲-۶ نشان دهید برای سیستمی با معادله دیفرانسیل زیر

$$\ddot{y} = a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = b_4 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u \quad (2-58)$$

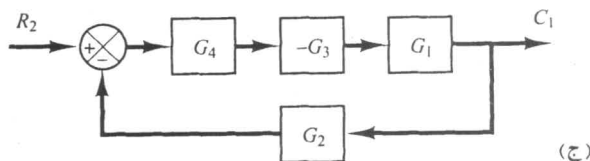
معادلات حالت و خروجی عبارت اند از



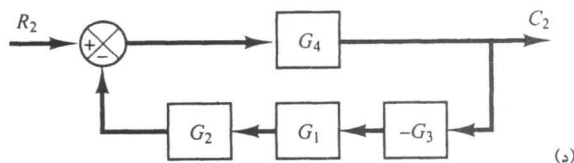
$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$



$$\frac{C_2}{R_1} = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$



$$\frac{C_1}{R_2} = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$



$$\frac{C_2}{R_2} = \frac{G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

شکل ۲-۲۵ نمودارهای بلوکی ساده شده و توابع تبدیل متناظر با هر یک.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \quad (59-2)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (60-2)$$

در این معادلات متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \end{aligned}$$

حل: با توجه به تعریف متغیرهای حالت  $x_2$  و  $x_3$  داریم

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \quad (61-2)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \quad (62-2)$$

برای یافتن معادله  $\dot{x}_3$  ابتدا از معادله (۵۸-۲) به دست می‌آوریم

$$\ddot{y} = -a_1 \ddot{y} - a_2 \dot{y} - a_3 y + b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u$$

چون

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u$$

داریم

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 \dot{u} \\ &= (-a_1 \ddot{y} - a_2 \dot{y} - a_3 y) + b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 \dot{u} \\ &= -a_1 (\ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u) - a_2 (\dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u) - a_3 (y - \beta_0 u) - a_2 \beta_0 \dot{u} \\ &\quad - a_1 \beta_0 \ddot{u} - a_1 \beta_1 \dot{u} - a_1 \beta_2 u \\ &\quad + b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 \dot{u} \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + (b_0 - \beta_0) \ddot{u} + (b_1 - \beta_1 - a_1 \beta_0) \dot{u} \\
 &\quad + (b_2 - \beta_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0) \dot{u} + (b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0) u \\
 &= -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + (b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0) u \\
 &= -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + \beta_3 u
 \end{aligned}$$

پس به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u \quad (۶۳-۲)$$

با ترکیب معادلات (۶۱-۲)، (۶۲-۲) و (۶۳-۲) در یک معادله ماتریسی، به معادله (۵۹-۲) می‌رسیم. همچنین با توجه به تعریف متغیر حالت  $x_1$  معادله خروجی (۶۰-۲) را به دست می‌آوریم.

الف ۲-۷ معادله فضای حالت و معادله خروجی سیستم تعریف شده با تابع تبدیل زیر را بیابید.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^3 + s^2 + s + 2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

حل: با توجه به تابع تبدیل داده شده، معادله دیفرانسیل این سیستم عبارت است از

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2\ddot{u} + \dot{u} + 2u$$

این معادله را با معادله (۳۳-۲) که شکل استاندارد دارد و در زیر بازنویسی شده است مقایسه می‌کنیم

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u$$

این مقایسه به دست می‌دهد

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 4 & a_2 = 5 & a_3 = 2 \\
 b_0 = 2 & b_1 = 1 & b_2 = 1 \quad b_3 = 2
 \end{array}$$

با توجه به معادله (۳۵-۲) داریم

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= b_0 = 2 \\
 \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 = 1 - 4 \times 2 = -7 \\
 \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 1 - 4 \times (-7) - 5 \times 2 = 19 \\
 \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\
 &= 2 - 4 \times 19 - 5 \times (-7) - 2 \times 2 = -43
 \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۳۴-۲) تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 x_1 &= y - \beta_0 u = y - 2u \\
 x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 + 7u \\
 x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2 u = \dot{x}_2 - 19u
 \end{aligned}$$

حال با رجوع به معادله (۳۶-۲) می‌نویسیم



$$\dot{x}_1 = x_2 - 7u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 19u$$

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u$$

$$= -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 43u$$

پس نمایش فضای حالت سیستم عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ -43 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2u$$

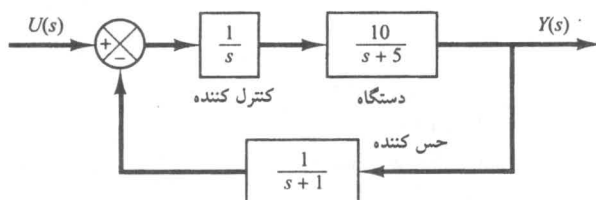
این یکی از نمایشهای فضای حالت ممکن است. برای این سیستم تعداد زیادی نمایش فضای حالت وجود دارد. اگر از MATLAB استفاده کنیم، نمایش فضای حالت زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -7 & -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2u$$

برنامه ۲-۴ را ببینید. (توجه کنید که تمام نمایشهای فضای حالت یک سیستم هم‌ارز هستند).

الف ۲-۸ مدل فضای حالت سیستم شکل ۲-۲۶ را به دست آورید.



شکل ۲-۲۶

سیستم کنترل.

حل: سیستم یک انتگرالگیر و دو انتگرالگیر تاخیری دارد. خروجی هر انتگرالگیر و هر انتگرالگیر تاخیری را می‌توان یک متغیر حالت در نظر گرفت. خروجی دستگاه را  $x_1$ ، خروجی انتگرالگیر را  $x_2$ ، و خروجی حس کننده را  $x_3$  فرض می‌کنیم. پس داریم

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{10}{s+5}$$

**MATLAB Program 2-4**

```
num = [2 1 1 2];
den = [1 4 5 2];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

A =

```
-4 -5 -2
 1  0  0
 0  1  0
```

B =

```
1
0
0
```

C =

```
-7 -9 -2
```

D =

```
2
```

$$\frac{X_r(s)}{U(s) - X_r(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{X_r(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$sX_1(s) = -5X_1(s) + 1 \cdot X_r(s)$$

$$sX_r(s) = -X_r(s) + U(s)$$

$$sX_r(s) = X_1(s) - X_r(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس چهار معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + 1 \cdot x_r$$

$$\dot{x}_r = -x_r + u$$

$$\dot{x}_r = x_1 - x_r$$

$$y = x_1$$

پس شکل استاندارد مدل فضای حالت سیستم به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

توجه به این نکته مهم است که این تنها نمایش فضای حالت ممکن نیست. نمایشهای فضای حالت متعددی برای این سیستم وجود دارد. ولی در تمام نمایشهای فضای حالت یک سیستم، تعداد متغیرهای حالت یکسان است. در این سیستم تعداد متغیرهای حالت، مستقل از این که چه متغیرهایی را به عنوان متغیرهای حالت در نظر بگیریم، سه است.

**الف ۲-۹** مدل فضای حالت سیستم شکل ۲-۲۷ (الف) را بیابید.

**حل:** ابتدا توجه کنید که  $(as+b)/s^2$  یک جمله مشتقی دارد. با نوشتن  $(as+b)/s^2$  به صورت زیر

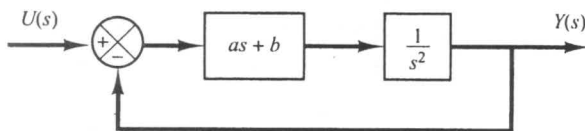
$$\frac{as+b}{s^2} = \left(a + \frac{b}{s}\right) \frac{1}{s}$$

از جمله مشتقی خلاص می شویم. با این اصلاح نمودار بلوکی شکل ۲-۲۷ (الف) را می توان به صورت شکل ۲-۲۷ (ب) رسم کرد.

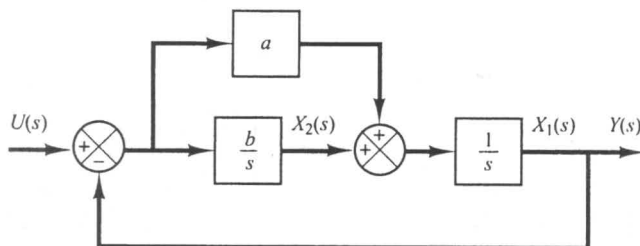
خروجی انتگرالگیرها را مطابق شکل ۲-۲۷ (ب) به عنوان متغیر حالت در نظر می گیریم. با توجه به شکل

۲-۲۷ (ب) داریم

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s) + a[U(s) - X_1(s)]} = \frac{1}{s}$$



(الف)



(ب)

**شکل ۲-۲۷** (الف) سیستم کنترل؛ (ب) نمودار بلوکی اصلاح شده.

$$\frac{X_r(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{b}{s}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

این معادلات را می‌توان به صورت زیر درآورد

$$s X_1(s) = X_r(s) + a[U(s) - X_1(s)]$$

$$s X_r(s) = -b X_1(s) + b U(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از سه معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\dot{x}_1 = -a x_1 + x_r + a u$$

$$\dot{x}_r = -b x_1 + b u$$

$$y = x_1$$

نوشتن معادلات حالت و خروجی به صورت استاندارد به دست می‌دهد

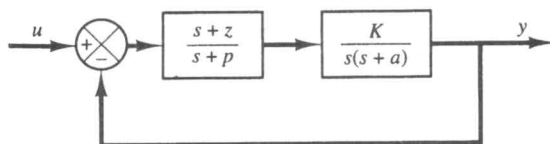
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix}$$

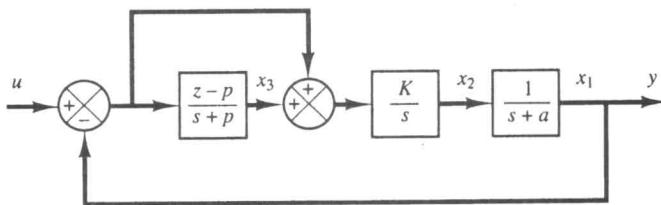
الف ۲-۱۰ نمایش فضای حالت سیستم شکل ۲-۲۸ (الف) را بیایید.

حل: برای این مسئله ابتدا  $(s+z)/(s+p)$  را به کسرهای جزئی بسط می‌دهیم

$$\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{z-p}{s+p}$$



(الف)



(ب)

شکل ۲-۲۸

(الف) سیستم کنترل؛

(ب) نمودار بلوکی که

متغیرهای حالت سیستم

در آن تعریف شده است.

سپس  $K/[s(s+a)]$  را به حاصلضرب  $K/s$  در  $1/(s+a)$  تبدیل می‌کنیم. حال نمودار بلوکی جدید را به صورت شکل ۲-۲۸ (ب) رسم می‌کنیم. با تعریف متغیرهای حالت به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۲۸ (ب) معادلات زیر را می‌یابیم

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -Kx_1 + Kx_3 + Ku$$

$$\dot{x}_3 = -(z-p)x_1 - px_3 + (z-p)u$$

$$y = x_1$$

بازنویسی این معادلات به دست می‌دهد

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z-p) & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z-p \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که خروجی انتگرالگیر و انتگرالگیرهای تأخیردار مرتبه اول  $1/(s+a)$  و  $(z-a)/(s+p)$  به عنوان متغیر حالت انتخاب شده‌اند. توجه به این نکته مهم است که خروجی بلوک  $(s+z)/(s+p)$  شکل ۲-۲۸ (الف) نمی‌تواند متغیر حالت باشد، زیرا این بلوک دارای عامل مشتگیری  $s+z$  است.

الف ۲-۱۱ تابع تبدیل سیستم تعریف شده در زیر را بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

حل: با توجه به معادله (۲-۲۹) تابع تبدیل  $G(s)$  عبارت است از

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

در این مسئله ماتریسهای  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{C}$  و  $D$  عبارت‌اند از

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}
 \end{aligned}$$

الف ۲-۱۲ یک سیستم چند ورودی چند خروجی در نظر بگیرید. وقتی سیستم بیش از یک خروجی دارد، دستور

$$[NUM, den] = ss2tf(A, B, C, D, iu)$$

تابع تبدیل تمام خروجی ها نسبت به هر ورودی را می یابد. (ضرائب صورت در ماتریس NUM قرار می گیرد، و این ماتریس به تعداد خروجی ها ردیف دارد).

سیستمی را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

این سیستم دو ورودی و دو خروجی دارد. چهار تابع تبدیل عبارت اند از  $Y_1(s)/U_1(s)$ ،  $Y_2(s)/U_1(s)$ ،  $Y_1(s)/U_2(s)$  و  $Y_2(s)/U_2(s)$ . (هنگام در نظر گرفتن ورودی  $u_1$ ، فرض می کنیم ورودی  $u_2$  صفر است و برعکس).

حل: برنامه ۲-۵ چهار تابع تبدیل را به دست می دهد.

توابع تبدیل داده شده توسط MATLAB به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned}
 \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} &= \frac{s+4}{s^2+4s+25} & \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} &= \frac{-25}{s^2+4s+25} \\
 \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} &= \frac{s+5}{s^2+4s+25} & \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} &= \frac{s-25}{s^2+4s+25}
 \end{aligned}$$

الف ۲-۱۳ معادله غیر خطی زیر را در ناحیه  $8 \leq x \leq 10$ ،  $2 \leq y \leq 4$  خطی کنید.

$$z = x^2 + 4xy + 6y^2$$

**MATLAB Program 2-5**

```

A = [0 1;-25 -4];
B = [1 1;0 1];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)

```

```

NUM =
    0    1    4
    0    0   -25

```

```

den =
    1    4   25

```

```

[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,2)

```

```

NUM =
    0  1.0000    5.0000
    0  1.0000   -25.0000

```

```

den =
    1    4   25

```

حل: تعریف می‌کنیم

$$f(x, y) = z = x^2 + 4xy + 6y^2$$

پس

$$z = f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y}) \right]_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} + \dots$$

که در آن  $\bar{x} = 9$  و  $\bar{y} = 3$ .

چون جملات مرتبه بالای معادله بسط یافته کوچک هستند از آنها چشم می‌پوشیم و به دست می‌آوریم

$$z - \bar{z} = K_1(x - \bar{x}) + K_2(y - \bar{y})$$

که در آن

$$K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = 2\bar{x} + 4\bar{y} = 2 \times 9 + 4 \times 3 = 30$$

$$K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = 4\bar{x} + 12\bar{y} = 4 \times 9 + 12 \times 3 = 72$$

$$\bar{z} = \bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 6\bar{y}^2 = 9^2 + 4 \times 9 \times 3 + 6 \times 9 = 243$$

پس

$$z - 243 = 30(x - 9) + 72(y - 3)$$

و تقریب خطی معادله داده شده در حوالی نقطه کار عبارت است از

$$z - 30x - 72y + 243 = 0$$

## مسائل

ب ۱-۲ نمودار بلوکی شکل ۲-۲۹ را ساده کرده، تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  را بیابید.

ب ۲-۲ نمودار بلوکی شکل ۲-۳۰ را ساده کرده، تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  را بیابید.

ب ۳-۲ نمودار بلوکی شکل ۲-۳۱ را ساده کرده، تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  را بیابید.

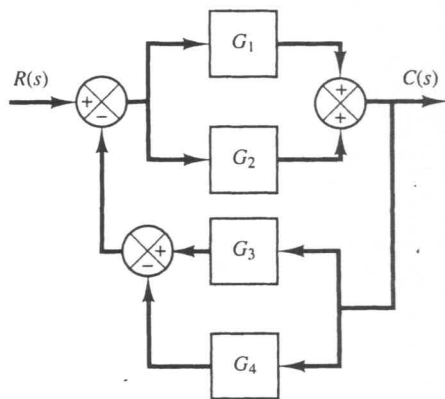
ب ۴-۲ کنترل کننده‌هایی با اعمال کنترلی تناسبی، انتگرالی، تناسبی - انتگرالی، و تناسبی - انتگرالی - مشتقی، در نظر بگیرید. تابع تبدیل این کنترل کننده‌ها به ترتیب عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

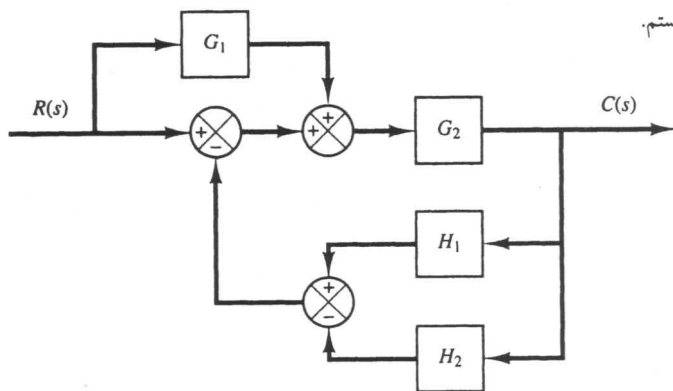
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

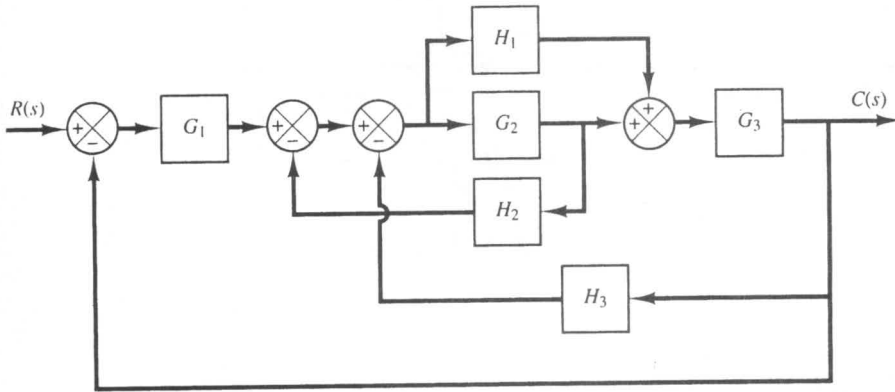


شکل ۲-۲۹ نمودار بلوکی یک سیستم.



شکل ۲-۳۰ نمودار بلوکی یک سیستم.





شکل ۲-۳۱ نمودار بلوکی یک سیستم.

$$T_d = \text{زمان مشتق} = 0.8 \text{ sec}$$

$$T_i = \text{زمان انتگرال} = 2 \text{ sec}$$

ب ۲-۵ شکل ۲-۳۲ یک سیستم حلقه بسته با ورودی مرجع و ورودی اغتشاش را نشان می‌دهد.  $C(s)$  را در صورت بودن هر دو ورودی بیابید.

ب ۲-۶ سیستم شکل ۲-۳۳ را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار را هنگام بودن هر دو ورودی مرجع  $R(s)$  و اغتشاش  $D(s)$  به دست آورید.

که در آن  $U(s)$  تبدیل لاپلاس خروجی کنترل‌کننده و  $E(s)$  تبدیل لاپلاس سیگنال خطاست.  $u(t)$  را برای هر یک از این کنترل‌کننده‌ها، به ازای سیگنالهای خطای زیر رسم کنید

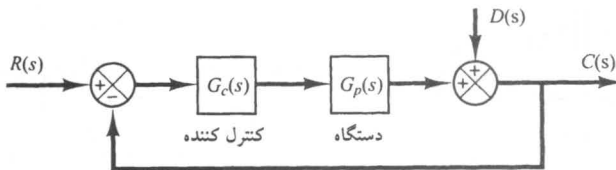
(الف)  $e(t)$  = تابع پله واحد

(ب)  $e(t)$  = تابع شیب واحد

در رسم منحنی‌ها مقادیر عددی زیر را به کار ببرید

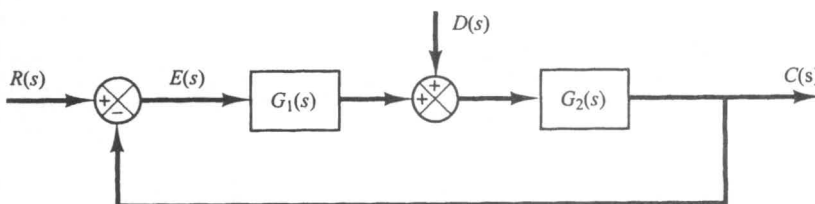
$$K_i = \text{بهره انتگرالی} = 2$$

$$K_p = \text{بهره تناسبی} = 4$$



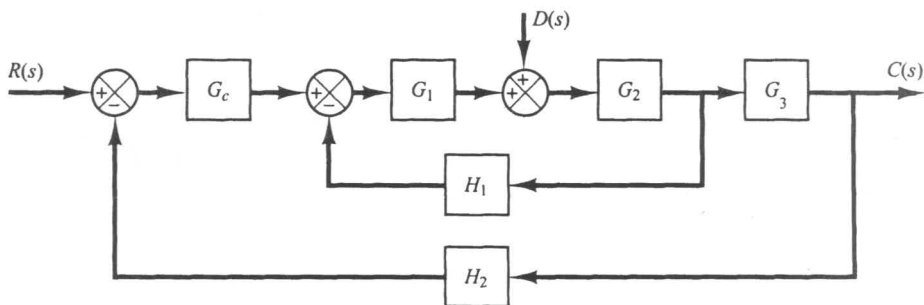
شکل ۲-۳۲

سیستم کنترل.



شکل ۲-۳۳

سیستم کنترل.



شکل ۳۴-۲ سیستم کنترل.

ب ۷-۲ توابع تبدیل  $C(s)/D(s)$  و  $C(s)/R(s)$  سیستم شکل ۳۴-۲ را بیابید.

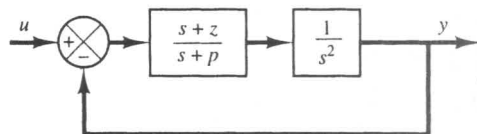
ب ۸-۲ یک نمایش فضای حالت برای سیستم شکل ۳۵-۲ بیابید.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل  $G(s)$  این سیستم را بیابید.

ب ۱۲-۲ تابع تبدیل سیستم توصیف شده در زیر را بیابید.



شکل ۳۵-۲ سیستم کنترل.

ب ۹-۲ سیستم توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$$

نمایش فضای حالت سیستم را بیابید.

ب ۱۰-۲ سیستمی به صورت زیر توصیف شده است

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ب ۱۳-۲ معادله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$z = \ddot{x} + 8xy + 3y^2$$

این معادله را در ناحیه  $2 \leq x \leq 4$ ,  $10 \leq y \leq 12$  خطی کنید.

ب ۱۴-۲ معادله زیر را حول نقطه  $x=2$  خطی کنید.

$$y = 0.2x^3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

تابع تبدیل این سیستم را بیابید.